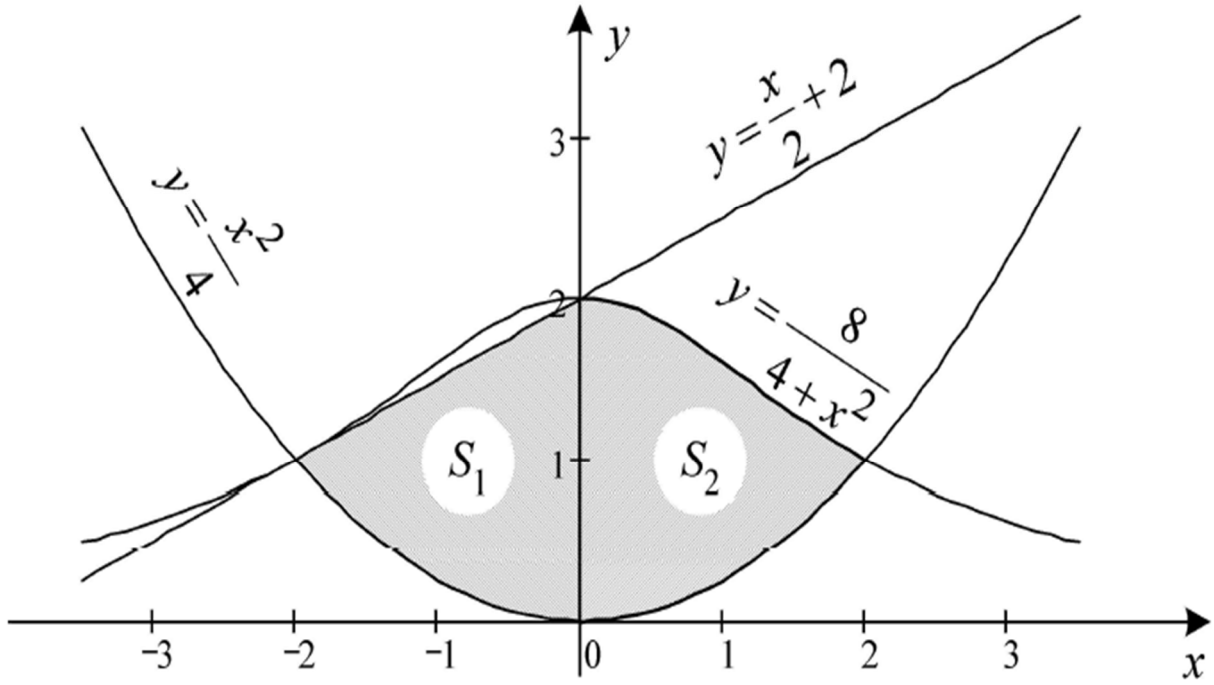
НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

В. Г. Михайленко, Є. В. Свіщова

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник



Видавництво НУА

НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

В. Г. Михайленко, Є. В. Свіщова

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник

Харків
Видавництво НУА
2027

УДК 51(075.8)
М69

Затверджено на засіданні
кафедри інформаційних технологій та математики.
Протокол №3 від 05.10.2026

Рецензент канд. фіз.-мат. наук *О. Г. Ніколаєва* (ХНУ ім. В. Н. Каразіна)

М69 **Михайленко, Віталій Григорович**
Математичний аналіз : навчальний посібник / В. Г. Михайленко, Є. В. Свіщова; Нар. укр. акад. [каф. інформ. технологій та математики]. – Харків: Вид-во НУА, 2027. – 149 с.

Посібник охоплює важливі розділи програми курсу вищої математики: вступ до аналізу, диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних, інтегральне числення, диференціальні рівняння та ряди. Видання призначене для студентів економічних та соціологічних спеціальностей, які вивчають математику як на денному, так і заочному відділеннях. Це враховувалося при викладі матеріалу: з цією метою розглянуто багато прикладів, що ілюструють викладений теоретичний матеріал та дають зразки розв’язання задач.

УДК 51(075.8)

©Народна українська академія, 2027

Жодне людське дослідження не може називатися істинною наукою, якщо воно не пройшло через математичні доведення.

Ніякої достовірності немає у науках там, де не можна докласти жодну з математичних наук, й у тому, що немає зв'язку з математикою.

Леонардо да Вінчі

ВСТУП

Математика – найдавніша і водночас найсучасніша з наук. Вона почала формуватися в другому тисячолітті до нашої ери, коли потреби землеробства, торгівлі та мореплавства змусили впорядкувати прийоми лічби й вимірювання, початок яких сягає ще глибшої давнини. Уже будівельники єгипетських пірамід володіли математичними знаннями. Як наука математика оформилася в III ст. до н. е. в безсмертних «Початках» Евкліда. За цією книгою або за її доступнішими викладами вивчали геометрію понад дві тисячі років.

Значний поворот в історії математики стався у XVII ст., коли Декарт створив аналітичну геометрію, а Ньютон і Лейбніц – диференціальне та інтегральне числення. Бурхливий розвиток математики, який настав після цих відкриттів, призвів на межі XIX–XX ст. до наукової революції.

Математика невпинно розвивається: створюються нові методи, з'являються нові розділи. З появою ЕОМ відбулося велике якісне зрушення з використанням математичних методів. Вони почали застосовуватися не лише там, де математика використовувалася здавна (у механіці, фізиці, астрономії тощо), а й у тих галузях людського знання, де математика застосовувалася або зовсім недавно і мало, або її застосування не видавалося можливим (економіка, соціологія, лінгвістика, медицина тощо). Мабуть, найзначнішим науковим досягненням було впровадження математичних методів в економічну науку та в управління економічними процесами.

Слід зазначити, що в математиці істинність досліджуваного факту доводиться не перевіркою його на низці прикладів, не проведенням низки експериментів, що не має для математики доказової сили, а виключно логічним шляхом, за законами формальної логіки. Звичайно, і експерименти, і приклади відіграють у математичних дослідженнях велику роль: вони можуть або дати ілюстрацію твердження, або спростувати його, або наштовхнути на якусь ідею.

Щоб застосовувати математику як метод дослідження, важливо усвідомити й добре засвоїти сутність та взаємозв'язок її основних ідей і понять, оволодіти процесом творчого, а не формального мислення.

Непряма користь від вивчення математики полягає в тому, що воно вдосконалює культуру мислення, дисциплінує його, привчає людину логічно міркувати, виховує точність і ґрунтовність аргументації.

Уміння логічно мислити, володіння математичним апаратом, правильне використання математики – все це дає в руки людині потужний метод дослідження.

Оволодіти достатньою мірою математичним методом, культурою математичного мислення – завдання далеко не просте. Але для того, хто зможе цього досягти, праця не пропаде даремно. Важливо зазначити, що все це доступно кожному, хто хоче оволодіти математикою, хто серйозно і послідовно візьметься за її вивчення.

1. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ

1.1. Дійсні числа та їх основні властивості

Поняття дійсного числа вводиться в курсі елементарної (шкільної) математики. Наведемо основні відомості про множину дійсних чисел, які будуть використовуватися надалі.

Множина дійсних чисел складається з раціональних та ірраціональних чисел. ***Раціональним*** називається число, яке можна записати у вигляді $\frac{p}{q}$, де p та q – цілі числа, причому $q \neq 0$. ***Ірраціональним*** називається дійсне число, яке не є раціональним. Будь-яке раціональне число є або цілим, або скінченним чи нескінченним періодичним дробом. Ірраціональне число є нескінченним неперіодичним десятковим дробом. Так, наприклад, раціональні числа $\frac{2}{5}$ та $\frac{2}{3}$ можна представити у вигляді наступних десяткових дробів: $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $\frac{2}{3} = 0{,}666... = 0{,}(6)$; ірраціональні числа $\sqrt{2}$ та π – у вигляді нескінченних неперіодичних дробів:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135..., \qquad \pi = 3{,}1415925...$$

Для будь-якої пари дійсних чисел a та b визначаються, і до того ж єдиним чином, два дійсні числа $a+b$ та $a \cdot b$, що називаються їх сумою і добутком відповідно. При цьому, якими б не були числа a, b та c, має місце:

1) $a + b = b + a$; 2) $a + (b + c) = (a + b) + c$;

3) $a \cdot b = b \cdot a$; 4) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

5) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;

6) існує єдине число 0, таке, що $a + 0 = a$, $a \cdot 0 = 0$;

7) для будь-якого числа a існує таке число $(-a)$, яке називається протилежним, що $a + (-a) = 0$; $(-(-a) = a)$;

8) існує єдине число 1 таке, що $1 \cdot a = a$, $(-1 \cdot a = -a)$;

9) для будь-якого числа $a \neq 0$ існує таке число a^{-1}, яке називається оберненим, що $a \cdot a^{-1} = 1$ (число a^{-1} позначається також символом $\frac{1}{a}$).

Число $a + (-b)$ називається різницею чисел a та b і позначається $a - b$, зокрема $(a - a = 0)$.

Число $a \cdot b^{-1}$ називається часткою чисел a та b і позначається $\frac{a}{b}$ або $a : b$. Якщо $a \neq 0$, то $\frac{a}{a} = 1$ і $\frac{0}{a} = 0$.

Для будь-яких двох дійсних чисел a та b встановлено одне з таких відношень: $a = b$, $a > b$ або $b > a$. Якими б не були числа a, b та c:

10) якщо $a = b$ та $b = c$, то $a = c$;

11) якщо $a > b$ та $b > c$, то $a > c$;

12) якщо $a > b$, то $a + c > b + c$.

Замість $b > a$ пишуть також $a < b$. Запис $a \geq b$ (або те саме, $b \leq a$) означає, що або $a = b$, або $a > b$. Співвідношення $a < b$, $a \leq b$, $a > b$, $a \geq b$ називаються нерівностями. Нерівності $a < b$ та $a > b$ називаються строгими нерівностями;

13) якщо $a < b$, то $-a > -b$;

14) якщо $a > b$ та $c > d$, то $a + c > b + d$;

15) якщо $a > b$ та $c < d$, то $a - c > b - d$;

16) якщо $a > 0$ та $b > 0$, або $a < 0$ та $b < 0$, то $a \cdot b > 0$, $\frac{a}{b} > 0$ та $\frac{b}{a} > 0$;

17) якщо $a > 0$ та $b < 0$, то $a \cdot b < 0$, $\frac{a}{b} < 0$ та $\frac{b}{a} < 0$;

18) якщо $a > 0$, то $a^{-1} > 0$ та $-a < 0$.

Абсолютною величиною (або ***модулем***) числа a називається саме число a, якщо $a \geq 0$, і число $-a$, якщо $a < 0$. Абсолютна величина числа a позначається символом $|a|$. Таким чином,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}.$$

Абсолютна величина числа має такі властивості:

19) $|a| \geq 0$; 20) $|a| = |-a|$; 21) $-|a| \leq a \leq |a|$;

22) $|a \pm b| \leq |a| + |b|$; 23) $|a \pm b| \geq |a| - |b|$;

24) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; 25) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, якщо $b \neq 0$;

26) якщо ε – додатне число, то нерівності $|x| \leq \varepsilon$ та $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ рівносильні;

27) коренем рівняння $a + x = b$ є число $x = b - a$,

28) коренем рівняння $a \cdot x = b$ $(a \neq 0)$ є число $x = \frac{b}{a}$.

Нехай дано два числа a та b, причому $a < b$. Множина всіх чисел x, що лежить між числами a та b, тобто. задовольняють нерівності $a < x < b$, називається ***інтервалом*** і позначається (a,b), а самі числа a та b називаються кінцями інтервалу (відповідно лівим і правим кінцями інтервалу (a,b)). Якщо множина чисел, розташованих між a та b, включає в себе і самі ці числа, тобто $a \leq x \leq b$ ця множина називається ***відрізком*** і позначається $[a,b]$. Множина чисел, що задовольняють умовам $a \leq x < b$ або $a < x \leq b$,

позначаються відповідно $[a; b)$ або $(a; b]$. Множина чисел, що задовольняють нерівності $x > a$ або $x \geq a$, позначають відповідно $(a; +\infty)$ або $[a; +\infty)$. Позначення $(-\infty; b)$ і $(-\infty; b]$ використовуються для множини чисел, що задовольняють умовам $x < b$ і $x \leq b$ відповідно. Множина всіх дійсних чисел позначається так: $-\infty < x < +\infty$, $(-\infty; \infty)$ або R.

Всі ці множини називаються також ***проміжками***. Проміжки $[a; b]$, $[a; b)$, $(a; b)$, $(a; b]$ називаються скінченними, решта – нескінченними. Кожному дійсному числу x відповідає деяка точка числової осі (координатної прямої). Кожній точці числової осі відповідає деяке дійсне число x – її координата.

Числовим проміжкам відповідають проміжки на координатній прямій. Зображенням множини $(-\infty; \infty)$ всіх чисел є вся координатна пряма. (Тому множина $(-\infty; \infty)$ називається також числовою прямою, а будь-яке число – точкою цієї прямої).

Нехай a – довільна точка числової осі, а ε – будь-яке додатне число. Інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ називається ***ε-околом точки*** a. Цей інтервал можна записати так: $|x - a| < \varepsilon$.

1.2. Функціональна залежність

Змінною величиною називається величина, яка набуває різних числових значень. Величина, числові значення якої не змінюються, називається ***сталою величиною*** (***постійною*** або ***константою***).

Якщо кожному значення змінної x, що належить деякому проміжку, відповідає одне певне значення інший змінної y, то кажуть, що y ***є функція від*** x, і символічно це записують так:

$$y = f(x) \text{ (або } y = y(x),\ y = \varphi(x), \ldots),$$

при цьому змінна x називається ***незалежною змінною*** або ***аргументом***. Співвідношення між змінними x та y називається ***функціональною залежністю***. Буква f в символічному записі функціональної залежності $y = f(x)$ вказує, що над значенням x потрібно зробити якісь операції, щоб отримати значення y. Запис $y = C$, де C – стала ($C = const$), позначає функцію, значення якої при будь-якому значенні x одне і те ж і дорівнює C.

Множина значень x, для яких визначаються значення функції y із правила $f(x)$, називається ***областю визначення функції***. Так, наприклад, функція $y = 2x + 6$ визначена при всіх значеннях x, тобто її областю визначення буде інтервал $(-\infty; \infty)$; функція $y = \sqrt{1 - x^2}$ визначена лише для тих x, для яких $1 - x^2 \geq 0$, тобто областю визначення цієї функції буде відрізок [– 1; 1].

Графіком функції $y = f(x)$ називається геометричне місце точок площини $x0y$, координати яких задовольняють умову $y = f(x)$, тобто множина точок площини з координатами $(x; f(x))$.

Якщо функція $y = f(x)$ така, що більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, то така функція називається ***зростаючою***. Якщо ж більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, то функція $y = f(x)$ називається ***спадною***.

Функція $f(x)$ називається ***парною***, якщо $f(-x) = f(x)$, ***непарною***, якщо $f(-x) = -f(x)$. Графік парної функції симетричний відносно осі ординат (осі $0y$), графік непарної функції – відносно початку координат.

Функція $f(x)$ називається ***періодичною***, якщо є додатне число T, таке, що у області визначення функції виконується рівність $f(x+T) = f(x)$. Найменше додатне число τ, що має зазначену властивість, називається ***основним періодом функції***.

Задати функцію $f(x)$ означає вказати, як по кожному значенню аргументу x знаходити відповідне значення функції $f(x)$.

Функція може бути задана таблично, графічно чи аналітично.

При ***табличному*** способі завдання функції виписуються у певному порядку значення аргументу $x_1, x_2, ..., x_n$ та відповідні їм значення функції $y_1, y_2, ..., y_n$.

Такими є, наприклад, таблиці тригонометричних функцій, таблиці логарифмів тощо.

При ***графічному*** способі завдання функцій у прямокутній (або будь-якій іншій) системі координат на площині, функціональна залежність зображується лінією, тобто множиною точок площини, абсциси яких є значеннями незалежної змінної, а ординати – відповідними значеннями функції. (Ця лінія називається ***графіком функції***).

При ***аналітичному*** способі завдання функції функціональна залежність записується у вигляді однієї чи кількох формул чи рівнянь.

Так, наприклад; $y = sign\ x = \begin{cases} -1, & \text{при} \quad x < 0 \\ 0, & \text{при} \quad x = 0 \\ 1, & \text{при} \quad x > 0 \end{cases}$.

Якщо змінна величина y залежить від змінної величини u, яка сама є функцією від x, то y називається ***складеною функцією*** від x, або ***суперпозицією*** функцій. Складену функцію позначають так: $y = f(u)$ де $u = \varphi(x)$, або $y = f(\varphi(x))$.

При цьому u називається ***проміжним аргументом***, а x – ***кінцевим***. Так, наприклад, функція $y = \log_3^2(x+2)$ є складеною. Її можна записати так: $y = u^2$, де $u = \log_3(x+2)$.

Стала функція $f(x) = C$ $(C = const)$, степенева функція x^α (α - довільне число), показникова функція $a^x (0 < a \neq 1)$, логарифмічна функція $\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, тригонометричні функції $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $ctg\, x$ та обернені тригонометричні функції $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg\, x$, $arcctg\, x$ називаються ***основними елементарними функціями***.

Функції, отримані за допомогою скінченного числа арифметичних дій над основними елементарними функціями, а також суперпозицій цих функцій, називаються ***елементарними***.

Так, наприклад, функції $f(x) = x^2 - 3x + 4$; $f(x) = \sin 2x + 3^x \cos x$; $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$; $f(x) = \log_a tgx$ тощо є елементарними.

Елементарна функція виду $P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$, де $a_0, a_1, ..., a_n$ – сталі, а n – ціле невід'ємне число, називається ***цілою раціональною функцією***, або ***многочленом степеня*** n. Многочлен першого степеня називається також лінійною функцією.

Нехай $y = f(x)$ – деяка функція. Тут x – аргумент, а y – функція. Якщо в цій залежності між x і y вважати y незалежною змінної, а x – залежною змінною, тобто $x = \varphi(y)$, то ця функція називається ***оберненою*** до функції $y = f(x)$. При цьому, очевидно, має місце $y = f(x) = f\big(\varphi(y)\big)$. Функцію, обернену до функції $y = f(x)$, найчастіше позначають так: $x = f^{-1}(y)$.

Якщо функція задана рівнянням виду $y = f(x)$, вона називається ***явною***. Функція, задана рівнянням $F(x, y) = 0$, не розв'язаним відносно y, називається ***неявною***.

Так, наприклад, $y = 2x$, $y = tg\, x$, $y = \lg x$ – явні функції, а $2x + 5y - 1 = 0$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy + x \sin y - 5 = 0$ – неявні.

Нехай дані два рівняння $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Тоді кожному значенню t відповідають певні значення x та y. У цьому випадку говорять, що функція задана ***параметрично***, а t називають ***параметром***. Щоб отримати безпосередню залежність y від x, необхідно з рівнянь виключити параметр t. Якщо припустити, що функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = \phi(x)$, то очевидно, що $y = \psi((\phi(x))$.

Деякі функціональні залежності, що використовуються в економіці:

1) функція попиту – залежність попиту y на деякий товар від його ціни x;

2) функція пропозиції – залежність пропозиції y деякого товару від його ціни x;

3) функція корисності – суб'єктивна числова оцінка індивідом корисності y, яку для нього має кількість x певного товару.

4) однофакторна виробнича функція – залежність обсягу y виробленої продукції від обсягу використаного ресурсу x;

5) функція витрат – залежність витрат y на виробництво x одиниць продукції;

6) податкова ставка – залежність податку y у відсотках від величини доходу x.

Всі ці функції, крім останньої, дуже важко записати аналітично (їх знаходять шляхом ретельного аналізу). Остання функція зазвичай досить добре відома всьому суспільству і затверджується законодавчо.

1.3. Поняття границі

Нехай дана змінна величина x_n, яка приймає нескінченну послідовність значень

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ..., \tag{1}$$

тобто заданий ***закон зміни змінної*** x_n. Це означає, що для будь-якого натурального числа n можна вказати відповідне значення x_n, тобто x_n задана як функція від n.

Число a називається ***границею послідовності*** (1), або ***границею змінної*** x_n якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε знайдеться таке натуральне число N, що всі значення змінної x_n, починаючи з x_N, відрізняються від a по абсолютній величині менше, ніж на ε.

Той факт, що число a є границею послідовності (1), або границею змінної x_n, коротко записується так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{або} \quad x_n \to a \ \text{при} \ n \to \infty \tag{2}$$

і читається: *границя x_n при n, що прямує до нескінченності, дорівнює a,* або *x_n прямує до a*. Тут запис $n \to \infty$ означає, що n необмежено зростає. Таким чином, (2) означає, що для будь-якого, наперед заданого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке натуральне число N, що залежить від ε, тобто $N = N(\varepsilon)$, що

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{для всіх} \quad n \geq N. \tag{3}$$

Приклад. Змінна величина x_n набуває значення

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = \frac{4}{3}, \ ..., \quad x_n = \frac{n+1}{n}, \ ...,$$

тобто закон зміни змінної величини x_n такий: $x_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Покажемо, що ця змінна величина x_n має границю, що дорівнює одиниці. Для цього виберемо довільне як завгодно мале число $\varepsilon > 0$ і розглянемо $|x_n - 1|$. Оскільки $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| = \dfrac{1}{n}$, то для усіх $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$ матимемо: $|x_n - 1| = \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$, що і означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Якщо змінна величина x_n прямує до своєї границі a, залишаючись менше за неї, то умовно пишуть $x_n \to a - 0$, або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a - 0$. Якщо ж змінна величина x_n прямує до своєї границі a, залишаючись більше за неї, тоді умовно пишуть $x_n \to a + 0$, або $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a + 0$.

Так, у розглянутому вище прикладі $x_n \to 1 + 0$. Неважко перевірити, що для змінної $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ має місце $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1 - 0$. Змінна $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ прямує до нуля, приймаючи по черзі значення то більше, то менше за нуль.

Не слід думати, що кожна змінна величина має границю. Розглянемо, наприклад, змінну величину x_n, задану наступним законом зміни: $x_n = (-1)^n$. Очевидно, що змінна величина x_n набуває наступних значень:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = 1, \ldots,\ x_n = (-1)^n,\ \ldots$$

Очевидно, що ця змінна величина границі не має.

Теорема 1. Змінна величина x_n може мати лише одну границю.

Доведення. Припустимо, що змінна x_n має дві різні границі, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $(a \neq b)$. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ виконуються нерівності:

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{для всіх} \quad n \geq N_1(\varepsilon),$$
$$|x_n - b| < \varepsilon \quad \text{для всіх} \quad n \geq N_2(\varepsilon).$$

Візьмемо за ε будь-яке число, що задовольняє умову $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2} \cdot |a - b|$, та із чисел $N_1(\varepsilon)$ і $N_2(\varepsilon)$ виберемо більше, яке позначимо через $N(\varepsilon)$. Тоді $|x_n - a| < \varepsilon$ і $|x_n - b| < \varepsilon$ для всіх $n \geq N(\varepsilon)$. З цих нерівностей та властивостей абсолютної величини числа отримуємо, що для всіх $n \geq N(\varepsilon)$

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leq |a - x_n| + |x_n - b| = |x_n - a| + |x_n - b| < 2\varepsilon.$$

Оскільки $0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \cdot |a-b|$, то остання нерівність позбавлена сенсу, оскільки вона означає, що $|a-b| < |a-b|$.

Отже, ми дійшли протиріччя, припустивши, що $a \neq b$. Таким чином, $a = b$ і, тим самим, теорему 1 доведено.

Зауваження.

$$\lim_{n\to\infty} C = C.$$

Розглянемо *геометричну інтерпретацію* границі змінної.

Нехай задана змінна величина x_n така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Отже, згідно з (3), для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $N(\varepsilon)$, що $|x_n - a| < \varepsilon$ для всіх $n \geq N(\varepsilon)$. Це означає, що для всіх $n \geq N$ має місце $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, тобто всі значення величини x_n, починаючи з x_N, знаходяться всередині інтервалу $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$. Таким чином, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то геометрично це означає, що при будь-якому $\varepsilon > 0$ всі значення x_n, починаючи з x_N, знаходяться всередині ε-околу точки a, тобто поза будь-якого ε-околу точки a знаходиться лише скінченна кількість значень змінної x_n. Зокрема, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a - 0$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a + 0$), то, починаючи з $n \geq N(\varepsilon)$, усі значення змінної знаходяться на інтервалі $(a-\varepsilon;\ a)$ $((a;\ a+\varepsilon))$.

Змінну величину x_n називають ***нескінченно малою***, якщо її границя дорівнює нулю, тобто, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ $(x_n \to 0)$. Так, наприклад, величини $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \left(\frac{1}{2}\right)^n$ при $n \to \infty$ є нескінченно малими величинами, бо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0,\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Рівність $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, згідно з (3) означає, що яке б не було $\varepsilon > 0$, знайдеться таке $N(\varepsilon)$, що

$$|x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \text{ для всіх } n \geq N(\varepsilon), \qquad (4)$$

тобто нескінченно мала величина необмежено наближається до нуля.

Неважко бачити, якщо величина x_n має межею число a, то величина $\alpha_n = x_n - a$ буде нескінченно малою.

Дійсно, згідно з (3), для будь-кого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $N(\varepsilon)$, що $|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$ для всіх $n \geq N(\varepsilon)$, а це означає, що $x_n - a$ – нескінченно мала.

Значить, величину x_n, що має границею число a, можна подати у вигляді

$$x_n = a + \alpha_n, \qquad (5)$$

де α_n – нескінченно мала. І навпаки, якщо змінна величина x_n записана у вигляді (5), то вона має границю, що дорівнює a.

Таким чином, доведено наступне:

Теорема 2. Щоб змінна x_n мала границю, що дорівнює a, необхідно і достатньо, щоб вона була подана у вигляді (5), де α_n – нескінченно мала.

Надалі нескінченно малі величини позначатимемо так: α_n, β_n, γ_n.

Теорема 3. Алгебраїчна сума скінченної кількості нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною.

Доведення. Для зручності розглянемо суму двох нескінченно малих α_n і β_n. Позначимо $\alpha_n + \beta_n = \gamma_n$. Згідно з (4), для будь-якого $\varepsilon > 0$, знайдуться такі $N_1(\varepsilon)$ та $N_2(\varepsilon)$, що $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $n \geq N_1(\varepsilon)$ та $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ для всіх $n \geq N_2(\varepsilon)$. З чисел $N_1(\varepsilon)$ та $N_2(\varepsilon)$ виберемо більше, яке позначимо через $N(\varepsilon)$. Тоді $|\gamma_n| = |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ для всіх $n \geq N(\varepsilon)$. Але, згідно з (4), це означає, що $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ є величина нескінченно мала. Таким чином, теорему 3 доведено для суми двох нескінченно малих величин.

Аналогічно вона доводиться і у разі алгебраїчної суми будь-якої скінченної кількості нескінченно малих величин. З теорем 2 та 3 випливає

Наслідок. Якщо $x_n \to a$ і $y_n \to a$, то $x_n - y_n$ є нескінченно малою величиною.

Дійсно, згідно з теоремою 2, $x_n = a + \alpha_n$ і $y_n = a + \beta_n$, де α_n і β_n – нескінченно малі величини. Тому $x_n - y_n = \alpha_n - \beta_n$. Згідно з теоремою 3 величина $\alpha_n - \beta_n$ – нескінченно мала.

Кажуть, що змінна x_n ***прямує до нескінченності*** і пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ або $x_n \to \infty$, якщо для будь-якого наперед заданого як завгодно великого додатного числа А можна вказати таке число N(А), що для всіх $n > N$(А) значення x_n задовольнятимуть нерівність $|x_n| > A$. Таку змінну величину називають ***нескінченно великою***. Так, наприклад, величини n, n^3, 2^n, $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ при $n \to \infty$ є нескінченно великими.

Кажуть, що змінна x_n прямує до плюс (мінус) нескінченності та пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ або $x_n \to +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ або $x_n \to -\infty$), якщо для будь-якого наперед заданого як завгодно великого додатного числа A можна вказати таке

число $N(A)$, що для всіх $n \geq N(A)$, значення x_n задовольнятимуть нерівність $x_n > A$ $(x_n < -A)$.

Зауважимо, що величина $\frac{1}{x_n}$, обернена до нескінченно великою x_n, є нескінченно малою; а величина $\frac{1}{\alpha_n}$, обернена до нескінченно малої α_n, є нескінченно великою.

Змінна величина x_n називається ***обмеженою***, якщо існує число $A > 0$ таке, що $|x_n| \leq A$, тобто якщо всі значення змінної x_n знаходяться на деякому відрізку $[-A; A]$.

Якщо всі значення змінної x_n більше (менше) деякого числа A_1, то про таку змінну величину говорять, що вона ***обмежена знизу*** (***зверху***).

Теорема 4. Змінна величина, що має скінченну границю, обмежена.

Теорема 5. Якщо значення змінної x_n не дорівнюють нулю, і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, то $\frac{1}{x_n}$ – обмежена величина.

Наводити доведення цих теорем не будемо.

Таким чином, змінна величина x_n може бути одного з наступних видів:

1) обмежена і має границю (зокрема, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, то x_n – нескінченно мала);

2) обмежена, але не має границі (наприклад, $x_n = (-1)^n$);

3) необмежена і до того ж нескінченно велика ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$);

4) необмежена, але не нескінченно велика. Прикладом такої величини може бути величина $x_n = n^{(-1)^n}$ $(x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = \frac{1}{3},\ \ x_4 = 4,\ x_5 = \frac{1}{5}, \ldots)$. Границі цієї величини не існує.

Теорема 6. Добуток нескінченно малої величини на обмежену величину є нескінченно малою величиною.

Доведення. Нехай α_n – нескінченно мала, а x_n – обмежена величина, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ і $|x_n| < A$, де A – деяке додатне число. Виберемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді, згідно з (4), знайдеться таке $N(\varepsilon)$, що $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{A}$ для всіх $n \geq N(\varepsilon)$. Тому $|x_n \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| < A \cdot \frac{\varepsilon}{A} = \varepsilon$ для усіх $n \geq N(\varepsilon)$, тобто $x_n \alpha_n$ є величина нескінченно мала. Теорему 6 доведено.

З цієї теореми випливає, що:

1) добуток двох нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною;

2) добуток сталої на нескінченно малу величину є нескінченно малою величиною.

З теорем 3 та 6 випливає, що ***сума, різниця та добуток двох нескінченно малих величин є нескінченно малими величинами***. Якщо ж розглянути відношення нескінченно малих величин, то в загальному випадку про нього нічого певного сказати не можна. Як буде показано нижче, відношення двох нескінченно малих величин може бути і обмеженою, і нескінченно малою, і нескінченно великою величиною.

Нескінченно малі величини α_n і β_n називають ***нескінченно малими одного порядку***, якщо границя їх відношення дорівнює скінченному числу $A \neq 0$. У окремому випадку, коли $A = 1$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$, нескінченно малі величини α_n і β_n називають ***еквівалентними***.

Нескінченно малу величину α_n називають нескінченно малою ***вищого порядку***, ніж нескінченно мала величина β_n, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$ або $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\beta_n}{\alpha_n} = \infty$.

Наприклад, нескінченно малі $\dfrac{1}{n^2}$ і $\dfrac{1}{3n^2}$ одного порядку, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n^2}{1/3n^2} = 3$; нескінченно малі $\dfrac{1}{n}$ і $\dfrac{1}{n+1}$ еквівалентні, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n}{1/n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = 1$; нескінченно мала $\dfrac{1}{n^2}$ вищого порядку, ніж нескінченно мала $\dfrac{1}{n}$, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n^2}{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

1.4. Основні теореми про границі

Теорема 7. Границя алгебраїчної суми скінченної кількості змінних дорівнює алгебраїчній сумі їх границь, якщо границі цих змінних існують і скінченні.

Теорема 8. Границя добутку двох змінних дорівнює добутку границь множників (якщо границі існують і скінченні).

Наслідок. Постійний множник можна виносити за знак границі, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}(C\cdot x_n)=C\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, де C – стала.

Справді, $\lim\limits_{n\to\infty}(C\,x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}C\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x_n=C\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Розглянемо ще деякі теореми, доведення яких наводити не будемо.

Теорема 9. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq 0$ і y_n не приймає нульових значень, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}$.

Теорема 10. Якщо змінна x_n лежить між двома змінними y_n і z_n, що прямують до тієї самої границі, то і вона також прямує до цієї границі.

Теорема 11. Якщо значення змінної величини, принаймні з деякого номера, задовольняють нерівність $x_n\geq b$ $(x_n\leq b)$, то її границя (якщо вона існує) задовольняє нерівність $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\geq b$ $(\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\leq b)$.

Кажуть, що змінна x_n ***зростає та обмежена зверху*** (***спадає та обмежена знизу***), якщо

а) $x_1<x_2<x_3<\ldots<x_n<\ldots$ $(x_1>x_2>x_3>\ldots>x_n>\ldots)$;

б) існує таке число A, що $x_n<A$ $(x_n>A)$ для всіх n.

Теорема 12 (достатня умова існування границі). Якщо змінна x_n зростає і обмежена зверху (спадає і обмежена знизу), то вона має границю.

1.5. Границя функції

Нехай функція $y=f(x)$ визначена в деякому околі точки a (тобто на деякому інтервалі, що містить точку a); а x_1, $x_2,\ldots,x_n,\ldots$ – довільна нескінченна послідовність значень аргументу x така, що

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\qquad(x_n\neq a). \tag{6}$$

Послідовності (6) відповідає послідовність $y_n=f(x_n)$ значень функції

$$f(x_1),\ f(x_2),\ldots,\ f(x_n),\ \ldots. \tag{7}$$

Число b називається ***границею функції*** $y=f(x)$ ***при*** $x\to a$ і позначається $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$, якщо для будь-якої числової послідовності $x_n\to a$ $(x_n\neq a)$ значень аргументу x відповідна послідовність (7) значень функції має границею число b (границя функції по Гейне).

З цього означення границі функції випливає, що функція $f(x)$ в точці a може мати лише одну границю. (Це випливає з єдиності границі послідовності $f(x_n)$).

Можна показати, що це означення границі функції рівнозначно наступному (границя функції по Коші):

Число b називається ***границею функції*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to a$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число δ, що $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$, тобто якщо є такий δ – окіл точки a, що всі значення $f(x)$, відповідні значенням аргументу x з цього околу (крім, можливо, значення $f(a)$), відрізняються від числа b менше, ніж на задане ε.

Число b, що дорівнює $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ ($\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$), називається ***границею функції*** $f(x)$ ***в точці*** a ***зліва (справа)*** або ***лівою (правою) границею функції*** $f(x)$ ***в точці*** a.

Ліва і права границі називаються ***односторонніми границями***. Для позначення односторонніх границь використовується така символіка:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a+0), \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0).$$

Має місце така теорема.

Теорема 13. Щоб існувала границя $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, необхідно і достатньо, щоб існували односторонні границі $f(a-0)$ та $f(a+0)$ і ці границі були рівні: $f(a-0) = f(a+0)$.

Доведення цієї теореми наводити не будемо. (Бажаючим рекомендується довести теорему самостійно).

Приклади.

1. Функція $f(x) = C$ має границю, що дорівнює С, у кожній точці числової прямої.

2. Функція $f(x) = x$ в будь-якій точці $x = a$ числової прямої має границю, що дорівнює a.

3. Функція $f(x) = \operatorname{sign} x$ не має границі у точці $x = 0$. Справді, оскільки $\operatorname{sign} x = -1$ для $x < 0$, то $f(-0) = -1$. Аналогічно, з умови $\operatorname{sign} x = 1$ для $x > 0$ випливає, що $f(+0) = 1$. Таким чином, у функції $\operatorname{sign} x$ в точці $x = 0$ не виконується умова теореми 13 ($f(-0) \neq f(+0)$). Отже, $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sign} x$ не існує.

У тому випадку, коли для будь-якої послідовності $x_n \to a$ послідовність $|f(x_n)|$ прямує до нескінченності, кажуть, що ***границею функції*** $y = f(x)$ ***при*** $x \to a$ ***є нескінченність*** і пишуть: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

Так, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x-1}=\infty$. Причому, $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{2}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{2}{x-1}=+\infty$.

Число b називається ***границею функції*** $f(x)$ ***при*** $x\to\infty$, якщо для будь-якого наперед заданого як завгодно малого додатного числа ε існує таке додатне число $A(\varepsilon)$, що $|f(x)-b|<\varepsilon$ при $|x|>A(\varepsilon)$.

Так, наприклад, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=1$.

Справді, яке б ми не взяли $\varepsilon>0$, нерівність $\left|\dfrac{x+2}{x}-1\right|<\varepsilon$, або рівносильна йому нерівність $\left|\dfrac{2}{x}\right|<\varepsilon$, виконуватиметься для всіх значень x, що задовольняють умову $|x|>\dfrac{2}{\varepsilon}$ (тобто як $A(\varepsilon)$ можна взяти $\dfrac{2}{\varepsilon}$ або будь-яке число, більше ніж $\dfrac{2}{\varepsilon}$). Отже, згідно з означенням, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=1$.

Число b називається ***границею (по Коші) функції*** $f(x)$ ***при*** $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $A=A(\varepsilon)>0$, що для всіх $x>A$ $(x<-A)$ справедлива нерівність $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Визначення границі функції $f(x)$ при $x\to\infty$ $(x\to\pm\infty)$ по Гейне рекомендується дати самостійно.

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно малою при*** $x\to a$ $(x\to\infty)$, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ ($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$).

Функція $f(x)$ називається ***нескінченно великою при*** $x\to a$ $(x\to\infty)$, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ ($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$).

Нескінченно малі (нескінченно великі) при $x\to a$ або $x\to\infty$ функції $f(x)$ та $g(x)$ називаються ***еквівалентними*** при $x\to a$ або при $x\to\infty$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ або, відповідно, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. Як буде показано нижче, еквівалентні функції широко використовуються при обчисленні границь.

Для границі функції мають місце теореми, аналогічні теоремам про границі змінних. Зокрема, має місце така теорема.

Теорема 14. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ мають у точці a границі, відповідно рівні b та c, то функції $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, а якщо $c\neq 0$, то й функція $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ мають у точці a границі, відповідно рівні $b\pm c$, $b\cdot c$, $\dfrac{b}{c}$, тобто:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x),$$

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\qquad (\lim_{x\to a}g(x)\neq 0).$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенням теорем 7-9.

З теореми 14 безпосередньо випливають такі твердження:

1) якщо існує границя $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, а C – будь-яке число, то $\lim\limits_{x\to a}C\cdot f(x)=C\lim\limits_{x\to a}f(x)$;

2) якщо k – будь-яке ціле число, то $\lim\limits_{x\to a}x^k=a^k$;

3) якщо $P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, то

$$\lim_{x\to a}P_n(x)=a_0+a_1a+\ldots+a_na^n=P_n(a);$$

4) якщо $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$ і $P_m(a)\neq 0$, то

$$\lim_{x\to a}R(x)=\lim_{x\to a}\frac{P_n(x)}{P_m(x)}=\frac{P_n(a)}{P_m(a)}=R(a).$$

Теорема 15. Якщо функції $f(x)$, $\varphi(x)$ і $g(x)$ в ε-околі точки a задовольняють умови $f(x)\le\varphi(x)\le g(x)$, тоді, якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ мають границі в точці a і ці границі рівні, то функція $\varphi(x)$ в точці a теж має границю і при цьому

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}g(x).$$

Приклади.

1. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{3x-2}$.

Розв'язання. Відповідно до теореми 14 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{3x-2}=\dfrac{5}{1}=5.$

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$.

Розв'язання. Скористатися теоремою 14 не можна, оскільки при $x = 2$ чисельник і знаменник перетворюються на нуль. У цьому випадку кажуть, що при $x\to 2$ маємо невизначеність виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, а знаходження границі функції в цьому випадку називають ***розкриттям невизначеності виду*** $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Розкладемо чисельник і знаменник на множники: $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}$.

З огляду на те, що при $x\to 2$ змінна x не приймає значень, рівних 2, (тобто $x\neq 2$), то $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Тому $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=4$.

3. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{2x^2+1}$.

Розв'язання. В даному випадку скористатися теоремою 14 теж неможливо, оскільки при $x\to\infty$ і чисельник і знаменник необмежено зростають. У цьому випадку при $x\to\infty$ виникає невизначеність виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Для знаходження границі (розкриття невизначеності виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$) розділимо чисельник і знаменник на x^2: $\dfrac{x^2+x}{2x^2+1}=\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x^2}}$.

Тепер $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{2x^2+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{2+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{1}{2}$.

1.6. Чудові границі

Розглянемо дві границі, що часто зустрічаються у вищій математиці і які прийнято називати «чудовими границями».

Перша чудова границя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

З першої чудової границі витікає, що при $x\to 0$ нескінченно малі функції $\sin x$ та x – еквівалентні. Більше того, якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x\to a$, тобто $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1 \qquad (y=\alpha(x)).$$

Отже, якщо $\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x\to a$, то функції $\sin\alpha(x)$ і $\alpha(x)$ – еквівалентні.

Еквівалентні нескінченно малі функції широко використовуються на практиці при розкритті невизначеностей виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Нехай, наприклад, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ та $\gamma(x)$ – нескінченно малі функції при $x\to a$, причому $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ еквівалентні, тобто $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Тоді, якщо існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\beta(x)}$, і ці границі рівні:

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}.$$

Справді, оскільки за умовою існує границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$ і $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}\cdot\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. При цьому, з одного боку $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}\cdot\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}\cdot\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$; з іншого боку, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}\cdot\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\beta(x)}$. Отже, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$. Таким чином, при розкритті невизначеності виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ нескінченно малі функції можна замінювати на еквівалентні їм нескінченно малі (якщо ці функції є множниками чисельника або знаменника).

Приклади.

1. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. Оскільки $3x\to 0$ та $\sin 3x\to 0$ при $x\to 0$ і функції $\sin 3x$ та $3x$ при $x\to 0$ еквівалентні, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3$.

2. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x^3-1)}{x^2-1}$.

Розв'язання. При $x\to 1$ функції $\sin(x^3-1)$ та (x^3-1) є еквівалентними нескінченно малими. Тому

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x^3-1)}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{3}{2}.$$

3. Знайти границю: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

Розв'язання. Позначимо $\arcsin x=y$. Тоді $x=\sin y$. З умови $x\to 0$ випливає, що $y=\arcsin x\to 0$. Тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

З цього прикладу випливає, що при $x\to 0$ функції $\arcsin x$ і x еквівалентні.

Друга чудова границя: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,

де $e=2{,}7182818...$ – ірраціональне число.

Друга чудова границя може бути записана також у вигляді

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

Зазначимо низку важливих фактів, пов'язаних із цією границею.

Показникову функцію e^x називають ***експоненційною***. Як буде показано далі, ця функція відіграє дуже важливу роль у вищій математиці.

Найчастіше у вищій математиці використовуються ***натуральні логарифми*** – логарифми за основою e. Для натуральних логарифмів запроваджено спеціальне позначення – $\ln N$ $(\ln N=\log_e N)$.

Друга чудова границя застосовується для обчислень границь функцій виду $\left[U(x)\right]^{V(x)}$ у разі, коли $\lim\limits_{x\to a} U(X)=1$, а $\lim\limits_{x\to a} V(x)=\infty$. Обчислення таких границь називають розкриттям невизначеностей виду (1^{∞}).

П р и к л а д и .

1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+48}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+48}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{48}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{48}=e\cdot 1=e.$$

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. Очевидно, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{1-x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$. Тому

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{1+x}{1-x}-1\right)\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+x-1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}\cdot\frac{2x}{1-x}\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right]^{\frac{2}{1-x}}=$$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1-x}}.$$

Зважаючи на те, що

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{2x}}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e\qquad\left(y=\frac{2x}{1-x}\right),$$

а також $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{1-x}=2$, отримуємо: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^2$.

3. Визначити величину A_n грошових накопичень через n років від початкового вкладу A_0 при p відсотках річних та неперервному нарахуванні відсотків.

Розв'язання. Не важко бачити, що величина A_n при нарахуванні складних відсотків (один раз наприкінці року) становитиме $A_n = A_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

$$\left(A_1 = A_0 + A_0\frac{p}{100} = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right),\right.$$

$$\left. A_2 = A_1 + A_1\frac{p}{100} = A_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,\ldots\right)$$

Якщо відсотки нараховуються рівномірно k разів на рік, то очевидно, що

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100\kappa}\right)^{n\kappa}.$$

Якщо ж відсотки нараховуються безперервно, тобто якщо $\kappa\to\infty$, то

$$A_n = \lim_{k\to\infty} A_0\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{nk} = A_0\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{\frac{100k}{p}\cdot\frac{np}{100}} =$$

$$= A_0\left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{p}{100k}\right)^{\frac{100k}{p}}\right]^{\frac{np}{100}} = A_0 e^{\frac{np}{100}}.$$

1.7. Неперервність функції

Нехай точка a належить області визначення функції $f(x)$. Функція $f(x)$ називається ***неперервною у точці*** a, якщо вона має границю в цій точці і ця границя дорівнює $f(a)$. Використовуючи визначення границі функції в точці a по Коші, неперервність функції в точці a можна визначити наступним чином.

Функція $f(x)$ називається ***неперервний у точці*** a, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, що для всіх значень аргументу x, що задовольняють умову $|x-a|<\delta$, справедлива нерівність $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Аналогічно, використовуючи означення границі функції в точці a по Гейне, можна дати визначення неперервності функції в точці a по Гейне.

Умову неперервності функції $f(x)$ у точці a можна виразити такою рівністю: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, якій можна надати (з огляду на те, що $a = \lim\limits_{x\to a} x$) таку форму: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x)$.

Умова неперервності функції $f(x)$ у точці a може бути записана наступним чином:

$$f(a-0) = f(a+0) = f(a) \qquad (8)$$

Рівності (8) часто називають ***необхідною та достатньою умовою неперервності функції в точці*** a. Якщо врахувати, що умова $x \to a$ рівносильна умові $x - a \to 0$, то умову неперервності функції в точці a можна записати так:

$$\lim_{x-a\to 0} \left[f(x) - f(a)\right] = 0.$$

Різниця $x - a$ називається приростом аргументу і позначається Δx, а різниця $f(x) - f(a)$ – приростом функції, що відповідає приросту аргументу Δx, і позначається Δy або Δf. Отже, $\Delta x = x - a$, $\Delta y = \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$.

У цих позначеннях умова неперервності в точці a запишеться у вигляді $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, тобто неперервність функції в точці означає, що нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції.

Функція, неперервна у кожній точці деякого інтервалу, називається ***неперервною на цьому інтервалі***.

Приклади.

1. Покажемо, що функція $y = x^2$ неперервна в кожній точці $x = a$ числової осі, тобто на всій числовій осі. Для цього обчислимо приріст цієї функції $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = (a + \Delta x)^2 - a^2 = 2a\Delta x + (\Delta x)^2$. Очевидно, що при будь-якому a $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, що означає неперервність функції $y = x^2$ в кожній точці числової осі.

2. Покажемо, що функція $y = \dfrac{1}{x}$ неперервна у кожній точці $x = a$, $a \neq 0$. Дійсно, $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) = \dfrac{1}{a + \Delta x} - \dfrac{1}{a} = -\dfrac{\Delta x}{a(a + \Delta x)}$, тому при $a \neq 0$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Функція $f(x)$ називається ***неперервною в точці*** a ***справа*** (***зліва***), якщо $f(a + 0) = f(a)$ $\quad (f(a - 0) = f(a))$.

Використовуючи означення правої (лівої) границі функції в точці a по Гейне та по Коші, можна сформулювати означення неперервності функції $f(x)$ в точці a справа (зліва) по Гейне та по Коші. Рекомендується зробити це самостійно.

Точки, в яких функція не має властивості неперервності, називаються ***точками розриву цієї функції***.

При цьому мається на увазі, що будь-який ε-окіл точки a містить відмінні від a точки області визначення функції.

Точки розриву функції прийнято класифікувати в такий спосіб.

Усувний розрив. Точка a називається точкою усувного розриву функції $f(x)$, якщо границя функції в точці a існує, але в самій точці a функція $f(x)$ або не визначена, або $f(a) \neq \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Іншими словами, точка a називається точкою усувного розриву функції $f(x)$, якщо $f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$ або $f(a+0) = f(a-0)$, а $f(a)$ – не визначено.

Так, наприклад, функція $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{при } x \neq 1 \\ 1 & \text{при } x = 1 \end{cases}$$

має в точці $x = 1$ усувний розрив.

Справді, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2 \neq f(1) = 1$.

Якщо функція $f(x)$ має в точці a усувний розрив, то цей розрив можна усунути, поклавши значення функції $f(x)$ у точці a рівним її граничному значенню.

Розрив першого роду. Точка a називається точкою розриву першого роду, якщо у цій точці функція $f(x)$ має скінченні, але не рівні один одному праву та ліву границі: $f(a+0) \neq f(a-0)$. Часто розрив першого роду називають стрибком.

Приклади.

1. Функція $y = \operatorname{sign} x$ у точці $x = 0$ має розрив першого роду. Дійсно, оскільки $$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0 \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

то $\operatorname{sign}(+0) = 1$, $\operatorname{sign}(-0) = -1$, отже, $\operatorname{sign}(+0) \neq \operatorname{sign}(-0)$.

2. Функцію $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{1/x}}$ визначено всюди, крім точки $x=0$. Покажемо, що в цій точці вона має розрив першого роду. Вочевидь, що при $x\to+0$ функція $2^{1/x}$, отже, і функція $1+2^{1/x}$, є нескінченно великими. Тому $f(x)$ при $x\to+0$ є нескінченно малою, тобто $f(+0)=0$. Якщо ж $x\to-0$, то функція $2^{1/x}$ є нескінченно малою і тому $f(-0)=1$.

Розрив другого роду. Точка a називається точкою розриву другого роду, якщо в цій точці функція $f(x)$ не має, принаймні, однієї з односторонніх границь, або хоча б одна з односторонніх границь нескінченна.

Приклади.

1. Функція $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ в точці $x=1$ має розрив другого роду, оскільки $f(1+0)=+\infty,\ f(1-0)=-\infty$.

2. Функція $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ в точці $x=0$ має розрив другого роду, оскільки в точці $x=0$ у неї немає ні правої, ані лівої границі. Покажіть це самостійно.

Розглянемо деякі властивості неперервних функцій.

Теорема 16. Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні в точці a, то функції $Cf(x)$ (де C – стала), $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (якщо $g(a)\neq 0$), також неперервні в точці a.

Доведення цієї теореми випливає безпосередньо із означення неперервності та властивостей границь функцій.

Наслідок. Якщо функції $f_1(x),\ f_2(x),\ ...,\ f_k(x)$ неперервні в точці a, то функції $f_1(x)\pm f_2(x)\pm ...\pm f_k(x)$ та $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot ...\cdot f_k(x)$ також неперервні в точці a.

Теорема 17. Нехай функція $y=\varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $f(y)$ неперервна в точці $y_0=\varphi(x_0)$, тоді складена функція $f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.

При відшуканні границь теорему 17 зручно використовувати у вигляді правила заміни змінної для границь неперервних функцій:

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=\lim_{y\to y_0} f(y),\quad y_0=\varphi(x_0).$$

Теорема 18. Кожна основна елементарна функція неперервна у будь-якій точці своєї області визначення.

Доведення цих теорем наводити не будемо.

Із теорем 17 та 18 випливає, що якщо $f(x)$ – основна елементарна функція, або елементарна функція (тобто функція, складена з основних елементарних функцій) і a – довільна точка її області визначення, то

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f(\lim_{x\to a} x) \qquad (9)$$

Приклади.

1. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{x+2} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)} = \sqrt{2+2} = 2.$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \cos(2x + \frac{\pi}{2}) = \cos\left[\lim\limits_{x\to 0}(2x + \frac{\pi}{2})\right] = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$

3. $\lim\limits_{x\to 1} 2^{x^2-1} = 2^{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)} = 2^0 = 1.$

4. $\lim\limits_{x\to -2} \lg(2 + 2x + x^2 - x^3) = \lg\left[\lim\limits_{x\to -2}(2 + 2x + x^2 - x^3)\right] = \lg 10 = 1.$

Перерахуємо, без доведення, основні властивості функцій, неперервних на відрізку.

Теорема 19. Неперервна на відрізку функція $y = f(x)$ обмежена на цьому відрізку, тобто існує таке додатне число A, що для всіх значень x з цього відрізка виконується $|f(x)| < A$.

Теорема 20. Неперервна на відрізку функція приймає, принаймні в одній його точці, найбільше значення і, принаймні в одній його точці – найменше.

Зауважимо, що найбільшим (найменшим) значенням функції на відрізку називається таке її значення $f(x_0)$, що для всіх точок x відрізка виконується нерівність

$$f(x_0) \geq f(x) \quad (f(x_0) \leq f(x)).$$

Теорема 21. Неперервна на відрізку функція приймає на цьому відрізку всі проміжні значення між своїми найбільшим та найменшим значеннями.

Теорема 22. Якщо функція неперервна на відрізку і на його кінцях набуває значень протилежних знаків, то існує принаймні одна точка цього відрізка, у якій функція дорівнює нулю.

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1. Похідна

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі (a, b), x – фіксована точка цього інтервалу, Δx – приріст аргументу такий, що точка $x + \Delta x$ належить інтервалу (a, b).

Вважаючи, що $\Delta x \neq 0$, розглянемо у цій фіксованій точці x відношення приросту Δy функції $y = f(x)$ до приросту аргументу Δx:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Це відношення називають ***різницевим відношенням*** (в даній точці x). Очевидно, що різницеве відношення є функцією від Δx.

Якщо існує границя різницевого відношення при $\Delta x \to 0$, то ця границя називається ***похідною функції*** $y = f(x)$ ***в даній точці*** x і позначається символом $f'(x)$. Крім позначення $f'(x)$ для похідної використовуються також такі позначення: y', $y'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ (читається: «*де ігрек по де ікс*»).

Таким чином, за означенням,

$$y' = y'(x) = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (10)$$

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в усіх точках інтервалу $(a; b)$, то ця похідна є деякою функцією аргументу x, що визначена на інтервалі $(a; b)$.

Значення похідної у точці $x = x_0$ позначають так: $f'(x_0)$ або $y'\big|_{x=x_0}$.

Знаходження похідної функції називається ***диференціюванням*** цієї ***функції***.

Якщо функція $f(x)$ в точці $x = x_0$ має похідну, то $f(x)$ називається ***диференційовною функцією*** в точці x_0. Функція, що диференціюється в кожній точці інтервалу $(a; b)$, називається ***диференційовною на інтервалі*** $(a; b)$.

Приклади. Знайти похідні функції (продиференціювати функції).

1. $f(x) = C = \text{const}$.

Очевидно, що $C' = 0$, оскільки приріст $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = 0$ для всіх x та всіх Δx.

2. $f(x) = x$.

Для цієї функції різницеве відношення дорівнює

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x}=1.$$

Отже, $x'=1$ в будь-якій точці $x\in(-\infty,\infty)$.

3. $f(x)=\sin x$.

Оскільки для цієї функції $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$, то при будь-якому $\Delta x\neq 0$ різницеве відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$.

Тому $(\sin x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right]$, звідки, враховуючи неперервність функції $\cos x$ в будь-якій точці $x\in(-\infty,+\infty)$ та першу чудову границю, отримуємо:

$$(\sin x)'=\cos x.$$

4. $f(x)=\cos x$.

Аналогічно попередньому:

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

Отже, $(\cos x)'=-\sin x$.

5. $f(x)=\log_a x$, $0<a\neq 1$, $x>0$.

У цьому випадку для будь-якого досить малого $\Delta x\neq 0$ матимемо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Тому, враховуючи неперервність $\log_a x$, $(0<a\neq 1,\ x>0)$ і другу чудову границю, отримуємо:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

Отже, $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

Зокрема, якщо $a=e$, отримуємо $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$ (для будь-якого $x>0$).

У повній аналогії з поняттям правої та лівої границі функції в даній точці вводяться поняття правої та лівої похідних функцій $y=f(x)$.

Правою (лівою) похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається права (ліва) границя різницевого відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (за умови, що ця границя існує).

Для позначення *правої* похідної функції в точці x використовують символ $f'(x+0)$. Для позначення *лівої* похідної функції в точці x використовують символ $f'(x-0)$.

Права та ліва похідні називаються ***односторонніми похідними***.

З властивостей односторонніх границь випливають такі твердження:

1) якщо функція $f(x)$ має в точці x похідну $f'(x)$, то ця функція має у точці x як праву, так і ліву похідні, причому $f'(x+0)=f'(x-0)=f'(x)$;

2) якщо функція $f(x)$ має в точці x як праву, так і ліву похідні, причому $f'(x+0)=f'(x-0)$, то функція $f(x)$ має у точці x похідну $f'(x)$, причому $f'(x)=f'(x+0)=f'(x-0)$.

На додаток до твердження 2 слід зазначити, що якщо у функції $f(x)$ існують права і ліва похідні в точці x, проте $f'(x+0)\neq f'(x-0)$, то у цієї функції немає похідної в точці x. Найпростішим прикладом такої функції може бути функція $f(x)=|x|$. Ця функція в точці $x=0$ має як ліву, так і праву похідні: $f'(-0)=-1$, $f'(+0)=1$, але не має похідної в точці $x=0$.

Теорема 23. Якщо функція $f(x)$ диференційовна у точці x, то вона в цій точці неперервна.

Доведення. Згідно з означенням похідної, маємо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'$. Тоді, за властивістю границь, маємо рівність $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x)$ прямує до нуля при $\Delta x\to 0$. З цієї рівності випливає, що $\Delta y=y'\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$. Права

частина є сума двох нескінченних малих, тому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, а це і є умовою неперервності функції $y=f(x)$ в точці x.

Доведена теорема є ***необхідною умовою диференційовності функції***.

Обернене до теореми 23 твердження є неправильним, тобто з неперервності функції $y=f(x)$ в цій точці x, взагалі кажучи, не випливає її диференційовність у цій точці. Наприклад, можна розглянути функцію $y=|x|$, яка неперервна в точці $x=0$, але, як йшлося вище, у цій точці не має похідної.

2.2. Геометричний, механічний та економічний зміст похідної

Розглянемо графік функції $y=f(x)$, яка визначена та неперервна на інтервалі (a,b) (рис. 1). Візьмемо довільну точку $x\in(a,b)$ та приріст $\Delta x\neq 0$ такий, що точка $x+\Delta x\in(a,b)$. Нехай A та B – точки графіка функції $y=f(x)$, абсциси яких відповідно дорівнюють x та $x+\Delta x$. Вочевидь, що координати точок A і B такі: $A(x,f(x))$, $B(x+\Delta x,\,f(x+\Delta x))$. Пряму, що проходить через точки A та B графіка функції, називають січною. Оскільки точка $x\in(a,b)$ довільна, але фіксована, то кут нахилу січної до осі $0x$ залежить від Δx. Позначимо його символом $\varphi(\Delta x)$.

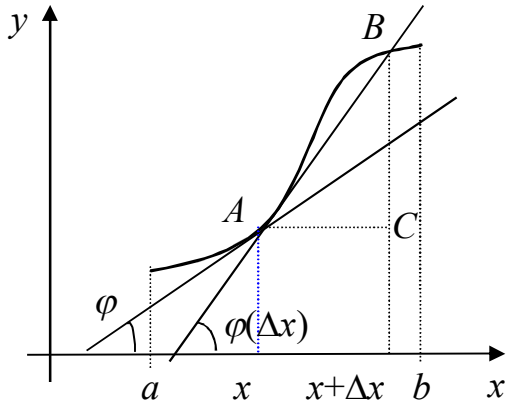


Рис. 1

Якщо існує граничне положення січної AB при прямуванні точки B графіка функції до точки A (або, що те саме, при прямуванні Δx до нуля), то це граничне положення називається ***дотичною*** до графіка функції $y=f(x)$ в точці A.

З цього означення випливає, що для існування дотичної до графіка $y=f(x)$ в точці А достатньо, щоб існувала границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\varphi$, причому зазначена границя φ дорівнюватиме куту нахилу дотичної до осі $0x$.

Неважко бачити, що якщо функція $y=f(x)$ має в даній точці x похідну, то існує дотична до графіка функції $y=f(x)$ в точці $A(x,f(x))$, причому кутовий коефіцієнт цієї дотичної (тобто тангенс кута нахилу її до осі $0x$) дорівнює похідній $f'(x)$. Дійсно (з трикутника ABC),

$$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x)=\frac{BC}{AC}=\frac{\Delta y}{\Delta x},\quad \text{звідки}\quad \varphi(\Delta x)=\operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\text{та } \lim_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{arctg}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{arctg}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\operatorname{arctg} f'(x);$$

але це і означає, що існує граничне положення січної, тобто існує дотична до графіка функції в точці $A(x, f(x))$, причому кут нахилу φ цієї дотичної до осі $0x$ дорівнює $\varphi=\operatorname{arctg} f'(x)$. Отже, кутовий коефіцієнт дотичної ($\operatorname{tg}\varphi$) дорівнює $f'(x)$.

Таким чином, якщо функція $y=f(x)$ в точці x_0 диференційовна та $f(x_0)=y_0$, то кутовим коефіцієнтом дотичної буде $k_0=f'(x_0)$, а рівнянням дотичної до кривої в точці (x_0, y_0) буде

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Приклад. Написати рівняння дотичної до кривої $y=\ln x$ в точці $x_0=1$.

Розв'язання. Визначаємо кутовий коефіцієнт дотичної:

$$\kappa_0=f'(x_0)=\frac{1}{x}\Big|_{x=1}=1.$$

Оскільки $x_0=1$, то $y_0=\ln x_0=\ln 1=0$.

Рівняння дотичної у точці (1; 0): $y=x-1$.

Зауваження. У точці $A(x_0, f(x_0))$ існує вертикальна дотична до графіка функції $y=f(x)$ тоді й тільки тоді, коли у точці x_0 функція має нескінченну похідну, причому в цьому випадку рівняння дотичної має вигляд $x=x_0$.

Розглянемо ***механічний*** зміст похідної.

Нехай $S=S(t)$ – закон руху матеріальної точки, що рухається прямолінійно; S – довжина шляху, що відраховується від деякої початкової точки A_0; t – час, за який пройдено шлях S (рис. 2). Нехай А – положення точки в момент часу t; В – в момент часу $t+\Delta t$; ΔS – відстань між точками А та В, тобто $\Delta S=S(t+\Delta t)-S(t)$. Тоді $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ – те, що в механіці називають величиною ***середньої швидкості*** руху на ділянці від А до В, а $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=V$ – величина швидкості руху в точці або, як кажуть в механіці, величина миттєвої швидкості в момент часу t, тобто $V=S'(t)$.

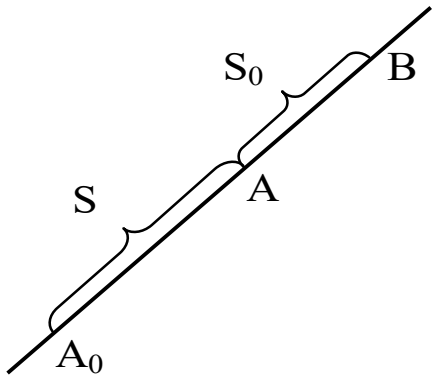


Рис. 2

Розглянемо тепер ***економічний*** зміст похідної.

Нехай функція $U = U(t)$ виражає кількість виготовленої продукції за час *t*. Тоді за період часу від *t* до $t + \Delta t$ кількість виготовленої продукції буде $\Delta U = U(t + \Delta t) - U(t)$, а середня продуктивність праці за цей період визначиться як $\frac{\Delta U}{\Delta t}$. Отже, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t)$ є продуктивністю праці на момент часу *t*.

Таким чином, похідна $U'(t)$ обсягу виготовленої продукції $U(t)$ є продуктивністю праці в момент часу *t*.

В економічних дослідженнях широко використовується поняття ***еластичності***, яке пов'язане з тим, що в економічних задачах часто зручніше обчислювати у відсотках зміну залежної змінної (функції), що відповідає зміні незалежної змінної (аргументу) на один відсоток.

Еластичністю функції $y = f(x)$ називається границя відношення відносного приросту $\frac{\Delta y}{y}$ функції *y* до відносного приросту $\frac{\Delta x}{x}$ аргументу *x* при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{x}{y} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Еластичність функції $y = f(x)$ символічно позначають так: $E_x(y)$. Таким чином, якщо $y = f(x)$ диференційовна функція, то

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Очевидно, еластичність – безрозмірна величина, значення якої не залежать від того, в яких одиницях вимірювалися величини *x* та *y*.

Еластичність функції використовується при аналізі попиту та пропозиції. Так, еластичність попиту *y* щодо ціни *x* показує наближено на скільки відсотків зміниться попит при зміні ціни на один відсоток.

2.3. Основні властивості похідної

Теорема 24. Якщо кожна з функцій $U(x)$ и $V(x)$ диференційовні в точці x, то алгебраїчна сума цих функцій $U(x) \pm V(x)$ також диференційовна в цій точці, при цьому

$$\left[U(x) \pm V(x)\right]' = U'(x) \pm V'(x).$$

Доведення. Нехай $y(x) = U(x) \pm V(x)$. Дамо аргументу приріст Δx. Тоді функції $U(x)$ і $V(x)$ отримають приріст відповідно $\Delta U = U(x + \Delta x) - U(x)$ і $\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x)$. З цих рівностей отримуємо: $U(x + \Delta x) = U(x) + \Delta U$, $V(x + \Delta x) = V(x) + \Delta V$. Тому

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \left[U(x+\Delta x) \pm V(x+\Delta x)\right] - \left[U(x) \pm V(x)\right] =$$
$$= \left[U(x) + \Delta U\right] \pm \left[V(x) + \Delta V\right] - \left[U(x) \pm V(x)\right] = \Delta U \pm \Delta V.$$

Отже, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta U}{\Delta x} \pm \dfrac{\Delta V}{\Delta x}$. Перейдемо у цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$.

Враховуючи, що

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta U}{\Delta x} \pm \frac{\Delta V}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x} = U'(x) \pm V'(x),$$

приходимо до висновку, що існує $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$ і при цьому $y'(x) = \left[U(x) \pm V(x)\right]' = U'(x) \pm V'(x)$. Теорему доведено.

Наслідок (з теореми 24). Теорема 24 справедлива для алгебраїчної суми будь-якої скінченної кількості функцій, що диференційовні в даній точці x.

Приклад. Нехай $y = x + \sin x + \ln x$, тоді $y' = 1 + \cos x + \dfrac{1}{x}$.

Теорема 25. Якщо кожна з функцій $U(x)$ и $V(x)$ диференційовна в точці x, то добуток цих функцій $U(x)\cdot V(x)$ також диференційовний в цій точці і при цьому

$$\left[U(x)\cdot V(x)\right]' = U'(x)\cdot V(x) + U(x)\cdot V'(x).$$

Доведення. Нехай $y(x) = U(x)\cdot V(x)$. Розмірковуючи, як і при доведенні попередньої теореми, матимемо:

$$\Delta y = \left[U(x) + \Delta U\right]\cdot\left[V(x) + \Delta V\right] - U(x)\cdot V(x) = V(x)\Delta U + U(x)\Delta V + \Delta U \Delta V.$$

Отже, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = V(x)\dfrac{\Delta U}{\Delta x} + U(x)\dfrac{\Delta V}{\Delta x} + \Delta U \dfrac{\Delta V}{\Delta x}$.

З диференційовності функцій $U(x)$ і $V(x)$ та властивостей границь випливає, що

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[V(x)\frac{\Delta U}{\Delta x} + U(x)\frac{\Delta V}{\Delta x} + \Delta U \frac{\Delta V}{\Delta x}\right] = V(x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x} +$$

$$+ U(x)\cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\Delta U \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x} = V(x)U'(x) + U(x)V'(x).$$

Отже, існує $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$ і при цьому

$y'(x) = U'(x)\cdot V(x) + U(x)\cdot V'(x)$. Теорему доведено.

Наслідок (з теореми 25). Якщо функція $U(x)$ диференційовна в точці x, а $C = \text{const}$, то $\left[CU(x)\right]' = CU'(x)$, тобто постійний множник можна виносити за знак похідної.

Приклад. Нехай $y = 2x\ln x$, тоді

$$y' = 2\left[(x)'\ln x + x(\ln x)'\right] = 2\left[\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right] = 2(\ln x + 1).$$

Теорема 26. Якщо кожна з функцій $U(x)$ і $V(x)$ диференційовна в даній точці x і $V(x) \neq 0$, то частка цих функцій $\dfrac{U(x)}{V(x)}$ також диференційовна в цій точці, при цьому

$$\left[\frac{U(x)}{V(x)}\right]' = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V^2(x)}.$$

Доведення. Нехай $y = \dfrac{U(x)}{V(x)}$. Тоді, аналогічно попередньому, матимемо:

$$\Delta y = \frac{U(x+\Delta x)}{V(x+\Delta x)} - \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{U(x)+\Delta U}{V(x)+\Delta V} - \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{V(x)\cdot\Delta U - U(x)\cdot\Delta V}{\left[V(x)+\Delta V\right]\cdot V(x)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{V(x)\dfrac{\Delta U}{\Delta x} - U(x)\dfrac{\Delta V}{\Delta x}}{\left[V(x)+\Delta V\right]\cdot V(x)},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V(x)\dfrac{\Delta U}{\Delta x} - U(x)\dfrac{\Delta V}{\Delta x}}{\left[V(x)+\Delta V\right]\cdot V(x)} = \frac{V(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta U}{\Delta x} - U(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta V}{\Delta x}}{V(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[V(x)+\Delta V\right]} =$$

$= \dfrac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V^2(x)}$. Отже, існує $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x)$. При цьому

$y'(x) = \dfrac{U'(x)\cdot V(x) - U(x)\cdot V'(x)}{V^2(x)}$. Теорему доведено.

Приклади.

1. Нехай $y = \text{tg}\, x$, тоді

оскільки $\text{tg}\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то за теоремою 26 матимемо:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. Нехай $y = \operatorname{ctg} x$. Тоді аналогічно попередньому маємо:

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Теорема 27. Якщо функція $U = U(x)$ диференційовна в точці x, а функція $y = f(U)$ диференційована у відповідній точці $U = U(x)$, то складена функція $y = f(U(x))$ диференційовна в точці x, причому

$$y' = f'_U(U) \cdot U'_x(x).$$

Доведення. Дамо аргументу x приріст Δx. Тоді отримаємо: $\Delta U = U(x + \Delta x) - U(x)$ і $\Delta y = f(U + \Delta U) - f(U)$. Оскільки функція $y = f(U)$ диференційовна у точці $U = U(x)$, то в цій точці $\Delta y = f'_U \Delta U + \alpha(\Delta U)\Delta U$, де $\alpha(\Delta U) \to 0$ при $\Delta U \to 0$, і тому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_U(U) \cdot \frac{\Delta U}{\Delta x} + \alpha(\Delta U)\frac{\Delta U}{\Delta x}.$$

З огляду на те, що з диференційовності функції $U = U(x)$ в точці x із умови $\Delta x \to 0$ випливає, що $\Delta U \to 0$ і $\dfrac{\Delta U}{\Delta x} \to U'_x(x)$, отримуємо:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left[f_U'(U)\cdot\frac{\Delta U}{\Delta x} + \alpha(\Delta U)\cdot\frac{\Delta U}{\Delta x}\right] = f_U'(U)\cdot U_x'(x).$$

Теорему доведено.

Зауваження. Теорема 27 переноситься на складену функцію, що є суперпозицією трьох та більшої кількості функцій. Так, зокрема, якщо $y = F[f(\varphi(x))]$, $U = \varphi(x)$ диференційовна в точці x, $z = f(U)$ – в точці $U = \varphi(x)$, а функція $y = F(z)$ – у відповідній точці $z = f(U) = f(\varphi(x))$, то

$$y'_x = F'_z(z)\cdot f'_U(U)\cdot\varphi'_x(x),$$

де $F'_z(z)$ – похідна функції $y = F(z)$ по аргументу z;

$f'_U(U)$ – похідна функції $z = f(U)$ по аргументу U;

$\varphi'_x(x)$ – похідна функції $U = \varphi(x)$ по x.

Приклад. Знайти похідну функції $y = \ln\sin x$.

Розв'язання. Запишемо функцію $y = \ln\sin x$ як $y = \ln u$, де $u = \sin x$. Тоді, згідно з теоремою 27, маємо

$$y' = (\ln u)'_u \cdot (\sin x)'_x = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

Теорема 28. Якщо у диференційовної функції $y = f(x)$ існує диференційовна обернена функція $x = \varphi(y)$, то скрізь, де $x'_y = \varphi'(y) \neq 0$, має місце рівність $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$.

Доведення. Запишемо функцію $x = \varphi(y)$ як складену функцію від x, тобто $x = \varphi(y) = \varphi(f(x))$. Продиференціюємо обидві частини рівності по x. Отримаємо $1 = \varphi'_y \cdot f'_x$, звідки $f'_x = \dfrac{1}{\varphi'_y}$ або $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$. Що й потрібно було довести.

Приклади.

1. Знайти похідну функції $y = \arcsin x$.

Розв'язання. Оберненою функцією до даної буде $x = \sin y \left(-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тому $y' = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Беремо значення кореня зі знаком плюс, тому що на інтервалі $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ $\cos y$ невід'ємний.

2. Знайти похідну функції $y = \arccos x$.

Розв'язання. Скористаємося відомою тотожністю $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$. Звідки $y = \arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$. Диференціюємо та отримуємо $y' = 0 - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, тобто $y' = (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

3. Знайти похідну функції $y = \operatorname{arctg} x$.

Розв'язання. Оберненою функцією до даної буде $x = \operatorname{tg} y$, $\left(-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}\right)$. Тому $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y$. Виразимо $\cos^2 y$ через $\operatorname{tg} y$ і замінимо $\operatorname{tg} y$ на x:

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}. \quad \text{Отже, } \left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

4. Знайти похідну функції $y = \operatorname{arcctg} x$.

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, то $y = \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, звідки $y' = (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

5. Знайти похідну функції $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$.

Розв'язання. Оберненою до функції $y = a^x$ буде $x = \log_a y$. Отже, $y' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a$. Зокрема, при $a = e$ маємо $y' = (e^x)' = e^x$.

6. Знайти похідну функції $y = x^\alpha$

Розв'язання. Представимо цю функцію у вигляді

$$y = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}$$

та продиференціюємо як складену функцію

$$y' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Зауваження. Похідні від окремих випадків останньої функції ми отримали раніше, виходячи безпосередньо з визначення похідної. А саме було показано, що

а) при $\alpha = 1$ маємо $y = x$, $y' = 1 \cdot x^{1-x} = 1 \cdot x^0 = 1$;

б) при $\alpha = \frac{1}{2}$ маємо $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$, $y' = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Розглянемо ще один вид цієї функції, що часто зустрічається: $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

У цьому випадку $y' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

2.4. Основні формули диференціювання

У прикладах попереднього параграфа було обчислено похідні основних елементарних функцій. Неважко узагальнити ці формули у разі складених функцій, тобто таких функцій, аргументом яких є інша функція $u = u(x)$.

Наприклад: якщо $y = u^\alpha$,то $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'_x$.

Наведемо основні формули диференціювання, знання яких необхідне для подальшого практичного застосування поняття похідної:

1. $y = C;\ y' = 0$.

2. $y = u^{\alpha};\ y' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$.

3. $y = a^{u};\ y' = a^{u} \cdot u' \cdot \ln a$.

4. $y = e^{u};\ y' = e^{u} \cdot u'$.

5. $y = \log_a u;\ y' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

6. $y = \ln u;\ y' = \dfrac{u'}{u}$.

7. $y = \sin u;\ y' = \cos u \cdot u'$.

8. $y = \cos u;\ y' = -\sin u \cdot u'$.

9. $y = \operatorname{tg} u;\ y' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$.

10. $y = \operatorname{ctg} u;\ y' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

11. $y = \arcsin u;\ y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

12. $y = \arccos u;\ y' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

13. $y = \operatorname{arctg} u;\ y' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

14. $y = \operatorname{arcctg} u;\ y' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

2.5. Диференціювання неявної функції

Не завжди функцію, задану неявним рівнянням $F(x; y) = 0$, можна подати у вигляді явної функції $y = f(x)$. Наприклад, рівняння $y^2 - x - \cos xy = 0$ не можна розв'язати відносно y.

Розглянемо ліву частину рівності $F(x; y) = 0$ як складену функцію від x. Диференціюючи цю рівність по x (вважаючи y функцією від x), отримаємо лінійне рівняння відносно y'. Так, у наведеному вище прикладі матимемо:

$$2y \cdot y' - 1 + \sin xy \cdot (1 \cdot y + x \cdot y') = 0.$$

Тут похідні від y^2 та від $\sin xy$ розглядалися як похідні складених функцій від x з проміжним аргументом y. Розв'язуючи отримане рівняння відносно y', отримаємо: $y' = \dfrac{1 - y\sin xy}{2y + x\sin xy}$.

2.6. Логарифмічна похідна

Нехай функція $y = f(x)$ додатна і диференційовна в точці x. Тоді і складена функція $z = \ln y$, де $y = f(x)$ по теоремі 27 також буде диференційовна в зазначеній точці. При цьому $\left[\ln f(x)\right]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ прийнято називати логарифмічною похідною функції $y = f(x)$ в точці x. Наведемо приклад використання логарифмічної похідної. Нехай $y = \left[u(x)\right]^{v(x)}$, де $u(x)$ та

$v(x)$ – диференційовні в точці x функції і $u(x)>0$. Тоді функція $z=\ln y=v(x)\cdot\ln u(x)$ буде диференційовна в точці x. Тому

$$(\ln y)'=v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)\cdot u'(x)}{u(x)}.$$

З іншого боку, $(\ln y)'=\frac{y'}{y}$. Отже,

$$\frac{y'}{y}=v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)\cdot u'(x)}{u(x)}.$$

Зважаючи на те, що $y=[u(x)]^{v(x)}$, остаточно матимемо:

$$\left([u(x)]^{v(x)}\right)'=[u(x)]^{v(x)}\left[v(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

Приклад. Знайти похідну функції $y=x^{\sin x}$.

Розв'язання. Прологарифмувавши обидві частини рівності, отримаємо $\ln y=\sin x\cdot\ln x$. Диференціюємо цю рівність як неявну функцію $\frac{1}{y}\cdot y'=\cos x\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\sin x$ і знаходимо y':

$$(x^{\sin x})'=y'=y\cdot\cos x\cdot\ln x+\frac{y}{x}\cdot\sin x=x^{\sin x}\cdot\cos x\cdot\ln x+x^{\sin x-1}\cdot\sin x.$$

2.7. Похідна функції, що задана параметрично

Нехай функція y від x задана параметрично: $x=x(t)$, $y=y(t)$, причому існують похідні x'_t та y'_t, а функція $x=x(t)$ має диференційовну обернену функцію $t=t(x)$.

Будемо розглядати функцію $y=y(t)$ як складену функцію від x з проміжним аргументом $t=t(x)$, тобто $y=y(t(x))$. Диференціюючи цю складену функцію по x, отримаємо $y'_x=y'_t\cdot t'_x$. Відповідно до теореми про похідну оберненої функцію $t'_x=\frac{1}{x'_t}$. Остаточно матимемо

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад. Знайти похідну y'_x функції $y=a(1-\cos t)$, $x=a(t-\sin t)$.

Розв'язання. Знаходимо похідні y'_t та x'_t: $y'_t=a\sin t$, $x'_t=a\cdot(1-\cos t)$, тому $y'_x=\frac{a\sin t}{a\cdot(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}$.

2.8. Похідні вищих порядків

Як зазначалося вище, похідна функції $f(x)$ є також функція від x, тобто $y' = f'(x)$. Тому ми можемо ставити питання про знаходження похідної від функції $y' = f'(x)$. Функцію $f'(x)$ називають ***першою похідною***, а похідну від неї – ***другою похідною***. Другу похідну $(y')' = \left[f'(x)\right]'$ позначають одним із наступних символів: y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ (читається: «де два ігрек по де ікс двічі»). Аналогічно, похідну від другої похідної називають ***третьою похідною*** і позначають y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ тощо. І, нарешті, ***n***-ою ***похідною*** (або ***похідною n-го порядку***) називається ***похідна*** від n - 1– ої похідної. Вона позначається символами $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$. Отже, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$. Для практичного пошуку похідної n - го порядку ми повинні знайти послідовно всі похідні від першого до n - го порядку. Однак для деяких функцій можна написати загальну формулу для похідної будь-якого порядку.

Нехай, наприклад, $f(x) = e^{kx}$, тоді $f'(x) = ke^{kx}$, $f''(x) = k^2e^{kx}$, $f'''(x) = k^3e^{kx}$, ..., $f^{(n)}(x) = k^ne^{kx}$.

Аналогічно можуть бути отримані формули n - ої похідної для функцій:

а) $f(x) = x^m$, $f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)x^{m-n}$ $(n \le m)$;

б) $f(x) = \ln x$, $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$;

в) $f(x) = a^x$, $f^{(n)}(x) = a^x(\ln a)^n$;

г) $f(x) = \sin x$, $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$;

д) $f(x) = \cos x$, $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\cdot\frac{\pi}{2})$

2.9. Диференціал функції

Відповідно до означення похідної, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. Скориставшись властивостями границь, отримаємо:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Перепишемо цю рівність у вигляді $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$. Лінійна частина (відносно Δx)

приросту функції називається ***диференціалом функції*** та позначається dy або $df(x)$.

У правій частині останньої рівності перший доданок є добуток обмеженої функції $f'(x)$ на нескінченно малу Δx, і, отже, є лінійним відносно Δx. Другий доданок є нескінченно малої більш високого порядку, ніж Δx. Дійсно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. Отже, лінійною відносно Δx частиною приросту Δy є $f'(x)\cdot\Delta x$. Тому $dy=f'(x)\cdot\Delta x$. Приріст Δx аргументу називається ***диференціалом незалежної змінної*** і позначається $dx=\Delta x$. У цих позначеннях диференціал набуває вигляду $dy=f'(x)dx$. Звідси $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$, тобто похідна функції дорівнює відношенню диференціала функції до диференціалу аргументу.

Оскільки диференціал dy відрізняється від похідної $f'(x)$ тільки множником dx, то всі основні правила і формули для знаходження диференціалів випливають з правил і формул знаходження похідної. Зокрема, справедливі такі співвідношення для диференціалів:

$$d(u\pm v)=du\pm dv,\qquad d(uv)=vdu+udv,\qquad d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

Приклади.

1. $y=\arcsin x$, $\quad dy=y'dx=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. $y=x\ln x$, $\quad dy=\left(1\cdot\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}\right)dx=(\ln x+1)dx$.

Якщо функція $y=f(u)$, де $u=\varphi(x)$, така, що існують похідні, f'_u та φ'_x, ми можемо ставити питання про знаходження диференціала складеної функції $y=f[\varphi(x)]$. Оскільки $y'_x=f'_u\cdot\varphi'_x=y'_u\cdot u'_x$, то $dy=y'_x dx=y'_u\cdot u'_x dx$. Але $u'_x dx=du$. Отже, $dy=y'_u du$, тобто форма диференціала не змінюється при заміні змінної x в функції $y=f(x)$ на іншу змінну $u=u(x)$. Ця властивість називається ***інваріантністю форми диференціала***.

Приріст та диференціал функції є еквівалентними нескінченно малими. Тому в наближених обчисленнях часто використовують наближену рівність $\Delta y\approx dy$ або $f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)dx$. Звідки

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)dx=f(x)+f'(x)\cdot\Delta x \qquad (1\ 1)$$

Ця рівність вірна з точністю до нескінченно малої вищого порядку, ніж Δx.

Приклади.

1. Обчислити наближене значення $\sin 29^\circ$.

Розв'язання. Для функції $y = \sin x$ маємо $dy = \cos x dx$. Покладемо $\Delta x = -1^\circ = -\frac{\pi}{180}$. Тоді $x = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$. За формулою (11) маємо

$$\sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ - \frac{\pi}{180}\cos 30^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}5 - 0{,}0175 \cdot 0{,}866 \approx 0{,}4848.$$

2. Нехай $y = f(x)$ – виробнича функція, що виражає обсяг виготовленої продукції за одиницю часу залежно від кількості працівників (виробничі функції, зазвичай, диференційовні). Нехай нині кількість працівників фірми дорівнює $\boldsymbol{a}$, ціна одиниці виготовленої продукції дорівнює $\boldsymbol{c}$, а $\boldsymbol{p}$ – зарплата працівника за одиницю часу. Чи доцільно фірмі найняти ще одного працівника?

Розв'язання. Очевидно, що додаткова продукція, виготовлена новим співробітником фірми за одиницю часу, дорівнюватиме $f(\boldsymbol{a}+1) - f(\boldsymbol{a}) \approx f'(\boldsymbol{a})$ (якщо кількість працівників $\boldsymbol{a}$ достатньо велика, то ця рівність буде доволі точною).

Тоді, якщо $\boldsymbol{cf'(a) > p}$, то слід найняти ще одного співробітника, оскільки він приносить фірмі більше доходу, ніж вона йому платить. Це правило має універсальний характер і називається ***золотим правилом економіки***.

2.10. Основні теореми про диференційовні функції та їх застосування

Теорема Ферма. Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому інтервалі $(a; b)$ і в точці $x_0 \in (a,b)$ набуває свого найбільшого або найменшого значення. Тоді, якщо в точці x_0 функція $f(x)$ диференційовна, то $f'(x_0) = 0$.

Доведення. Нехай для визначеності функція $f(x)$ в точці x_0 набуває найбільшого значення, тобто $f(x) \le f(x_0)$ для всіх $x \in (a,b)$. Тоді для будь-якого Δx такого, що $x_0 + \Delta x \in (a,b)$, виконується $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0$. Тому в точці x_0 різницеве відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x} \le 0$ для $\Delta x > 0$ та $\frac{\Delta f}{\Delta x} \ge 0$ для $\Delta x < 0$. Отже, якщо в точці x функція $f(x)$ диференційовна, то

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0 + 0) = f'(x_0) \le 0;$$

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0 - 0) = f'(x_0) \ge 0.$$

Це можливо лише у випадку, коли $f'(x_0)=0$. Доведення теореми у разі, коли у точці $x_0 \in (a,b)$ функція набуває найменшого значення, аналогічно. Теорему доведено.

Геометрична інтерпретація теореми Ферма полягає в тому, що якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці $x_0 \in (a,b)$ та приймає в цій точці своє найбільше чи найменше значення, то дотична до графіка функції в точці $(x_0, f(x_0))$ паралельна осі $0x$ (рис. 3).

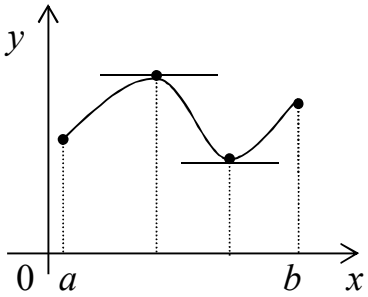


Рис. 3

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ розглядається на відрізку [*a*; *b*], то у разі, коли вона набуває найбільшого або найменшого значення на одному з кінців цього інтервалу і коли на цьому кінці, тобто в точці $x = a$ або $x = b$, існує похідна (або лише одностороння похідна), то вона, взагалі кажучи, не дорівнює нулю. Так, наприклад, функція $y = x$ на відрізку [0; 1] набуває найменшого значення в точці $x = 0$, а найбільше – у точці $x = 1$. Однак у жодній із цих точок похідна не дорівнює нулю (рис. 4).

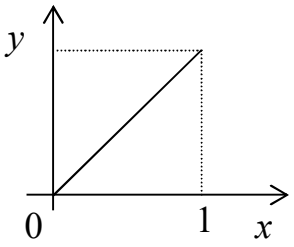


Рис. 4

Функція $y = f(x)$, визначена на інтервалі (*a*; *b*), має в точці $x_0 \in (a,b)$ ***локальний максимум (локальний мінімум)***, якщо знайдеться такий δ-окіл цієї точки, в межах якого значення $f(x_0)$ є найбільшим (найменшим) значенням функції $f(x)$.

Функція $y = f(x)$ має в точці x_0 ***локальний екстремум***, якщо ця функція має у зазначеній точці або локальний мінімум, або локальний максимум.

Наслідок теореми Ферма. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (*a*; *b*) і $x_0 \in (a,b)$ – точка її локального екстремуму. Тоді, якщо в точці x_0 функція диференційовна, то $f'(x_0)=0$.

Теорема Ролля. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку [*a, b*] і диференційовна на інтервалі (*a*; *b*). Нехай, крім того, $f(a)=f(b)$. Тоді на цьому інтервалі знайдеться така точка x_0, що $f'(x_0)=0$.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку [*a*; *b*], то ця функція досягає на ньому свого найбільшого значення *M* та свого найменшого значення *m*. Тоді для всіх $x \in [a,b]$ виконується нерівність $m \le f(x) \le M$.

Можливі два випадки:

1) $m = M$. Тоді $f(x) = m = M = \text{const}$, тому $f'(x) = 0$ у будь-якій точці інтервалу (a, b);

2) $m < M$. Із умови $f(a) = f(b)$ випливає, що хоча б одне із значень M або m приймається функцією в деякій точці x_0 інтервалу (a, b). Але тоді, за наслідком теореми Ферма, $f'(x_0) = 0$. Теорему доведено.

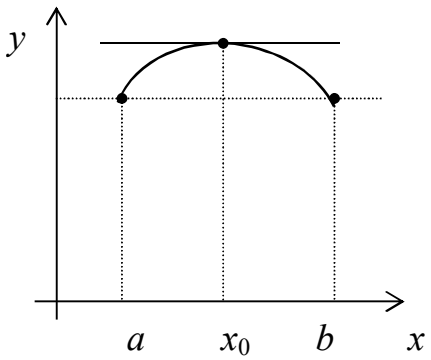


Рис. 5

Теорема Ролля має простий геометричний зміст: у графіка неперервної на відрізку та диференційовної всередині нього функції, що приймає на кінцях цього відрізка однакові значення, існує точка, в якій дотична паралельна до осі $0x$ (рис. 5). Розглянемо ще кілька теорем, доведення яких наводити не будемо.

Теорема Лагранжа. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку [a; b] і диференційовна в усіх внутрішніх точках цього відрізка. Тоді знайдеться така точка $x_0 \in (a, b)$, що

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a). \tag{12}$$

Теорема Лагранжа є узагальненням теореми Ролля.

Часто зручно записувати рівність (12) в іншому вигляді. Покладемо, $a = x$, $b - a = \Delta x$ і, отже, $b = x + \Delta x$. Тоді рівність (12) перепишеться у вигляді

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x \cdot f'(x_0), \tag{13}$$

де x_0 – деяка точка, що лежить між x та $x + \Delta x$.

Наведемо ще одну форму запису рівності (12). Нехай $\dfrac{x_0 - x}{\Delta x} = \Theta$ і $x < x_0 < x + \Delta x$, тоді $x_0 = x + \Theta \cdot \Delta x$, $0 < \Theta < 1$, і рівність (13), а значить, і рівність (12) набуде вигляду:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x \cdot f'(x + \Theta \Delta x), \ 0 < \Theta < 1. \tag{14}$$

Рівність (14) (а також рівнозначні йому рівності (12) і (13)) називаються формулою кінцевих приростів на відміну від наближеної рівності $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, яку іноді називають формулою нескінченно малих приростів.

Наслідок з теореми Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі (a; b), і при цьому для всіх $x \in (a,b)$ $f'(x) = 0$, то $f(x)$ є сталою на інтервалі (a; b).

Теорема Коші. Якщо кожна з двох функцій $f(x)$ та $g(x)$ неперервна на відрізку [a; b], диференційовна в усіх внутрішніх точках цього відрізку і $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a,b)$, то знайдеться така точка $x_0 \in (a,b)$, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Написану вище рівність називають узагальненою формулою кінцевих приростів чи формулою Коші.

Кажуть, що відношення двох функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$ є невизначеністю виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x \to a$ якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Розкрити цю невизначеність – це означає обчислити границю $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (за умови, що вона існує).

Аналогічно визначаються невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x \to a+0$ $(x \to a-0)$, при $x \to \infty$, а також при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Наступна теорема дає правило розкриття невизначеності виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ для границі в точці a.

Теорема 29 (перше правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені і диференційовні в деякому проколотому δ-околі точки a і в цьому ж δ-околі $g'(x) \neq 0$. Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Тоді, якщо існує (скінченна або нескінченна) границя $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, і при цьому

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Проколотим δ-околом точки a називається інтервал $(a-\delta,\ a+\delta)$, з якого вилучена точка a).

Зауваження. Якщо похідні $f'(x)$ і $g'(x)$ задовольняють тим самим вимогам, що і самі функції $f(x)$ та $g(x)$, то правило Лопіталя можна застосувати повторно, тобто в цьому випадку:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Приклади.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}=\dfrac{1}{6}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=$

$=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$

Вище було розглянуто питання про розкриття невизначеності виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ для випадку границі у точці a. Абсолютно аналогічні результати справедливі і для випадків границі в точці справа та зліва, границі при $x\to\infty$, а також границі при $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$.

Відношення двох визначених в околі точки a функцій $f(x)$ та $g(x)$ є невизначеністю виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ та $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$.

Для розкриття цієї невизначеності, тобто для обчислення $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, справедливе друге правило Лопіталя.

Теорема 30 (друге правило Лопіталя). Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені і диференційовні в деякому проколотому δ-околі точки a і в цьому ж δ-околі $g'(x)\neq 0$. Нехай також $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Тоді, якщо існує (скінченна або нескінченна) границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, при цьому $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Так само, як і перше, друге правило Лопіталя залишається справедливим і для випадку границі в точці справа і зліва, границі при $x\to\infty$, а також при $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$.

Крім розглянутих вище невизначеностей видів $\left(\frac{0}{0}\right)$ та $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ часто зустрічаються і невизначеності видів $(0\cdot\infty)$, $(\infty-\infty)$, (1^{∞}), (∞^{0}), (0^{0}). Всі ці невизначеності зводяться до розглянутих вище двох невизначеностей шляхом алгебраїчних перетворень.

Приклади.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{e^{x}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{e^{x}}=0.$

2. $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1/x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1/x}{-1/x^{2}}=-\lim\limits_{x\to+0}x=0.$

3. Знайдемо $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}$. Позначимо $x^{\sin x}=y$ та прологарифмуємо цю рівність; $\ln y=\sin x\ln x$.

Звідси $\lim\limits_{x\to+0}\ln y=\lim\limits_{x\to+0}\sin x\cdot\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{1/\sin x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-\dfrac{\cos x}{\sin^{2}x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^{2}x}{x\cos x}=-\lim_{x\to+0}\frac{x^{2}}{x\cos x}=-\lim_{x\to+0}\frac{x}{\cos x}=0.$$

Таким чином, використовуючи неперервність логарифмічної функції, отримуємо: $\lim\limits_{x\to+0}\ln y=\lim\limits_{x\to+0}\ln x^{\sin x}=\ln\left[\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}\right]=0$, звідки $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}=1$.

Формула Тейлора. Нехай функція $f(x)$ має у точці x_0 n похідних. Розглянемо таку задачу:

побудувати многочлен $P_n(x)$ степеня не вище n, такий, що

$$P_n(x_0)=f(x_0),\ P_n'(x_0)=f'(x_0),\ \ldots,\ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0).$$

Не важко показати, що шуканим многочленом буде (перевірте це самостійно) наступний многочлен:

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^{2}+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n}.$$

Позначимо $f(x)-P_n(x)=R_n(x)$. Тоді функція $f(x)$ може бути записана так:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^{2}+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

Таке подання функції $f(x)$ називається формулою Тейлора; многочлен $P_n(x)$ – многочлен Тейлора, а функція $R_n(x)$ – залишковим членом формули Тейлора. При $x \to x_0$ залишковий член $R_n(x)$ є нескінченно малою вищого ніж $(x-x_0)^n$ порядку.

Формула Тейлора використовується для наближеного обчислення значень функції $f(x)$ поблизу точки x_0, тобто коли $|x-x_0|$ мало.

У випадку, коли $x_0=0$ формула Тейлора набуває вигляду

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n+R_n(x)$$

і зазвичай називається ***формулою Маклорена***.

Наведемо (без доведення) одну з форм залишкового члена формули Тейлора (залишковий член у формі Лагранжа), яка справедлива у припущенні, що в околі точки x_0 функція $f(x)$ має похідну $(n+1)$-го порядку: $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$; де $c\in(x_0,x)$, якщо $x>x_0$ або $c\in(x,x_0)$, якщо $x<x_0$.

Наведемо як приклад подання за формулою Маклорена функції $f(x)=e^x$.

Оскільки для будь-якого k $f^{(k)}(x)=e^x$ і $f^{(k)}(0)=1$, то формула Маклорена має вигляд

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),$$

де $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c$ – залишковий член у формі Лагранжа; $c\in(0,x)$, якщо $x>0$ або $c\in(x,0)$, якщо $x<0$.

На будь-якому відрізку $[-r,r]$ через те, що $e^c<e^r$ отримаємо наступну оцінку для залишкового члена:

$$|R_n(x)|<\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r$$

Якщо, наприклад, потрібно наближено обчислити $e^{0,1}$, то використовуючи формулу Маклорена для функції e^x при $x = 0, 1$ матимемо:

$$e^{0,1} = 1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2!} + \frac{(0,1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(0,1)^n}{n!} + R_n(0,1)\text{і}$$

$$\left|R_n(0,1)\right| < \frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{0,1} < \frac{(0,1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^1 < \frac{3 \cdot (0,1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

тому, беручи, наприклад, $n = 2$, отримаємо:

$$e^{0,1} \approx P_2(0,1) = 1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2} = 1 + 0,1 + 0,005 = 1,105.$$

При цьому оцінка похибки $\left|e^{0,1} - P_2(0,1)\right|$, тобто $\left|R_2(0,1)\right|$ буде наступною:

$$\left|R_2(0,1)\right| < \frac{3 \cdot (0,1)^3}{3!} = 0,0005.$$

При $n = 3$ отримаємо:

$$e^{0,1} \approx P_3(0,1) = 1 + 0,1 + \frac{(0,1)^2}{2!} + \frac{(0,1)^3}{3!} \approx 1 + 0,1 + 0,005 + 0,00017 = 1,10517,$$

$$\left|R_3(0,1)\right| < \frac{3 \cdot (0,1)^4}{4!} = \frac{0,0001}{8} = 0,0000125.$$

2.11. Зростання (спадання) функції

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в околі точки x_0.

Функція $y = f(x)$ ***зростає*** в точці x_0, якщо знайдеться такий δ-окіл точки x_0, в межах якого:

$f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$, $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$

Функція $y = f(x)$ ***спадає*** в точці x_0, якщо знайдеться такий δ-окіл точки x_0, в межах якого:

$f(x) > f(x_0)$ при $x < x_0$, $f(x) < f(x_0)$ при $x > x_0$.

Теорема 31 (достатня умова зростання або спадання функції в точці). Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0 та її похідна в цій точці $f'(x_0)$ додатна (від'ємна), то функція $f(x)$ зростає (спадає) в точці x_0.

Доведення. Для визначеності розглянемо випадок, коли $f'(x_0) > 0$. Оскільки, за означенням похідної,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то на підставі означення границі функції (по Коші) для будь-кого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$ при $0 < |x - x_0| < \delta$.

Візьмемо $\varepsilon = f'(x_0) > 0$. Тоді $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < f'(x_0)$ при $0 < |x - x_0| < \delta$, або, що те саме, $0 < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 2f'(x_0)$ при $0 < |x - x_0| < \delta$.

Таким чином, всюди в проколотому δ - околі точки x_0 $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, звідки і випливає твердження теореми для випадку $f'(x_0) > 0$. Аналогічно доводиться теорема у випадку $f'(x_0) < 0$.

Зауваження. Додатність (від'ємність) похідної $f'(x)$ в точці x_0 не є необхідною умовою зростання (спадання) функції $f(x)$ в цій точці.

Так, наприклад, функція $y = x^3$ в точці $x = 0$ зростає, тоді як її похідна у цій точці дорівнює нулю.

Отже:

1) для того щоб диференційована на інтервалі $(a; b)$ функція $f(x)$ не спадала (не зростала) на цьому інтервалі, необхідно і достатньо, щоб похідна $f'(x)$ цієї функції була невід'ємна (недодатна) всюди на цьому інтервалі;

2) для того, щоб диференційовна на інтервалі $(a; b)$ функція $f(x)$ зростала (спадала) на цьому інтервалі, достатньо, щоб похідна $f'(x)$ цієї функції була додатна (від'ємна) всюди на інтервалі $(a; b)$.

Приклад. Знайти інтервали зростання та спадання функції $y = x^2 \cdot e^{2x}$.

Розв'язання. Знайдемо похідну даної функції:

$$y' = 2x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 2x \cdot e^{2x} \cdot (1 + x)$$

і прирівняємо її до нуля. Отримаємо точки

$$x = 0 \text{ та } x = -1$$

На інтервалах $(-\infty; -1)$ та $(0; +\infty)$ $y' > 0$, тому на цих інтервалах функція зростає.

На інтервалі $(-1; 0)$ $y' < 0$, тому функція спадає.

2.12. Локальний екстремум функції

Як було показано раніше (наслідок теореми Ферма), якщо x_0 – точка локального екстремуму диференційовної в цій точці функції $f(x)$, то

$f'(x_0)=0$. Точка x_0, в якій функція неперервна, але її похідна не визначена, також може бути точкою локального екстремуму.

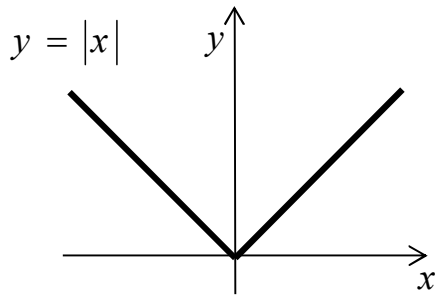


Рис. 6

Наприклад, функція $y=|x|$ в точці $x=0$ неперервна (як и всюди на числовій осі), але в цій точці не диференційовна, тим не менш, точка $x=0$ є точкою локального мінімуму цієї функції (рис. 6).

Домовимося надалі точки з області визначення неперервної функції, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називати ***критичними або підозрілими на екстремум***. Кожна така точка – це точка можливого екстремуму, оскільки, якщо у точці x_0 похідна $f'(x_0)=0$ або не визначена, це ще не означає, що x_0- точка екстремуму. Достатньо розглянути функцію $y=x^3$, у якої точка $x=0$ є критичною, але не є точкою екстремуму.

Відповісти на питання, чи є критична точка точкою екстремуму, можна лише виходячи з додаткових досліджень.

Теорема 32 (перша достатня умова локального екстремуму).

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в деякому проколотому δ-околу своєї критичної точки x_0. Тоді:

1) якщо при переході (зліва направо) через цю точку похідна змінює знак з плюса на мінус (з мінуса на плюс), то функція $f(x)$ має у точці x_0 локальний максимум (мінімум);

2) якщо ж при переході через дану критичну точку x_0 похідна $f'(x)$ не змінює знак, то у функції $f(x)$ екстремуму в точці x_0 немає.

Доведення.

1. Нехай похідна $f'(x)$ змінює знак з плюса на мінус під час переходу через точку x_0. Візьмемо довільну точку x із того δ-околу точки x_0, де функція $f(x)$ диференційована. Тоді, за теоремою Лагранжа, матимемо: $f(x_0)-f(x)=f'(c)\cdot(x_0-x)$, де $\boldsymbol{c}$ - деяка точка інтервалу з кінцями x_0 та $\boldsymbol{x}$. Оскільки лівіше точки x_0 маємо $x_0-x>0$ та $f'(c)>0$, а правіше точки x_0 $x_0-x<0$ та $f'(c)<0$, то в зазначеному δ-околі точки x_0 виконуватиметься наступна умова $f(x_0)-f(x)>0$. Це означає, що в точці x_0 функція $f(x)$ має локальний максимум.

У разі коли похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, аналогічно доводиться, що в δ-околі точки x_0 виконується умова $f(x_0)-f(x)<0$, тобто, що в точці x_0 функція $f(x)$ має локальний мінімум.

2. Нехай тепер похідна $f'(x)$ не змінює знак при переході через критичну точку x_0. Тоді $f(x_0)-f(x)=f'(c)\cdot(x-x_0)$ не зберігає знак під час переходу через точку x_0, що і доводить відсутність екстремуму у точці x_0. Теорему доведено.

Приклади.

1. Знайти точки локального екстремуму функції $y=2x^3-9x^2+12x-6$.

Розв'язання. Оскільки $y'=6x^2-18x+12=6(x^2-3x+2)=6(x-1)(x-2),$ то критичними точками функції будуть точки $x=1$ і $x=2$. При переході через точку $x=1$ похідна змінює знак із плюса на мінус, а при переході через точку $x=2$ – з мінуса на плюс. Тому $x=1$ – точка локального максимуму, а $x=2$ – точка локального мінімуму функції.

2. Знайти точки локального екстремуму функції $y=x^{2/3}$.

Розв'язання. Розглянута функція неперервна по всій числової осі і диференційовна всюди, крім точки $x=0$. При цьому $y'=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ якщо $x\neq 0$. Отже, у цієї функції тільки одна точка, підозріла на екстремум: $x=0$. Очевидно, що $y'<0$ при $x<0$ і $y'>0$ при $x>0$. Тому точка $x=0$ є точкою локального мінімуму.

3. Знайти точки локального екстремуму функції $y=x^5$.

Розв'язання. Оскільки $y'=5x^4$, то критичною точкою є $x=0$. При переході через цю точку похідна не змінює знак. Отже, функція $y=x^5$ точок локального екстремуму не має.

4. Площа, яку займає друкований текст, становить на сторінці книги 432 см^2. Ширина полів вгорі та внизу сторінки становить 2 см, а ширина бічних полів 1,5 см. Якими мають бути розміри сторінки, щоб кількість витраченого паперу була найменшою?

Розв'язання. Позначимо ширину сторінки через x, а висоту через y. Тоді площа сторінки $S=xy$. З умови задачі випливає, що $(x-3)(y-4)=432$. Звідки знаходимо: $y=\frac{4(x+105)}{x-3}$ і, отже, $S=\frac{4x(x+105)}{(x-3)}$. Досліджуємо цю функцію на екстремум. Оскільки $S'=\frac{4(x^2-6x-315)}{(x-3)^2}=\frac{4(x-21)(x+15)}{(x-3)^2}$, то отримуємо дві критичні точки: $x_1=21$ та $x_2=-15<0$, яку, виходячи зі змісту задачі, в подальшому не розглядаємо. При переході через критичну точку $x=21$ похідна S' змінює знак з мінуса на плюс. Отже, мінімальна площа сторінки буде тоді,

коли її ширина дорівнює 21см. При цьому висота сторінки $y = 28$ см, а сама площа – 588 см^2.

Теорема 33 (друга достатня умова локального екстремуму).

Нехай функція $f(x)$ має в критичній точці x_0 скінченну другу похідну. Тоді функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний максимум, якщо $f''(x_0) < 0$, і локальний мінімум, якщо $f''(x_0) > 0$.

Доведення. Нехай для визначеності $f''(x_0) < 0$. Тоді, згідно з достатньою умовою спадання функції в точці, функція $f'(x)$ спадає в точці x_0. Тому знайдеться такий окіл точки x_0, у межах якого виконується умова $f'(x) > f'(x_0)$ для $x < x_0$ та $f'(x) < f'(x_0)$ для $x > x_0$. Зважаючи на те, що $f'(x_0) = 0$, приходимо до висновку, що при переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з плюсу на мінус. Отже, згідно з першою достатньою умовою локального екстремуму, функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний максимум.

У випадку $f''(x_0) > 0$ теорема доводиться аналогічний.

Приклади.

1. Знайти точки локального екстремуму функції $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$.

Розв'язання. Критичними точками цієї функції, як уже було показано, є точки $x_1 = 1$ та $x_2 = 2$. Оскільки $y'' = 12x - 18$, то $f''(1) = -6 < 0$, $f''(2) = 6 > 0$. Тому за теоремою 33 функція, що розглядається, має локальний максимум в точці $x = 1$ і локальний мінімум в точці $x = 2$.

2. Дослідити на локальний екстремум функцію $y = x^{2/3}$ за допомогою другої достатньої умови екстремуму не можна, тому що в критичній точці $x = 0$ друга похідна $y'' = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$ не визначена.

3. Дослідити на локальний екстремум функцію $y = x^4$ за допомогою другої достатньої умови також неможливо, тому що в критичній точці $x = 0$ друга похідна $y'' = 12x^2$ перетворюється на нуль.

4. При виробництві x одиниць продукції фірма отримує $y_n = -0{,}001x^3 + 0{,}6x^2 + 150x - 1000$ грош. од. прибутку. Скільки продукції має виробляти фірма, щоб отримувати максимальний прибуток?

Розв'язання. Знайдемо критичні точки функції прибутку. Оскільки $y_n' = -0{,}003x^2 + 1{,}2x + 150$, то з умови $y_n' = 0$ випливає, що $-0{,}003x^2 + 1{,}2x + 150 = 0 \Rightarrow x_1 = 500,\ x_2 = -100$. За змістом задачі $x > 0$, тому у функції y_n є єдина критична точка $x_1 = 500$. Досліджуємо її:

$$y_n'' = -0{,}006x + 1{,}2 \Rightarrow y_n''(500) = -0{,}006 \cdot 500 + 1{,}2 = -3 + 1{,}2 = -1{,}8 < 0.$$

Значить, функція y_n в точці $x_1 = 500$ досягає максимуму, тобто фірма отримуватиме максимум прибутку, якщо вироблятиме 500 одиниць продукції. При цьому прибуток буде дорівнювати

$$y_n = -0{,}001 \cdot 500^3 + 0{,}6 \cdot 500^2 + 150 \cdot 500 - 1000 = 99000 \text{ грош. од.}$$

5. Витрати фірми під час виробництва x од. продукції складають $y_B = 0{,}02x^3 - 0{,}1x^2 + 21x + 800$ грош. од. Ринкова ціна за одиницю продукції при обсязі випуску x одиниць складає $p = 117 - 0{,}1x$ грош. од. Визначити обсяг випуску продукції, при якому фірма отримуватиме максимум прибутку. Якою буде ціна одиниці продукції?

Розв'язання. При обсязі випуску в x од. дохід фірми становитиме $y_д = p \cdot x = (117 - 0{,}1x) \cdot x = 117x - 0{,}1x^2$ грош. од., а прибуток $y_п = y_д - y_B =$

$= 117x - 0{,}1x^2 - (0{,}02x^3 - 0{,}1x^2 + 21x + 800) = -0{,}02x^3 + 96x - 800$ грош. од.

Досліджуємо на екстремум функцію прибутку: $y_n' = -0{,}06x^2 + 96 = 0 \Rightarrow x = \pm 40$. Оскільки за змістом задачі $x > 0$, отримуємо одну точку підозрілу на екстремум: $x_1 = 40$. Досліджуємо цю точку: $y_n'' = -0{,}12x$; $y_n''(40) = -0{,}12 \cdot 40 < 0 \Rightarrow x = 40$ – точка локального максимуму.

Отже, максимум прибутку фірма отримуватиме при виробництві 40 од. продукції: $y_n(40) = -0{,}02 \cdot 40^3 + 96 \cdot 40 - 800 = 1760$ грош. од.

Ціна за одиницю продукції при цьому становитиме $p(40) = 117 - 0{,}1 \cdot 40 = 113$ грош. од.

Теорема 34 (третя достатня умова локального екстремуму).

Нехай функція $f(x)$ має похідну $(2n-1)$-го порядку в околі точки x_0 і похідну $(2n)$-го порядку в точці x_0. Тоді, якщо виконані співвідношення

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(2n)}(x_0) \neq 0 \ ,$$

то функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум, причому при $f^{(2n)}(x_0) < 0$ локальний максимум, а при $f^{(2n)}(x_0) > 0$ – локальний мінімум.

Доведення цієї теореми наводити не будемо.

Приклад.

Повернемося до пошуку локального екстремуму функції $y = x^4$. Оскільки $y'(0) = y''(0) = y'''(0)$, а $y^{(4)}(0) = 24 > 0$, то, згідно з наведеною вище теоремою, у функції $y = x^4$ точка $x = 0$ є точкою локального мінімуму.

2.13. Глобальний екстремум функції

Розглянемо неперервну на відрізку $[a; b]$ функцію $y = f(x)$ і поставимо задачу знаходження її глобального максимуму та мінімуму, тобто найбільшого та найменшого значень функції на відрізку $[a; b]$. Як відомо (теорема 20), функція, неперервна на відрізку, обов'язково досягає на цьому відрізку своїх найбільшого та найменшого значень. Для визначеності зупинимося на пошуку найбільшого значення на відрізку.

Найбільше значення функції $f(x)$ може досягатися або у внутрішній точці відрізку $[a; b]$ (тоді воно збігається з одним із локальних максимумів), або на одному з кінців відрізка. Тому для пошуку найбільшого значення функції на відрізку потрібно порівняти між собою значення $f(x)$ в усіх точках локального максимуму та в кінцевих точках a та b. Максимальне з цих значень буде найбільшим значенням $f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Аналогічно знаходиться і найменше значення $f(x)$ на відрізку.

Процес знаходження найбільшого та найменшого значень можна дещо спростити, тобто просто порівняти між собою значення функції $f(x)$ в усіх критичних точках та на кінцях відрізку a та b. Очевидно, максимальне (мінімальне) з цих значень і буде найбільшим (найменшим) значенням функції на відрізку.

Може виявитися, що функція на відрізку не має критичних точок. У цьому разі функція є монотонною на цьому відрізку, і її найбільше і найменше значення досягаються на кінцях відрізку.

Приклади.

1. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \sqrt[3]{x^2}(x+1)^3$ на відрізку $[-1; 1]$.

Розв'язання. Очевидно, що функція неперервна на цьому відрізку, а $y' = \dfrac{(x+1)^2(11x+2)}{3\sqrt[3]{x}}$ не визначена в точці $x = 0$ і перетворюється на нуль в точках $x = -1$ та $x = -\dfrac{2}{11}$. Таким чином, критичними точками цієї функції будуть точки $x = -\dfrac{2}{11}$ та $x = 0$. Порівнюючи значення функції в зазначених точках і на кінцях відрізку ($f(-1) = 0$, $f\left(-\dfrac{2}{11}\right) \approx 0{,}17$, $f(0) = 0$, $f(1) = 8$), приходимо до висновку, що найбільшого значення функція досягає у точці $x = 1$ (кінець відрізку) $f(1) = 8$, а найменшого в точках $x = -1$ (кінець відрізку) і $x = 0$ (точка локального мінімуму).

2. Цукровий завод виготовляє x т цукру за місяць, а повні витрати виробництва задаються залежністю $C(x) = 1000 \cdot \sqrt{x} + 0{,}5x^2$ тис. грош. од.

Виробничі потужності заводу дозволяють виробляти не більше 80 т цукру за місяць. До того ж, завод має довгостроковий контракт на обов'язкове постачання цукру соціальним об'єктам, тому мінімальний гарантований обсяг виробництва становить 25 тонн за місяць. Скільки одиниць продукції повинен виробляти завод за місяць, щоб одержати мінімум середніх витрат AC(x)?

Розв'язання. За означенням, середні витрати (собівартість однієї тонни цукру) – це загальні витрати, поділені на обсяг виробництва x:

$$\text{AC}(x) = \frac{C(x)}{x}. \quad \text{У нашому випадку AC}(x) = \frac{1000}{\sqrt{x}} + 0{,}5x.$$

Досліджуємо цю функцію на глобальний мінімум.

$$\text{AC}'(x) = -\frac{500}{x\sqrt{x}} + 0{,}5$$

Прирівнюємо похідну до нуля, отримуємо критичну точку $x = 100$.

Єдина критична точка функції лежить поза межами досліджуваного відрізка [25; 80], тому значення в ній підраховувати не будемо. На кінцях відрізку маємо:

$\text{AC}(10) = 212{,}5$; $\text{AC}(80) \approx 151{,}8 \Rightarrow \text{AC}(80) < \text{AC}(10)$.

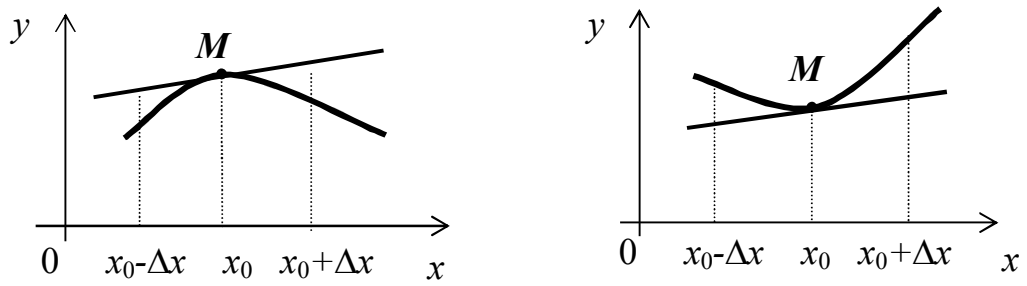
Таким чином, щоб одержати мінімум середніх витрат, завод повинен працювати на межі своїх потужностей і виробляти 80 тонн цукру за місяць**.**

2.14. Опуклість графіка функції. Точки перегину

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в будь-якій точці інтервалу (a, b). Тоді, як було встановлено раніше, існує дотична до графіка функції $y = f(x)$, що проходить через точку $\boldsymbol{M}\,(x, f(x))$ цього графіка $(a < x < b)$, причому вона не паралельна до осі $0y$.

Кажуть, що крива у точці x_0 ***опукла*** (опукла вгору), якщо знайдеться таке $\Delta x > 0$, що всі точки кривої, що відповідають значенням аргументу на інтервалі $(x_0 - \Delta x,\ x_0 + \Delta x)$, лежать під дотичною, проведеною до кривої в точці з абсцисою x_0 (рис. 7 *а*).

Якщо крива опукла у кожній точці інтервалу (*a*; *b*), тобто ордината дотичної в кожній точці інтервалу більше ординати кривої, то кажуть, що вона ***опукла на*** цьому ***інтервалі***.



а) *б*)

Рис. 7

Крива в точці x_0 називається ***угнутою*** (опуклою вниз), якщо знайдеться таке $\Delta x > 0$, що всі точки кривої, що відповідають інтервалу $(x_0 - \Delta x,\ x_0 + \Delta x)$, знаходяться над дотичною до кривої в точці з абсцисою x_0 (рис. 7 *б*).

Якщо крива угнута у кожній точці інтервалу (a; b), тобто ордината дотичної в кожній точці інтервалу менше ординати кривої, то кажуть, що вона ***угнута на*** цьому ***інтервалі***.

Для побудови графіка функції важливо знати інтервали опуклості та увігнутості.

Який же існує зв'язок між характером опуклості графіка функції та властивостями цієї функції? На це питання відповідає наступна теорема.

Теорема 35 (достатня умова опуклості). Якщо друга похідна функції $y = f(x)$ неперервна і додатна (від'ємна) на інтервалі (a; b), то на цьому інтервалі графік функції угнутий (опуклий).

Доведення теореми наводити не будемо.

Точкою перегину графіка функції називається точка на графіку неперервної функції, що відокремлює інтервал опуклості від інтервалу угнутості.

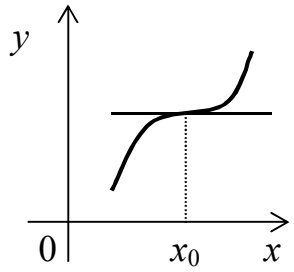


Рис. 8

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в кожній точці, то в точці перегину дотична перетинає графік так, що досить малої околиці цієї точки графік розташований по обидва боки від дотичної (рис. 8).

З'ясуємо ознаки існування точок перегину у графіка функції $y = f(x)$.

Теорема 36 (необхідна та достатня умова перегину). Графік функції $y = f(x)$, що має неперервну похідну другого порядку, має при $x = x_0$ точку перегину тоді і тільки тоді, коли $f''(x) = 0$ та при переході через x_0 друга похідна змінює знак.

Доведення. Нехай точка $x = x_0$ є точкою перегину. Тоді при $x < x_0$ та при $x > x_0$ друга похідна має різні знаки. Отже, з неперервності $f''(x)$, у точці $x = x_0$ вона обертається на нуль, тобто $f''(x_0) = 0$.

Нехай тепер $f''(x_0) = 0$. Через неперервність $f''(x)$ в околі точки x_0 вона або зберігає знак, або при переході через точку x_0 змінює його. У першому випадку характер опуклості графіка не змінюється і, отже, x_0 не є точкою перегину. У другому випадку по різні боки від точки з абсцисою x_0 графік має різний характер опуклості, отже, x_0 – точка перегину. Теорему доведено.

Зауваження. Точка перегину може бути і при $x = a$, якщо $f(x)$ в цій точці визначена, а $f''(a)$ не існує, але $f''(x)$ при переході через точку змінює знак.

Таким чином, для визначення точок перегину графіка функції $y = f(x)$ необхідно знайти другу похідну функції, розв'язати рівняння $f''(x) = 0$, а також знайти всі точки розриву функції $f''(x)$. Потім перевірити, чи змінює знак $f''(x)$ під час переходу через ці значення, і зробити відповідний висновок.

Приклади. Знайти точки перегину, інтервали опуклості та угнутості графіка функцій.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

Розв'язання. Знаходимо $f''(x)$: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, $f''(x) = 6x - 12$. Розв'язуємо рівняння $f''(x) = 0$: $6x - 12 = 0$, $x = 2$, $f(2) = 4$. Візьмемо $\Delta x = 1$. Тоді $f''(2 - \Delta x) = f''(1) = -6 < 0$, $f''(2 + \Delta x) = f''(3) = 6 > 0$.

Отже, точка з координатами (2, 4) є точкою перегину графіка функції. На інтервалі $(-\infty, 2)$ $f''(x) < 0$, тому на цьому інтервалі графік функції опуклий; на інтервалі $(2, +\infty)$ $f''(x) > 0$, тому на цьому інтервалі графік функції угнутий.

2. $f(x) = x^4 - 4x + 5$.

Розв'язання. $f'(x) = 4x^3 - 4$, $f''(x) = 12x^2$. Знаходимо корені другої похідної: $12x^2 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, $f(0) = 5$. При переході через точку $x = 0$ друга похідна не змінює знак. Отже, точка з координатами (0, 5) не є точкою перегину. На інтервалі $(-\infty, +\infty)$ друга похідна додатна, тому графік функції цьому інтервалі угнутий.

3. $f(x) = 9 \cdot \sqrt[3]{x} + 5$.

Розв'язання. $f'(x) = \dfrac{9}{3\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$, $f''(x) = -\dfrac{2 \cdot 3}{3\sqrt[3]{x^5}} = -\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^5}}$.

Друга похідна на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ ніде не дорівнює нулю, але при $x = 0$ не існує:

$$\lim_{x \to +0} f''(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -0} f''(x) = +\infty.$$

Оскільки $f''(x) > 0$ для $x < 0$, $f''(x) < 0$ для $x > 0$, $f(0) = 5$, то точка з координатами (0, 5) є точкою перегину графіка функції. На інтервалі $(-\infty, 0)$ графік угнутий, а на інтервалі $(0, +\infty)$ – опуклий.

2.15. Асимптоти графіка функції

Асимптотою графіка функції $y = f(x)$ називається пряма лінія, відстань до якої від змінної точки графіка прямує до нуля при необмеженому віддаленні точки по графіком від початку координат.

Ми розрізнятимемо ***вертикальні*** та ***похилі*** асимптоти. Легко переконатися, що пряма $x = a$ буде вертикальною асимптотою графіка функції

$y = f(x)$, якщо хоча б одна з границь $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ або $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ дорівнює $+\infty$ або $-\infty$.

Приклад. Графік функції $y = \dfrac{1}{x-2}$ має вертикальну асимптоту $x = 2$, оскільки $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$

Для з'ясування поведінки графіка функції при будь-яких великих за модулем значеннях аргументу важливу роль відіграють похилі асимптоти.

Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, якщо $f(x)$ можна записати у вигляді $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, де $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0 \right)$.

Теорема 37. Для того щоб графік функції $y = f(x)$ мав при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ похилу асимптоту $y = kx + b$, необхідно і достатньо, щоб існували границі $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ та $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$

$\left(\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k \text{ та } \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = b \right)$.

Доведення. ***Необхідність.*** Нехай графік функції $y = f(x)$ має при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ асимптоту $y = kx + b$, тобто $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ де $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0 \right)$.

Тоді $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(k + \dfrac{b}{x} + \dfrac{\alpha(x)}{x} \right) = k$,

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x \to +\infty} [b + \alpha(x)] = b$

$\left(\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(k + \dfrac{b}{x} + \dfrac{\alpha(x)}{x} \right) = k \right.$,

$\left. \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x \to -\infty} [b + \alpha(x)] = b \right)$.

Достатність . Нехай існують границі: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ та

$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k, \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - kx] = b \right)$.

Тоді з другої границі випливає, що $f(x) - kx - b = \alpha(x)$ є нескінченно малою при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$. Теорему доведено.

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції $y=\dfrac{x^2}{2-2x}$.

Розв'язання. Функція має розрив при $x=1$, причому

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{2-2x}=+\infty, \qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{2-2x}=-\infty.$$

Тому $x=1$ є рівнянням вертикальної асимптоти.

Знайдемо похилі асимптоти. Визначимо параметри рівняння асимптоти:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(2-2x)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2-2x}=-\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{2-2x}+\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{2-2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2-2x}=-\frac{1}{2}.$$

Отже, рівнянням похилої асимптоти буде $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$.

Зауваження. При $k=0$, тобто у випадку, коли рівняння похилої асимптоти має вигляд $y=b$, похилу асимптоту називають ***горизонтальною***.

2.16. Побудова графіків функцій

Вивчення функції та побудова її графіка доцільно проводити в наступному порядку.

1. Дослідження функції починають із пошуку області визначення функції.

2. Перевіряють наявність специфічних особливостей функції: парність, непарність, періодичність. Якщо функція парна $(f(-x)=f(x))$ чи непарна $(f(-x)=-f(x))$, то дослідження проводять лише для додатних значень аргументу, оскільки в першому випадку графік функції буде симетричний відносно осі $0y$, тоді як у другому – відносно початку координат. Якщо ж функція періодична $(f(x+T)=f(x))$, де T її період, то дослідження проводять для одного періоду.

3. Перевіряють наявність асимптот (вертикальних та похилих).

4. Знаходять точки перетину графіка функції з осями координат.

5. Обчислюють першу і другу похідні та знаходять точки, в яких ці похідні перетворюються на нуль або не існують (критичні точки та точки, підозрілі на перегин).

6. Вся область визначення функції розбивається на інтервали, на кожному з яких зберігається знак одночасно у $f(x)$, $f'(x)$ та $f''(x)$. (Кінцями цих інтервалів є точки розриву функцій $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ та точки, у яких ці функції перетворюються на нуль).

Заповнюється таблиця 1.

Таблиця 1

x	$(-\infty;x_1)$	x_1	$(x_1;x_2)$	x_2	…	x_{n-1}	$(x_{n-1};x_n)$	x_n	$(x_n;\infty)$
$f(x)$									
$f'(x)$									
$f''(x)$									

У стовпцях x_i записують значення $f(x)$, $f'(x)$ та $f''(x)$ в цих точках.

У стовпцях (x_i,x_{i+1}) записують знаки $f(x)$, $f'(x)$ та $f''(x)$ на цих інтервалах. Знаходять точки екстремуму та точки перегину.

7. Будують асимптоти та чудові точки (точки перетину графіка функції з осями координат, екстремальні точки та точки перегину), після чого будують ескіз графіка.

Приклад. Побудувати графік функції $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$.

1. Областю визначення функції є вся числова вісь, за виключенням точки $x=1$.

2. Графік функції симетрії не має, оскільки

$$f(-x)=-\frac{x^4}{x^3+1}\neq\pm f(x).$$

3. Пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою, оскільки

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^4}{x^3-1}=+\infty;\quad \lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^4}{x^3-1}=-\infty.$$

Для знаходження похилих асимптот обчислимо такі границі:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{(x^3-1)x}=1;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^4}{x^3-1}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^3-1}=0.$$

Отже, при $x\to\pm\infty$ графік функції має похилу асимптоту $y=x$.

4. Знаходимо нулі функції, тобто точки перетину графіка функції з віссю $0x$ (розв'язуємо рівняння $f(x)=0$). Графік функції перетинає вісь $0x$ в єдиній точці $x=0$. В цій же точці графік функції перетинає і вісь $0y$ $(f(0)=0)$.

5. Знайдемо першу похідну функції: $f'(x)=\dfrac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}$. Розв'язуємо рівняння $f'(x)=0$, отримуємо дві критичні точки $x=0$ та $x=\sqrt[3]{4}$. Похідна $f'(x)$ не визначена в точці $x=1$, але ця точка не є критичною, тому що не входить до області визначення функції.

Знайдемо другу похідну функції: $f''(x)=\dfrac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$. Розв'язуючи рівняння $f''(x)=0$, знаходимо точки можливого перегину: $x=0$ та $x=-\sqrt[3]{2}$. Друга похідна $f''(x)$ не визначена в точці $x=1$, але, як зазначалося вище, ця точка не належить області визначення функції.

6. Розбиваємо область визначення функції на інтервали та будуємо таблицю 2.

Таблиця 2

x	$(-\infty,-\sqrt[3]{2})$	$-\sqrt[3]{2}$	$(-\sqrt[3]{2},0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt[3]{4})$	$\sqrt[3]{4}$	$(\sqrt[3]{4},\infty)$
$f(x)$	–	$-\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$	–	0	–	не існує	+	$\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$	+
$f'(x)$	+		+	0	–	не існує	–	0	+
$f''(x)$	+	0	–	0	–	не існує	+		+

З таблиці видно, що:

1) функція $f(x)$ має максимум при $x=0$, причому $f(0)=0$;

2) функція $f(x)$ має мінімум при $x=\sqrt[3]{4}$, причому $f(\sqrt[3]{4})=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{4}$;

3) графік функції має перегин у точці $(-\sqrt[3]{2},\ -\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{2})$.

На інтервалі $(-\infty,-\sqrt[3]{2})$ функція від'ємна, зростає, її графік угнутий;

на інтервалі $(-\sqrt[3]{2},0)$ функція від'ємна, зростає, її графік опуклий;

на інтервалі $(0,1)$ функція від'ємна, спадає, її графік опуклий;

на інтервалі $(1,\sqrt[3]{4})$ функція додатна, спадає, її графік угнутий;

на інтервалі $(\sqrt[3]{4},\infty)$ функція додатна, зростає, та її графік угнутий.

7. Будуємо ескіз графіка (рис. 9).

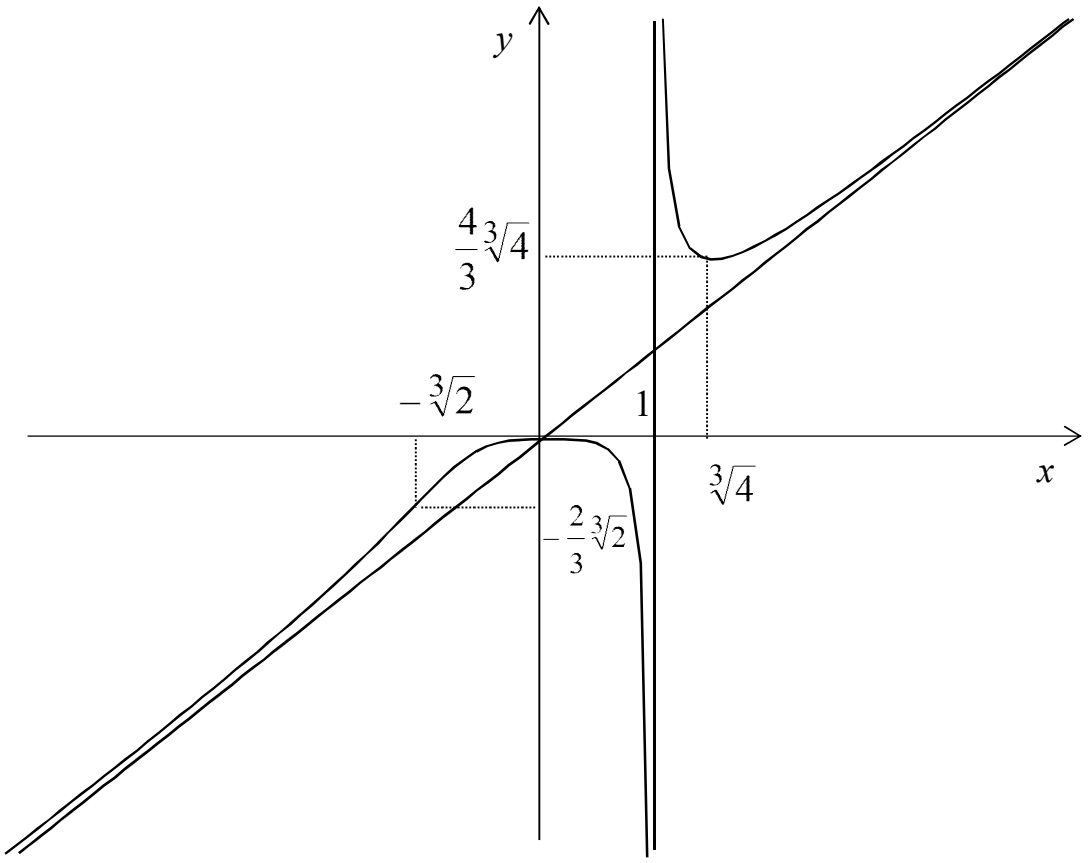


Рис. 9

3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

3.1. Поняття функції багатьох змінних

Якщо кожній парі (x, y) значення двох незалежних одна від одної змінних величин x та y з деякої області їх зміни $D \in R^2$ за певним правилом ставиться у відповідність одне і тільки одне значення змінної величини z, то кажуть, що в області D задана ***функція двох незалежних змінних*** x та y. Цю функцію позначають так: $z = f(x, y)$, $z = z(x, y)$ тощо. Змінні x та y називаються ***аргументами***, а область D – ***областю визначення функції*** z. Область визначення функції двох змінних наочно ілюструється геометрично: якщо кожну пару значень x та y зображати точкою $M(x, y)$ на площині $x0y$, то область визначення функції зобразиться у вигляді деякої множини точок площини.

Область визначення функції $z = f(x, y)$ у найпростіших випадках являє собою або частину площини, обмежену замкненою кривою (причому точки цієї кривої можуть належати або не належати області визначення), або всю площину $x0y$. Лінію, що обмежує область D, називають ***межею області***, а точки цієї лінії – ***граничними точками області*** D. Точки області D, що не є граничними, називають ***внутрішніми точками області*** D. Область, що складається з одних внутрішніх точок, називають ***відкритою***. Якщо області належать всі точки межі, то область називають ***замкненою***.

Множина, що складається з усіх чисел $f(x, y)$, де $(x, y) \in D$, називається ***множиною значень*** функції.

Оскільки кожній упорядкованій парі чисел (x, y) відповідає єдина точка площини $x0y$ і, навпаки, кожній точці M площини $x0y$ відповідає єдина пара впорядкованих чисел (x, y), то функцію двох змінних можна розглядати як функцію точки M і замість $z = f(x, y)$ писати $z = f(M)$.

Способи завдання функції двох змінних, як і у випадку однієї змінної, можуть бути різними. У прикладах використовуватиметься аналітичний спосіб завдання, коли функція задається формулою. Областю визначення функції у цьому випадку вважається множина всіх точок площини, для яких ця формула має зміст.

Розглянемо приклади функцій двох змінних.

1. $z = 1 - x^2 - y^2$. Область визначення цієї функції – вся площина $x0y$, а множина значень – проміжок $(-\infty, 1]$.

2. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Область визначення цієї функції визначається умовою $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, або $x^2 + y^2 \leq 1$. Отже, областю визначення буде круг із центром

у початку координат і радіусом, що дорівнює одиниці. Множина значень функції є інтервалом $[0,1]$.

3. $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. Область визначення цієї функції визначається умовою $1-x^2-y^2>0$, або $x^2+y^2<1$ і є множиною точок, що лежать всередині одиничного круга з центром у початку координат. Множина значень – інтервал $(1,+\infty)$.

Як відомо, функція однієї змінної зображується на площині у вигляді лінії, визначеної рівнянням $y=f(x)$, тобто графіком функції $y=f(x)$ є геометричне місце точок площини $x0y$, координати яких задовольняють рівняння $y=f(x)$. Функція двох змінних зображується у просторі як поверхня, що визначається рівнянням $z=f(x,y)$, тобто графіком функції $z=f(x,y)$ є геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють рівняння $z=f(x,y)$.

Побудова графіків функції двох змінних пов'язані із значними труднощами. Тому використовується наступний спосіб зображення функції двох змінних, заснований на перерізі поверхні $z=f(x,y)$ площинами $z=C$, де C – будь-яке число, тобто площинами паралельними площині $x0y$. Множина точок $M(x,y)$ площини $x0y$, в яких функція приймає одне й те саме значення C, тобто тих точок $M(x,y)$, для яких $f(x,y)=C$, називається ***лінією рівня*** функції $z=f(x,y)$. Очевидно, що за різних C виходять різні лінії рівня цієї функції.*

Поняття функції двох змінних легко узагальнюється у випадку будь-якої скінченної кількості змінних. Якщо кожній упорядкованій сукупності значень незалежних змінних $(x_1,x_2,...,x_n)$ із деякої області їх зміни $D\in R^n$ за певним правилом ставиться у відповідність одне і лише одне значення змінної величини u, то кажуть, що в області D задана функція n незалежних змінних $x_1,x_2,...,x_n$ і використовують наступний символічний запис: $u=f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ або $u=f(M)$.

Областю визначення функції трьох змінних $u=f(x,y,z)$ є деяка множина точок простору $0xyz$. Область визначення функції чотирьох і більшої кількості змінних не допускає простого геометричного тлумачення.

*Термін «лінії рівня» запозичений з картографії, де лінії рівня – це лінії, у яких висота точок земної поверхні над рівнем моря постійна. За ними можна будувати висновки не тільки про висоту над рівнем моря певної точки місцевості, але і про характер рельєфу, що особливо важливо, якщо місцевість гориста.

Приклад. Функція $u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ визначена при значеннях змінних, які відповідають співвідношенню $1-x^2-y^2-z^2\geq 0$, або $x^2+y^2+z^2\leq 1$. Отже, областю визначення цієї функції є множина точок одиничної кулі з центром в початку координат.

В економіці часто використовуються багатофакторні виробничі функції $u=f(x)=f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, що виражають залежність обсягу або вартості u виробленої продукції від обсягу $X=(x_1, x_2, ..., x_n)$ споживаних ресурсів. Найвідомішою виробничої функцією є функція Кобба -Дугласа: $Z=AX^{\alpha}Y^{\beta}$, де A, α та β – деякі невід'ємні числа (найчастіше $\alpha+\beta\leq 1$), X – обсяг фондів, Y – обсяг трудових ресурсів. Економісти цю функцію Кобба -Дугласа часто записують як $u=AK^{\alpha}L^{\beta}$, де K – обсяг фондів (капітал), L – обсяг трудових ресурсів.

3.2. Границя та неперервність функції багатьох змінних

Введемо спочатку поняття δ-околу точок та поняття границі послідовності точок площини.

Множина $\{M(x,y)\}$ усіх точок площини, координати яких задовольняють умову $\rho(M, M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, називається ***$\delta$-околом точки*** $M_0(x_0,y_0)$, тобто δ-окіл точки M_0 – це всі точки, що лежать усередині круга з центром у точці M_0 радіусу δ.

Розглянемо послідовність точок $M_1(x_1,y_1),\ M_2(x_2,y_2),\ ...,\ M_n(x_n,y_n),...$, яку коротко позначатимемо так: $\{M_n\}$.

Послідовність точок $\{M_n\}$ ***збігається*** до точки M_0, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер $N=N(\varepsilon)$, що для всіх $n\geq N$ виконується умова $\rho(M_n,\ M_0)<\varepsilon$. При цьому точка M_0 називається ***границею послідовності*** $\{M_n\}$ та використовується наступний символічний запис: $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=M_0$ або $M_n\to M_0$ при $n\to\infty$. Зауважимо, що з умови $\lim\limits_{n\to\infty} M_n=M_0$ випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y_0$.

Поняття границі функції двох змінних вводиться аналогічно до поняття границі функції однієї змінної.

Нехай функція $z=f(M)$ задана у деякій області D, а M_0 – внутрішня чи гранична точка цієї області.

Число b називається ***границею функції*** $z=f(M)$ ***у точці*** M_0, якщо для будь-якої послідовності точок $\{M_n\}$ $(M_n\neq M_0,\ M_n\in D)$, що збігається до точки M_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(M_n)\}$ збігається до b. При цьому використовується наступний запис:

$\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = b$ або $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = b$, або $f(M) \to b$ при $M \to M_0$.

Функція $z = f(M)$ називається ***нескінченно малою в точці*** M_0 (або при $M \to M_0$), якщо $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = 0$.

Використовуючи поняття границі функції двох змінних, можна перенести основні теореми про границю функції однієї змінної на випадок функції двох змінних. Порівняння нескінченно малих функцій двох змінних проводиться так само, як і нескінченно малих функцій однієї змінної.

Функція $z = f(M)$ називається ***неперервною у точці*** M_0, якщо у цій точці існує границя функції і ця границя дорівнює значенню функції у точці M_0, тобто $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Функція, неперервна у кожній точці деякої області, називається ***неперервною*** в цій ***області***.

Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається **точкою розриву функції** $z = f(x,y)$, якщо функція визначена в деякому проколотому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, але умова неперервності не виконується.

Часто умова неперервності функції записується в іншому вигляді. Різницю $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, де Δx та Δy – довільні числа, які називаються ***приростами аргументів***, називають ***повним приростом функції*** $z = f(M)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Функція $z = f(x,y)$ називається ***неперервною в точці*** $M_0(x_0, y_0)$, якщо її повний приріст Δz прямує до нуля, коли $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, тобто якщо

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y_0) - f(x_0, y_0)] = 0.$$

Очевидно, що ця умова еквівалентна (рівносильна) умові

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Приклад. Функція $z = x^2 + y^3$ неперервна у будь-якій точці $M(x,y)$. Дійсно, повний приріст цієї функції в точці $M(x,y)$ дорівнює

$$\Delta z = [f(x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^3] - (x^2 + y^3) =$$

$$= 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 + 3y^2 \cdot \Delta y + 3y \cdot (\Delta y)^2 + (\Delta y)^3.$$

Оскільки $\Delta z \to 0$ при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, то функція неперервна в точці $M(x,y)$.

Основні властивості неперервних функцій двох змінних аналогічні відповідним властивостям неперервних функцій однієї змінної.

Поняття границі та неперервності функції n змінних вводяться аналогічно випадку функції двох змінних.

Так, $\delta-$околом точки $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\in R^n$ називають множину точок $\{M(x_1,x_2,...,x_n)\}$, координати яких задовольняють умову $\rho(M,M_0)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^0)^2}<\delta$. Послідовність точок $\{M_m(x_1^m,...,x_n^m)\}$ називають збіжною до точки $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$, якщо для будь-кого $\varepsilon>0$ знайдеться такий номер $N=N(\varepsilon)$, що для всіх $m\geq N$ виконується умова: $\rho(M_m,\ M_0)<\varepsilon$.

Повним приростом функції $f(x_1,...,x_n)$ в точці $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ називається різниця

$$f(x_1^0+\Delta x_1,x_2^0+\Delta x_2,...,x_n^0+\Delta x_n)-f(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)=\Delta f,$$

де $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_n$ – деякі числа, що називаються приростами аргументів тощо.

3.3. Частинні похідні та диференційовність функцій багатьох змінних

Нехай функція $z=f(M)$ визначена в околі точки $M(x,y)$, тобто в деякій області, що містить точку M. Вираз $\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)$ $\left(\Delta_y z=f(x,y+\Delta y)-f(x,y)\right)$ називається ***частинним приростом функції*** за змінною x (за змінною y) в точці $M(x,y)$. При цьому передбачається, що приріст $\Delta x(\Delta y)$ такий, що точка $M_1(x+\Delta x,y)$ $(M_2(x,y+\Delta y))$ лежить в зазначеному околі точки $M(x,y)$.

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ $(\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y})$, то вона називається ***частинною похідною функції*** $z=f(M)$ в точці M за змінною x (за змінною y) і позначається одним із наступних символів: $z'_x,\ f'_x,\ \dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\left(z'_y,\ f'_y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y},\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Із означення частинних похідних випливає, що частинна похідна функції двох змінних за змінною x є звичайною похідною функції однієї змінної x за фіксованого значення змінної y; частинна похідна за змінною y – звичайною похідною функції однієї змінної y за фіксованого значення змінної x. Тому частинні похідні обчислюють за формулами та правилами обчислення похідних функцій однієї змінної.

Приклади.

1. Нехай $z = x^2 + 2xy^2 + 3y^3$, тоді $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4xy + 9y^2$.

2. Нехай $z = \sin xy^2$, тоді $\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos xy^2$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \cos xy^2$.

З`ясуємо *економічний* зміст частинних похідних на прикладі двофакторної виробничої функції $z = f(x, y)$, де z – обсяг випуску продукції у вартісному вираженні, x – обсяг фондів (кількість верстатів), y – обсяг трудових ресурсів (кількість робітників).

Попередньо зазначимо таке:

1) кількість продукції (у вартісному вираженні), що припадає на одну одиницю фондів (на один верстат), тобто $\frac{f(x, y)}{x}$, називають *середньою фондовіддачею*;

2) кількість продукції (у вартісному вираженні) вироблену одним робітником, тобто $\frac{f(x, y)}{y}$, називають *середньою продуктивністю праці*.

Якщо збільшити x (фонди) на одиницю (тобто придбати ще один верстат), то додаткова вартість виробленої продукції (тобто вартість продукції, виробленої на цьому верстаті) дорівнюватиме

$f(x + 1, y) - f(x, y) = \Delta_x f = \Delta_x z$.

З огляду на те, що $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} \approx \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$ і $\Delta x = 1$, отримуємо: $\Delta_x z \approx \frac{\partial z}{\partial x}$.

Отже, частинна похідна від виробничої функції за обсягом фондів (похідна випуску за фондами) приблизно дорівнює додаткової вартості продукції, виробленої додатковим верстатом. Тому ця частинна похідна називається ***граничною фондовіддачею***.

Якщо ж збільшити y (число робітників) на одиницю, то додаткова вартість виробленої продукції (тобто вартість продукції, виробленої цим робітником) дорівнюватиме $f(x, y + 1) - f(x, y) = \Delta_y f = \Delta_y z$.

Аналогічно попередньому отримуємо: $\Delta_y z \approx \frac{\partial z}{\partial y}$.

Отже, частинна похідна виробничої функції за обсягом трудових ресурсів (похідна випуску за працею) приблизно дорівнює додатковій вартості продукції, виробленої додатковим робітником. Тому цю частинну похідну називають ***граничною продуктивністю праці.***

Частинні похідні функції n змінних визначаються аналогічно. Нехай, наприклад, $u = x^2 + xy^2 + xyz^2$. Тоді

$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y^2 + yz^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy + xz^2$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 2xyz$.

Функція $z = f(M)$ називається ***диференційовною в точці*** $M(x, y)$, якщо її повний приріст $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ в цій точці може бути подане у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y, \qquad (15)$$

де A та B – деякі числа, що не залежать від Δx и Δy, а $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ та $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно малі при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ функції.

Так само, як і у випадку функції однієї змінної, необхідною умовою диференційовності функції в точці M є неперервність її в цій точці.

Дійсно, якщо функція $z = f(M)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$, а це означає, що функція неперервна в точці M.

Теорема 38. Якщо функція $z = f(M)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то цій точці вона має частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$, причому $\frac{\partial f}{\partial x} = A$, $\frac{\partial f}{\partial y} = B$.

Доведення. Оскільки функція $z = f(M)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то має місце співвідношення (15). Вважаючи, $\Delta y = 0$, отримаємо $\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x; 0)\Delta x$, де $\alpha(\Delta x; 0)$ – нескінченно мала при $\Delta x \to 0$. Тому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \{A + \alpha(\Delta x; 0)\} = A$.

Отже, у точці M існує частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial x}$, причому $\frac{\partial f}{\partial x} = A$.

Аналогічно доводиться, що у точці M існує частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y} = B$.

Із теореми 38 випливає, що якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то її повний приріст (15) можна подати у вигляді

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x; \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x; \Delta y)\Delta y. \qquad (16)$$

Зауваження. Якщо функція $z = f(x, y)$ в точці M має частинні похідні, то із цього ще не випливає, що вона диференційовна в цій точці.

Теорема 39 (достатня умова диференційовності).

Якщо функція $z = f(M)$ має частинні похідні в $\delta-$околі точки M і ці похідні неперервні в самій точці M, то функція диференційовна в точці M.

Доведення цієї теореми наводити не будемо.

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то вираз $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = dz$ називається ***повним диференціалом*** цієї функції, а $dx = \Delta x$ та $dy = \Delta y$ – диференціалами змінних x та y.

Порівнюючи повний приріст (16) диференційованої функції з її повним диференціалом, приходимо до висновку, що при малих Δx і Δy справедлива наближена рівність $\Delta z \approx dz$, з якої випливає, що $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + df$. Ця рівність часто використовується на практиці для наближеного обчислення значень функцій.

Нехай $z = f(x, y)$ функція двох змінних, кожна з яких, своєю чергою, є функцією незалежної змінної t: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тоді функція $z = f(x(t), y(t))$ є складеною функцією незалежної змінної t. Має місце наступна

Теорема 40. Якщо функції $x(t)$ та $y(t)$ диференційовні в точці t, а функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x(t), y(t))$, то складена функція $z = f(x(t), y(t))$ диференційовна в точці t, причому:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{17}$$

Доведення. Дамо змінній t довільний приріст Δt. Тоді функції $x(t)$ і $y(t)$ отримують прирости Δx и Δy відповідно, а функція $z = f(x, y)$, своєю чергою, повний приріст $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Оскільки функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці M, Δz можна записати як

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

де $\alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ та $\beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Розділивши обидві частини останньої рівності на Δt, отримаємо

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta(\Delta x, \Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}. \tag{18}$$

Із диференційовності функцій $x(t)$ і $y(t)$ випливає, що при $\Delta t \to 0$ має місце:

$$\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0,\ \frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt},\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt},\ \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0,\ \ \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0.$$

Тому з рівності (18) випливає, що

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Рівність (17) часто називають ***формулою повної похідної***. Якщо $z = f(x, y)$, де $y = \varphi(x)$, то $z = f(x, \varphi(x))$ – складена функція від x. У цьому випадку формула (17) набуває вигляду

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \tag{19}$$

Аналогічно вводиться поняття диференційовності функції n змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, її повного диференціалу і доводяться теореми 38 – 40. Формула (17) повної похідної в цьому випадку набуває вигляду

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}, \tag{20}$$

а повний диференціал $du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n$.

3.4. Похідна за напрямом. Градієнт

Введемо поняття похідної за напрямом. Для зручності проведемо розгляд цього питання на прикладі функції трьох змінних.

Нехай функція $u = f(M)$ визначена в околі точки M_0 простору R^3 і диференційовна в точці M_0, а M_1 – довільна точка цього околу. Проведемо через точки M_0 та M_1 пряму. За додатний напрям на цій прямій візьмемо напрям вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, тобто напрям від точки M_0 до точки M_1.

Позначимо через $\vec{l}$ напрямний вектор цієї прямої, тобто одиничний вектор, колінеарний вектору $\overrightarrow{M_0M_1}$ і співнапрямлений з ним. Для будь-якої точки M на цій прямій позначимо через $\overrightarrow{M_0M}$ орієнтовану довжину відрізка з початком в точці M_0 та кінцем в точці M, тобто довжину відрізка зі знаком плюс, якщо вектор $\overrightarrow{M_0M}$ має той самий напрям, що і вектор $\vec{l}$, і зі знаком мінус – в іншому випадку. Нехай тепер точка M прямує до точки M_0, залишаючись на прямій.

Границя $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$, якщо вона існує, називається ***похідною функції*** $u = f(M)$ в точці M_0 ***за напрямом*** вектора $\vec{l}$ та позначається символом $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)$ або $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$, тобто.

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial f}{\partial l}(M_0) = \lim_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}.$$

Нехай (x_0, y_0, z_0) – координати точки M_0, (x, y, z)– координати точки M, а α, β, γ – кути, утворені вектором $\overrightarrow{M_0M}$ (отже, і вектором $\vec{l}$) з осями координат (відповідно з $0x$, $0y$ і $0z$). З курсу лінійної алгебри відомо, що вектор $\vec{l}$ у координатній формі можна подати у вигляді $\vec{l} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$. А координати будь-якої точки $M(x, y, z)$, що належить прямій, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ за напрямом вектора $\vec{l}$, можна подати у вигляді

$$x = x_0 + t\cos\alpha,\quad y = y_0 + t\cos\beta,\quad z = z_0 + t\cos\gamma. \tag{21}$$

Тому на зазначеній прямій функція $u = f(x,y,z)$ є складеною функцією однієї незалежної змінної t, а саме:

$$f(x, y, z) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\cos\beta, z_0 + t\cos\gamma).$$

Очевидно, що похідна цієї функції за t (якщо вона існує) при $t = 0$ і є похідною функції $u = f(x, y, z)$ в точці M_0 за напрямом вектора $\vec{l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}. \tag{22}$$

Беручи до уваги, що згідно з формулою повної похідної

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

де в силу (21) $\quad \dfrac{dx}{dt} = \cos\alpha,\ \dfrac{dy}{dt} = \cos\beta,\ \dfrac{dz}{dt} = \cos\gamma,$

з (22) отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma. \tag{2 3}$$

Ця формула і використовується на практиці для обчислень похідної за напрямом.

Приклади.

1. Знайти похідну функції $u = x^2y + yz$ в точці $M_0(1, 2, -1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Розв'язання. Оскільки довжина вектора $\vec{l}$ дорівнює одиниці, то $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Частинні похідні $\frac{du}{dx} = 2xy$, $\frac{du}{dy} = x^2 + z$,

$\frac{du}{dz} = y$ в точці $M_0(1, 2, -1)$ відповідно дорівнюють $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 4$, $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = 2$.

Тому $$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2. Знайти похідну функції $u = x^2 y^3$ в точці $M_0(1, 2)$ за напрямом вектора $\vec{a} = (1, 1)$.

Розв'язання. Як відомо, у випадку функції двох змінних одиничний вектор $\vec{l}$, що визначає напрям вектора $\overrightarrow{M_0M}$, має координати $\cos\alpha$ та $\sin\alpha$, де α – кут, утворений вектором $\overrightarrow{M_0M}$ з віссю $0x$. Тому в даному випадку формула (23) набуде вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\sin\alpha.$$

Оскільки одиничний вектор $\vec{l}$ за напрямом вектора $\vec{a}$ має вигляд $\vec{l} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, то $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Враховуючи, що

$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 16$, $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 12$, отримаємо

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{16}{\sqrt{2}} + \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{28}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}.$$

Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називається вектор, координати якого відповідно дорівнюють $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)$, $\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)$.

Для позначення градієнта функції u зазвичай використовують символ $\operatorname{grad} u$.

Отже, за означенням,

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\right). \qquad (24)$$

За допомогою градієнта формула (23) для похідної функції $u = f(x, y, z)$ за напрямком вектора $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ може бути записана у вигляді скалярного добутку векторів $\vec{l}$ та $\operatorname{grad} u$:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \left(\vec{l}, \operatorname{grad} u\right) \tag{25}$$

Звідси, оскільки $\vec{l}$ – одиничний вектор $(l = 1)$, отримуємо:

$\frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u| l \cos\varphi = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi$,

де $|\operatorname{grad} u|$ – довжина вектора $\operatorname{grad} u$, – довжина вектора $\vec{l}$, а φ – кут між векторами $\vec{l}$ та $\operatorname{grad} u$. Із останньої формули видно, що якщо у даній точці $|\operatorname{grad} u| \neq 0$, то похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ диференційовної функції за напрямом $\vec{l}$ досягає найбільшого значення в ***єдиному*** напрямі, за якого $\cos\varphi = 1$, тобто у напрямі градієнта. Таким чином, градієнт указує напрям найшвидшого зростання функції у точці M_0.

Аналогічно визначається похідна за напрямом та градієнт для диференційовної в точці $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ функції n змінних $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Для такої функції похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ в даній точці $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ за напрямом, визначеним одиничним вектором $\vec{l} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, ..., \cos\alpha_n)$, вводиться як звичайна похідна змінної t складеної функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, де $x_i = x_i^0 + t\cos\alpha_i$, $i = \overline{1,n}$, взята в точці $t = 0$. Тому формула (23) для функції n змінних набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\cos\alpha_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0)\cos\alpha_n. \tag{26}$$

Градієнтом функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ називається вектор, координати якого $\frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)$, $i = \overline{1,n}$. Тому формула (24) для функції n змінних набуває вигляду

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0),\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0),\ ...,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0)\right). \tag{27}$$

Легко бачити, що формула (25) залишається справедливою і для випадку функції n змінних. Тому так само, як і у випадку функції трьох змінних, похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ функції n змінних за напрямом $\vec{l}$ досягає найбільшого значення в напрямі градієнта.

3.5. Частинні похідні вищих порядків

Припустимо, що у функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, визначеної в області D, в кожній точці цієї області існує частинна похідна $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. Очевидно, що ця частинна похідна теж є деякою функцією n змінних. Якщо ця функція $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ в деякій точці M області D має частинну похідну за аргументом x_j, то цю частинну похідну x_j називають другою частинною похідною, або частинною похідною другого порядку функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в точці M спочатку за аргументом x_i, а потім за аргументом x_j і позначають одним з наступних символів:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i},\ u''_{x_i x_j},\ f''_{x_i x_j},\ u^{(2)}_{x_i x_j},\ u_{x_i x_j}.$$

При цьому, якщо $i \neq j$, то частинна похідна $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ називається ***мішаною частинною похідною*** другого порядку.

Зауважимо (без доведення), що у випадку неперервності мішаних похідних $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ та $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ має місце рівність

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}.$$

У випадку функції двох змінних $z = f(x, y)$ частинними похідними другого порядку є:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Після того, як введено поняття другої похідної, можна послідовно ввести поняття третьої частинної похідної, потім – четвертої тощо.

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку функції $u = x^y$.

Розв'язання. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}$, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^y \ln x$;

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x^{y-1}(1 + y \ln x)$;

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1 + y \ln x)$, $\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x$.

3.6. Необхідна умова локального екстремуму функції багатьох змінних

Нехай функція $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ визначена в околі точки $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$.

Функція $u = f(M)$ має в точці M_0 ***локальний максимум (мінімум)***, якщо знайдеться такий δ-окіл точки M_0, у межах якого значення $f(M_0)$ є найбільшим (найменшим) серед усіх значень $f(M)$ цієї функції.

Таким чином, точка M_0 локального максимуму (мінімуму) характеризується тим, що в деякому околі цієї точки

$\Delta f = f(M) - f(M_0) < 0 \quad (\Delta f = f(M) - f(M_0) > 0)$,

де M – будь-яка точка із зазначеного околу, відмінна від точки M_0.

Функція $u = f(M)$ має в точці M_0 ***локальний екстремум***, якщо вона має в цій точці або локальний максимум, або локальний мінімум.

Теорема 41 (необхідна умова екстремуму). Якщо функція $u = f(M) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має в точці $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ частинні похідні першого порядку за всіма змінними x_i $(i = \overline{1,n})$, і має у цій точці локальний екстремум, то всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0) = 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Доведення. Доведемо справедливість твердження теореми для $i = 1$. Нехай функція $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ задовольняє умову теореми. Розглянемо функцію однієї змінної $u_1 = u_1(x_1) = f(x_1, x_2^0, ..., x_n^0)$.

Очевидно, що функція $u_1(x_1)$ диференційовна в точці x_1^0 і має в цій точці локальний екстремум.

Тому за теоремою Ферма $\left.\frac{du_1}{dx_i}\right|_{x_1 = x_1^0} = 0$. Зважаючи на те, що $\left.\frac{du_1}{dx_i}\right|_{x_1 = x_1^0} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(M_0)$, переконуємося у справедливості теореми для $i = 1$.

Для $i = \overline{2,n}$ твердження теореми доводять аналогічно.

Приклад. Знайти точки локального екстремуму функції $u = x^2 + y^2 + z^2 + 1$.

Розв'язання. Очевидно, що в точці $M_0(0,0,0)$ усі частинні похідні цієї функції дорівнюють нулю. У цій точці $u=1$, у всіх інших точках $u>1$. Тому точка M_0 є точкою локального мінімуму.

Зауваження. Обернення на нуль в деякій точці M_0 усіх частинних похідних першого порядку функції $f(M)$ є лише необхідною умовою локального екстремуму цієї функції у точці M_0.

Так, у функції $u=xyz$ в точці $M_0(0,0,0)$ усі частинні похідні дорівнюють нулю. В той самий час у цій точці функція $u=xyz$ не має екстремуму, оскільки в самій точці $M_0(0,0,0)$ функція дорівнює нулю, а в як завгодно малому околі цієї точки вона приймає як додатні, так і від'ємні значення.

Точки, в яких перетворюються на нуль всі частинні похідні першого порядку функції $u=f(M)$, називаються ***стаціонарними*** точками цієї функції.

В кожній стаціонарній точці функції $u=f(M)$ можливий локальний екстремум, проте наявність цього екстремуму можна встановити лише за допомогою достатніх умов локального екстремуму.

3.7. Достатні умови локального екстремуму функції двох змінних

Теорема 42. Якщо функція $u=f(x,y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку в околі стаціонарної точки $M_0(x_0,y_0)$, тоді, якщо в цій точці $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2>0$, то M_0 – точка локального екстремуму функції $u=f(x,y)$ (максимум при $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}<0$ і мінімум при $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0$).

Якщо ж у цій точці $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2<0$, то функція $u=f(x,y)$ не має локального екстремуму в точці M_0.

Доведення цієї теореми наводити не будемо.

Зауваження. Значення других похідних у стаціонарній точці $M_0(x_0,y_0)$ зазвичай позначають так:

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(M_0)=A$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(M_0)=B$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(M_0)=C$, при цьому вираз $D=AC-B^2$ називають дискримінантом.

Приклади.

1. Знайти точки локального екстремуму функції $u = x^3 + y^3 + 3xy$.

Розв'язання. Стаціонарні точки функції знаходять із умови

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$.

Розв'язав систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$, знаходимо дві стаціонарні точки $M_1(1,1)$ та $M_2(0,0)$.

Оскільки $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y$, то в точці $M_1(1,1)$ матимемо: $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$ і $D = AC - B^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$. Отже, у цій точці, згідно з теоремою 42, функція має локальний мінімум $(u(M_1) = -1)$.

У точці $M_2(0,0)$ маємо $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$ та $D = AC - B^2 = 0 - (-3)^2 = -9 < 0$. Отже, згідно з тією ж теоремою 42, ця точка не є точкою екстремуму.

2. Фірма виробляє два види продукції, які продає за ціною 150 та 200 гривень за одиницю відповідно. При виробництві x одиниць продукції першого виду та y одиниць другого, витрати фірми становлять $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 50$ гривень на день. Потрібно визначити обсяги добового випуску продукції, які забезпечать фірмі максимум прибутку.

Розв'язання. При випуску x одиниць першого та y одиниць другого виду продукції дохід фірми становитиме $150x + 200y$ гривень на день, а прибуток (дохід мінус витрати):

$$150x + 200y - \left(x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 50\right) \text{ гривень.}$$

Отже, задача зводиться до пошуку максимуму функції

$$z = 150x + 200y - \left(x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 50\right).$$

Знаходимо стаціонарні точки: $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 150 - 2x - 2y - 2 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 200 - 2x - 6y - 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 62, \\ y = 12. \end{cases}$

Функція має єдину стаціонарну точку $M(62,12)$. Оскільки у цій точці $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2$, $C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6$

і $D = AC - B^2 = (-2)\cdot(-3) - (-2)^2 = 12 - 4 = 8 > 0$, то це точка локального максимуму.

Таким чином, фірма отримуватиме максимум прибутку, якщо за один день вироблятиме 65 од. продукції першого виду та 12 од. другого. Прибуток фірми при цьому становитиме

$$z(M) = 150\cdot 62 + 200\cdot 12 - (62^2 + 2\cdot 62\cdot 12 + 3\cdot 12^2 + 2\cdot 62 + 4\cdot 12 + 50) =$$
$$= 5714 \text{ гривень на день.}$$

3.8. Умовний екстремум

При знаходженні локальних екстремумів передбачалося, що аргументи $x_1, x_2, ..., x_n$ функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ не пов'язані ніякими додатковими умовами. Однак часто зустрічаються задачі про пошук екстремумів функції, аргументи якої пов'язані деякими співвідношеннями (задовольняють додаткові умови зв'язку). Такі екстремуми називають ***умовними***.

Нехай, наприклад, необхідно знайти екстремум функції $u = f(x, y)$ за умови, що її аргументи пов'язані співвідношенням $\varphi(x, y) = 0$. Таким чином, потрібно шукати екстремуми функції $u = f(x, y)$ не в усій області її визначення, а лише в тих точках області визначення, координати яких задовольняють рівняння $\varphi(x, y) = 0$, тобто в точках області визначення, що належать кривій $\varphi(x, y) = 0$. Якщо з рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ вдається виразити y як функцію від x ($y = y(x)$) або x як функцію від y ($x = x(y)$), то задача зводиться до пошуку безумовного екстремуму функції $u = f_1(x) = f(x, y(x))$ або $u = f_2(y) = f(x(y), y)$.

Приклад. Дослідити на умовний екстремум функцію $u = f(x, y) = x^2 - 2y^2$, якщо $y = 2x$.

Розв'язання. Очевидно, що $u = f_1(x) = f(x, 2x) = -7x^2$, тобто при виконанні рівняння зв'язку функція, що розглядається, є функцією однієї змінної, яка, як легко бачити, досягає максимуму при $x = 0$. Значенню $x = 0$ рівняння зв'язку відповідає значення $y = 0$. Тому функція $u = x^2 - 2y^2$ за умови зв'язку $y = 2x$ має у точці (0, 0) умовний максимум.

Зауважимо, що сама функція $u = x^2 - 2y^2$ не має ні мінімуму, ні максимуму в жодній точці площини $0xy$. Таким чином, розглянутий приклад показує, що функція може не мати екстремуму, але за певних умов зв'язку мати умовний екстремум.

Зауважимо також, що у загальному випадку розв'язати рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ відносно y (чи x) не завжди можливо. Проте, виявляється, що поставлену задачу можна розв'язати, не розв'язуючи рівняння $\varphi(x, y) = 0$.

Дійсно, за тих значень x, за яких функція u може мати екстремум, похідна від u за x має обертатися на нуль. Тому, пам'ятаючи, що y є функцією від x, і використовуючи формулу повної похідної (19), в точках екстремуму матимемо:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{28}$$

Аналогічно, диференціюючи рівність $\varphi(x, y) = 0$ за x, отримаємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{29}$$

Зауважимо, що ця рівність виконується за всіх x та y, що задовольняють рівняння $\varphi(x, y) = 0$. Помножимо рівність (29) на невизначений поки коефіцієнт λ і додамо до (28). Отримаємо

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad \text{або}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{30}$$

Ця рівність виконується за всіх λ в усіх точках умовного екстремуму. Виберемо тепер λ так, щоб $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. Тоді рівність (30) набуде вигляду $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$. Таким чином, в точках екстремуму виконуватимуться такі умови:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{31}$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо координати x та y точок можливого умовного екстремуму. З (31) видно, що для розв'язання поставленої задачі немає необхідності розв'язувати рівняння $\varphi(x, y) = 0$ відносно y.

Рівняння (31) є необхідними (але не достатніми) умовами умовного екстремуму.

На закінчення відзначимо, що ліві частини рівнянь (31) є не що інше, як частинні похідні за x, y і λ функції

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \tag{32}$$

яку називають ***функцією Лагранжа***.

Таким чином, щоб знайти точки можливого умовного екстремуму, необхідно:

1) скласти допоміжну функцію $L(x, y, \lambda)$;

2) прирівняти до нуля всі її частинні похідні;

3) розв'язати отриману систему рівнянь.

Цей метод (метод множників Лагранжа) поширюється на дослідження умовного екстремуму функції будь-якого числа змінних.

Приклади.

1. Знайти найменше значення функції $z = x^2 + y^2$ за умови, що $x + y - 1 = 0$.

Розв'язання. Складемо функцію Лагранжа

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Прирівняємо до нуля всі її похідні:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь. Отримаємо $x = y = \dfrac{1}{2}$ і, отже, $z = \dfrac{1}{2}$. Легко переконатися, що $z = \dfrac{1}{2}$ є найменшим значенням функції $z = x^2 + y^2$ за умови, що $x + y - 1 = 0$.

2. Фірма виробляє два види продукції, які продає за ціною 150 та 200 гривень за одиницю відповідно. При виробництві *x* одиниць продукції першого виду та *y* одиниць другого витрати фірми становлять $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 50$ гривень на день. Фірмі встановлено квоту денного сумарного випуску продукції 50 одиниць.

Потрібно визначити обсяги добового випуску кожного виду продукції, які забезпечать фірмі максимум прибутку.

Розв'язання. Розглянута задача відрізняється від прикладу 2 із 4.7. тим, що тепер потрібно шукати максимум функції

$z = 150x + 200y - \left(x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 50\right)$ за умови, що $x + y = 50$.

Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 150x + 200y - \left(x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 4y + 50\right) + \lambda(x + y - 50)$$

і знайдемо точки можливого умовного екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 150 - 2x - 2y - 2 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 200 - 2x - 6y - 4 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 50 = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 38, \\ y = 12. \end{cases}$$

Неважко переконатися, що точка M(38, 12) є точкою умовного максимуму.

Отже, фірма при встановленій квоті отримуватиме максимум прибутку, якщо вироблятиме на день 38 од. першого та 12 од. другого виду продукції. При цьому прибуток фірми складатиме

$$150 \cdot 38 + 200 \cdot 12 - (38^2 + 2 \cdot 38 \cdot 12 + 3 \cdot 12^2 + 2 \cdot 38 + 4 \cdot 12 + 50) =$$

$= 5138$ гривень на день.

3.9. Глобальний екстремум функції в обмеженій замкненій області

Глобальним екстремумом функції $f(M)$ називається її найбільше та найменше значення. Відомо, що функція, неперервна в замкненій обмеженій області, досягає в цій області свого найбільшого та найменшого значення. Очевидно, що свого найбільшого (найменшого) значення функція може досягати або всередині області, тоді це буде найбільший (найменший) із локальних максимумів (мінімумів), або на межі області, тоді це буде найбільший (найменший) з умовних максимумів (мінімумів). Отже, знаходження найбільшого (найменшого) значення функції, неперервної в обмеженій замкненій області, можна виконати таким чином. Спочатку знаходять точки можливого локального та умовного екстремуму. Потім у всіх цих точках обчислюють значення функції. Найбільше з обчислених значень буде максимумом функції в даній області, найменше – мінімумом.

Приклади.

1. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + y^2 + 1$ в області, що визначається умовою $(x-2)^2 + (y+1)^2 \le 20$.

Розв'язання. Знайдемо точки можливого локального екстремуму. Оскільки $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$ єдиною точкою можливого локального екстремуму буде точка $M_0(0, 0)$, яка, очевидно, належить області.

Знайдемо точки можливого умовного екстремуму. Оскільки межа області визначається рівнянням $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 20$, то функція Лагранжа буде такою:

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+1+\lambda[(x-2)^2+(y+1)^2-20)],$$

а точки можливого умовного екстремуму будуть розв'язками системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda(x-2)=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda(y+1)=0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=(x-2)^2+(y+1)^2-20=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\lambda x-2\lambda=0, \\ y+\lambda y+\lambda=0, \\ (x-2)^2+(y+1)^2=20. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(1+\lambda)=2\lambda, \\ y(1+\lambda)=-\lambda, \\ (x-2)^2+(y+1)^2=20. \end{cases}$$

З перших двох рівнянь (розділивши перше на друге) отримуємо $\dfrac{x}{y}=-2$, або $x=-2y$. Підставляючи отримане співвідношення у третє рівняння, отримаємо:

$$(2y+2)^2+(y+1)^2=20 \;\Rightarrow\; 4y^2+8y+4+y^2+2y+1=20 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 5y^2+10y-15=0 \;\Rightarrow\; y^2+2y-3=0 \;\Rightarrow\; y_1=1,\; y_2=-3.$$

Отже, точками можливого умовного екстремуму будуть $M_1(-2,1)$ та $M_2(6,-3)$. Обчислюємо значення функції в точках M_0, M_1 та M_2:

$$z(M_0)=1,\; z(M_1)=6,\; z(M_2)=46.$$

Отже, найбільше значення функції досягається на межі області у точці $M_2(6,-3)$, а найменше – усередині області у точці $M_0(0,0)$.

2. Виробничі потужності фірми, що виробляє два види продукції, дозволяють за день виготовляти в сукупності не більше 90 одиниць продукції. При виробництві x одиниць продукції першого виду та y одиниць другого фірма несе витрати на $3xy+10x+10y+500$ гривень. При цьому ринкові ціни на її продукцію становлять $p_1=210-3x+y$ та $p_2=120+x-2y$ гривень відповідно.

Потрібно визначити оптимальний (що приносить максимум прибутку) план випуску кожного виду продукції та ціни, за якими буде реалізовуватися продукція.

Розв'язання. Прибуток, що одержує фірма під час виробництва x од. продукції першого виду та y од. другого дорівнюватиме

$$(210-3x+y)x+(120+x-2y)y-(3xy+10x+10y+500)=$$
$$=200x+110y-3x^2-2y^2-xy-500.$$

Отже, потрібно шукати найбільше значення функції

$z = 200x + 110y - 3x^2 - 2y^2 - xy - 500$, за умови, що $x + y \le 90$.

Знайдемо точки можливого локального екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 200 - 6x - y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 110 - 4y - x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30, \\ y = 20. \end{cases} \Rightarrow M_1(30, 20).$$

Складемо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 200x + 110y - 3x^2 - 2y^2 - xy - 500 + \lambda(x + y - 90)$$

і знайдемо точки можливого умовного екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 200 - 6x - y + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 110 - 4y - x + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 90 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 90 - 5x + 3y = 0, \\ x + y - 90 = 0. \end{cases} \Rightarrow x = y = 45;\ M_2(45, 45).$$

Обчислимо значення функції z в точках $M_1(30, 20)$ та $M_2(45, 45)$:

$z(M_1) = 200 \cdot 30 + 110 \cdot 20 - 3 \cdot 30^2 - 2 \cdot 20^2 - 30 \cdot 20 - 500 = 3600$,

$z(M_2) = 200 \cdot 45 + 110 \cdot 45 - 3 \cdot 45^2 - 2 \cdot 45^2 - 45 \cdot 45 - 500 = 1300$.

Отже, максимум прибутку (3600 грн.) фірма отримає, виробляючи за день 30 од. продукції першого виду та 20 од. другого. При цьому ціни за одиницю продукції будуть такими:

$p_1 = 210 - 3 \cdot 20 + 20 = 140$ гривень,

$p_2 = 120 + 30 - 2 \cdot 20 = 110$ гривень.

3.10. Побудова емпіричних формул методом найменших квадратів

На практиці часто залежність між змінними величинами виражають у вигляді таблиці, отриманої дослідним шляхом. Це можуть бути результати експерименту, дані спостережень або вимірювань тощо. Потрібно виразити цю залежність аналітично, тобто подати формулу, що пов'язує між собою відповідні значення змінних.

Формули, які слугують для аналітичного подання дослідних даних, прийнято називати ***емпіричними формулами*** (функціями).

Необхідно мати на увазі, що добір емпіричних формул за даними результатів спостережень не може ставити за мету встановлення істинного

характеру залежності між наявними змінними. Навіть у тому випадку, коли ми точно знаємо значення аргументу та функції, відновити функцію за скінченною кількістю її значень — задача, яка в загальному випадку не має розв'язку. Якщо до того ж врахувати, що дослідні дані, як правило, є наближеними й часто містять випадкові похибки вимірювань, то зрозуміло, що в загальному випадку не може бути й мови про встановлення істинного характеру залежності між розглядуваними змінними.

Характер залежності між змінними величинами, тобто вид функції $y = f(x)$, вважається відомим або з теоретичних міркувань, або на підставі характеру розташування на координатній площині точок, що відповідають дослідним даним, а задача добору емпіричних формул зводиться до того, щоб формула в певному розумінні якнайкраще описувала розглядуваний процес.

Дуже часто під час вибору параметрів (коефіцієнтів) емпіричних формул користуються так званим ***принципом найменших квадратів***. Цей принцип ґрунтується на тому, що з даної множини формул виду $y = f(x)$ найкращою вважається та, для якої сума квадратів відхилень спостережуваних (дослідних) значень від обчислених є найменшою.

Методом найменших квадратів називають добір параметрів функції $f(x)$, що ґрунтується на цьому принципі. Необхідно пам'ятати, що метод найменших квадратів застосовують для добору параметрів **після того, як вид функції визначено**.

Покажемо, як застосовується метод найменших квадратів для побудови найпростіших емпіричних формул.

1. Нехай дано таблицю значень змінних (табл. 3)

Таблиця 3

x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_i	y_1	y_2	…	y_n

і відповідні точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, ..., $A_n(x_n, y_n)$ розташовуються поблизу деякої прямої (рис. 10).

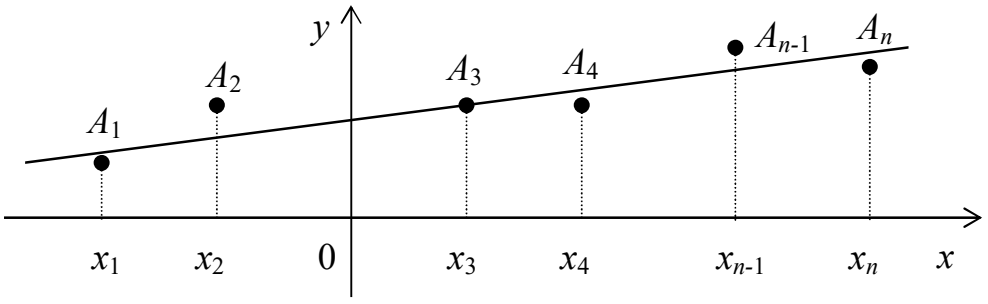


Рис. 10

У цьому випадку природно шукати емпіричну формулу (функцію) як $y = ax + b$, де a та b – невідомі параметри (коефіцієнти). Ці параметри

необхідно вибрати так, щоб сума квадратів відхилень обчислених значень $ax_i + b$ від спостережуваних значень y_i, тобто величина

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + ... + (ax_n + b - y_n)^2$$

набувала найменшого значення. Таким чином, задача звелася до знаходження мінімуму функції $F(a,b)$ двох змінних a та b:

$$F(a,b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + ... + (ax_n + b - y_n)^2,$$

яку, використовуючи знак суми $\sum$, можна записати так:

$$F(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 . \qquad (33)$$

Згідно з теоремою 41, функція $F(a,b)$ набуває мінімального значення за тих значень a та b, за яких частинні похідні цієї функції за кожною змінною дорівнюють нулю, тобто коли …

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 0 \text{ і } \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 0, \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ 2\sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Останню систему рівнянь зручно записати так:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x^2{}_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0. \end{cases} \qquad (34)$$

Таким чином, знаходження параметрів a та b звелося до розв'язання системи (34) двох лінійних рівнянь з двома невідомими. Розв'язуємо цю систему та визначаємо параметри (коефіцієнти) a та b.

2. Нехай таблиця значень змінних (табл. 3) визначає точки, що розташовані поблизу деякої параболи (рис. 11).

Як емпіричну формулу (функцію) візьмемо квадратний тричлен

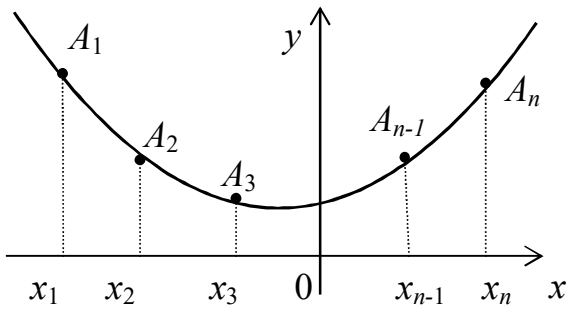


Рис. 11

$y = ax^2 + bx + c$. У цьому випадку сума квадратів відхилень, тобто вираз, аналогічний (35), має вигляд:

$$F(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

Це функція трьох змінних a, b, c.

Знаходячи частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial a}$, $\frac{\partial F}{\partial b}$, $\frac{\partial F}{\partial c}$ та прирівнюючи їх до нуля, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i^2 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i) = 0. \end{cases}$$

яку зручно записати так:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i = 0, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i = 0, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + cn - \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 0. \end{cases} \qquad (35)$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знайдемо значення коефіцієнтів a, b та c емпіричної формули (функції) $y = ax^2 + bx + c$.

Зауваження. Раніше, ніж використовувати на практиці отриману емпіричну формулу, слід її проаналізувати. З цією метою обчислюють значення $y(x_i)$ отриманої емпіричної функції в точках спостереження x_i та порівнюють їх з відповідними значеннями y_i, отриманими дослідним шляхом (табл. 4).

Таблиця 4

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n
$y(x_i)$	$y(x_1)$	$y(x_2)$	...	$y(x_n)$
$y(x_i) - y_i$	$y(x_1) - y_1$	$y(x_2) - y_2$	...	$y(x_n) - y_n$

Якщо відхилення $y(x_i) - y_i$ є допустимими, то отриману емпіричну формулу приймають для практичного використання. Якщо ж відхилення $y(x_i) - y_i$ є недопустимими, то таку емпіричну формулу не використовують, а шукають нову формулу (функцію) іншого виду.

Проілюструємо викладене вище на прикладі.

Приклад. Відома собівартість y_i грош. од. одиниці готової продукції, яку виробляє фірма за певних обсягів x_i од. випуску (табл. 5).

Таблиця 5

x_i	7	12	17	22	27	32	37
y_i	83,7	72,9	63,2	54,7	47,5	41,4	36,3

Потрібно визначити орієнтовну собівартість одиниці готової продукції за обсягу випуску $x = 50$ од.

Розв'язання. Для відповіді на поставлене питання, очевидно, спочатку необхідно побудувати емпіричну функцію.

Побудуємо функцію $y = ax + b$. Для зручності складання системи (34), з якої знаходяться коефіцієнти a та b, побудуємо табл. 6.

Таблиця 6

i	x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	x_i^2
1	7	83,7	585,9	49
2	12	72,9	874,8	144
3	17	63,2	1074,4	289
4	22	54,7	1203,4	484
5	27	47,5	1282,5	729
6	32	41,4	1324,8	1024
$7 = n$	37	36,3	1343,1	1369
$\sum$	154	399,7	7688,9	4088

В останньому рядку ($\sum$) записані суми відповідних стовпців. Отже, у нашому випадку система (34) буде такою:

$$\begin{cases} 4088a + 154b - 7688{,}9 = 0 \\ 154a + 7b - 399{,}7 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання цієї системи дає такі значення коефіцієнтів (параметрів): $a = -1{,}59$; $b = 92{,}13$. Отже, шуканою емпіричною формулою (функцією) буде $y = -1{,}59x + 92{,}13$.

Проаналізуємо одержаний результат, склавши табл. 7.

Таблиця 7

x_i	7	12	17	22	27	32	37
y_i	83,7	72,9	63,2	54,7	47,5	41,4	36,3
$y(x_i)$	81,00	73,05	65,10	57,15	49,20	41,25	33,3
$y(x_i) - y_i$	-2,70	0,15	1,90	2,45	1,70	-0,15	-3,00

Оскільки для ряду значень x_i відхилення $y(x_i) - y_i$ досить великі, то від отриманої емпіричної формули слід відмовитися.

Побудуємо формулу (функцію) $y = ax^2 + bx + c$.

Для зручності складання системи (35), з якої знаходяться параметри (коефіцієнти) *a*, *b* та *c,* побудуємо табл. 8.

Таблиця 8

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	7	49	343	2401	83,7	585,9	4101,3
2	12	144	1728	20736	72,9	874,8	10497,6
3	17	289	4913	83521	63,2	1074,4	18264,8
4	22	484	10648	234256	54,7	1203,4	26474,8
5	27	729	19683	531441	47,5	1282,5	34627,5
6	32	1024	32768	1048576	41,4	1324,8	42393,6
$7 = n$	37	1369	50653	1874161	36,3	1343,1	49694,7
$\sum$	154	4088	120736	3795092	399,7	7688,9	186054,3

Для визначення параметрів *a*, *b* та *c* отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3795092\,a + 120736\,b + 4088\,c = 186054{,}3 \\ 120736\,a + 4088\,b + 154\,c = 7688{,}9 \\ 4088\,a + 154\,b + 7\,c = 399{,}7 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо: $a = 0{,}0234,\ \ b = -2{,}61,\ \ c = 100{,}85$.

Отже, шукана емпірична функція запишеться так:

$y = 0{,}0234x^2 - 2{,}61x + 100{,}85$.

Узгодженість одержаної емпіричної функції з дослідними даними показує табл. 9.

Таблиця 9

x_i	7	12	17	22	27	32	37
y_i	83,7	72,9	63,2	54,7	47,5	41,4	36,3
$y(x_i)$	83,73	72,90	63,24	54,76	47,44	41,29	36,31
$y(x_i) - y_i$	0,03	0	0,04	0,06	-0,06	-0,11	0,01

Отже, емпірична функція $y = 0{,}0234x^2 - 2{,}61x + 100{,}85$ є придатною для використання. Використовуючи її, відповімо на поставлене в умовах задачі

питання. Для цього знайдемо значення емпіричної функції при $x = 50$: $y(50) = 0{,}0234 \cdot 50^2 - 2{,}61 \cdot 50 + 100{,}85 = 28{,}85$.

Отже, орієнтовна собівартість одиниці готової продукції за обсягу випуску $x = 50$ од. становитиме 28,85 грош. од.

Зауважимо, що якби ми використовували відкинуту в результаті аналізу емпіричну формулу $y = -1{,}59x + 92{,}13$, то мали б $y(50) = 12{,}63$ грош. од., що суттєво відрізняється від отриманого нами результату.

Емпіричні формули не претендують на роль законів природи, а є лише гіпотезами, які більш-менш задовільно узгоджуються з отриманими дослідними даними. Однак їхнє значення надзвичайно велике. В історії науки відомі численні приклади того, як отримання вдалої емпіричної формули призводило до великих наукових відкриттів.

4. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

4.1. Первісна функція та невизначений інтеграл

Основним завданням диференціального обчислення є завдання знайти функцію $f(x)$, що є похідною деякої функції $F(x)$, тобто функції $f(x) = F'(x)$.

В інтегральному обчисленні вирішується обернена задача: функція $f(x)$ задана, а потрібно знайти в області визначення $f(x)$ таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому інтервалі (a,b) (скінченному чи нескінченному).

Функція $F(x)$ називається ***первісною функцією*** (або просто ***первісної***) функції $f(x)$ на інтервалі (a,b), якщо в будь-якій точці $x \in (a,b)$ функція $F(x)$ диференційовна і при цьому $F'(x) = f(x)$.

Так, наприклад, функція $F(x) = \sin x$ є первісною функції $f(x) = \cos x$ на всій числовій прямій $(-\infty, \infty)$; функція $F(x) = \ln x$ – первісною функції $f(x) = \dfrac{1}{x}$ при всіх $x > 0$; функція $F(x) = \arcsin x$ – первісною функції $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ на інтервалі $(-1, 1)$.

Проте, якщо відшукання похідної цієї функції – операція однозначна, то пошук первісної не є однозначною задачею. Дійсно, наприклад, для функції $f(x) = \sin x$ первісними будуть і функція $F_1(x) = -\cos x + 2$, і функція $F_2(x) = -\cos x - 15$, і функція $F_3(x) = -\cos x + \sqrt{2}$ тощо, тобто, взагалі кажучи, функція виду $F(x) = -\cos x + C$, де C – довільна стала, оскільки $(-\cos x + C)' = \sin x$.

Очевидно, що якщо $F(x)$ – первісна функція $f(x)$ на інтервалі (a,b), то функція $F(x)+C$, де C – довільна стала, також є первісної функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) ($[F(x)+C]'=F'(x)=f(x),\ x\in(a,b)$).

Теорема 43. Якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – дві первісні однієї й тієї самої функції $f(x)$, то їх різниця між ними є сталою, тобто $F_1(x)-F_2(x)=C$.

Доведення. Нехай $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – первісні функції $f(x)$. Відповідно до означення первісної це означає, що у області визначення функції $f(x)$ мають місце рівності: $F_1'(x)=f(x)$ та $F_2'(x)=f(x)$. Позначимо через $\varphi(x)$ різницю $F_1(x)$ та $F_2(x)$, тобто $\varphi(x)=F_1(x)-F_2(x)$. Тоді матимемо

$$\varphi'(x)=[F_1(x)-F_2(x)]'=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

Отже, $\varphi'(x)\equiv 0$. З цієї рівності та теореми Лагранжа випливає, що $\varphi(x)$ є сталою. Теорему доведено.

Таким чином, якщо $F_1(x)$ – одна з первісних функцій $f(x)$ на інтервалі (a,b), то будь-яку іншу первісну $F_2(x)$ функції $f(x)$ на інтервалі (a,b) можна подати у вигляді $F_2(x)=F_1(x)+C$, де C – деяка стала.

Сукупність всіх первісних функцій $f(x)$ на інтервалі (a,b) називається ***невизначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ (на цьому інтервалі) і позначається символом $\int f(x)dx$.

У цьому позначенні знак $\int$ називається знаком інтеграла, вираз $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, а сама функція $f(x)$ – підінтегральною функцією.

Отже, якщо $F(x)$ – якась первісна функції $f(x)$ на інтервалі (a,b), то $\int f(x)dx=F(x)+C$, де C – будь-яка стала.

Під рівністю $\int f(x)dx=F(x)+C$ слід розуміти рівність множин.

Згідно з означенням, у цій рівності під знаком інтеграла стоїть диференціал будь-якої з первісних $F(x)$ функції $f(x)$:

$$dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx.$$

Природно виникає питання: чи кожна функція $f(x)$ має первісну $F(x)$? Відповідь на це питання буде дано пізніше. Поки що тільки зазначимо (без доведення), що у будь-якої неперервної на інтервалі (a,b) функції існує на цьому інтервалі первісна $F(x)$, тобто невизначений інтеграл $\int f(x)dx=F(x)+C$. Таким чином, якщо для диференційовності $f(x)$ на інтервалі (a,b) умова неперервності функції $f(x)$ була необхідною, то для існування невизначеного інтеграла $\int f(x)dx$ вона є достатньою.

4.2. Основні властивості невизначеного інтеграла

Перші три властивості безпосередньо випливають із означення невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають первісні, то й функції $f_1(x) \pm f_2(x)$ також мають первісні, причому

$$\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)\,dx.$$

Властивість 4 справедлива для алгебраїчної суми будь-якої скінченної кількості функцій $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x)$, що мають первісні.

5. Якщо функція $f(x)$ має первісну, а k – стала, то справедлива рівність:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Справедливість цих властивостей випливає безпосередньо з означення невизначеного інтеграла та властивостей похідної.

4.3. Таблиця основних інтегралів

Операція знаходження невизначеного інтеграла від даної функції, яку називають ***операцією інтегрування***, є оберненою до операції диференціювання, тобто операції знаходження похідної даної функції. Тому кожна формула для похідних конкретних функцій – формула виду $F'(x) = f(x)$ – у силу означення невизначеного інтеграла приводить до відповідної формули інтегрального числення

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Використовуючи це, приходимо до таблиці основних інтегралів, що виходить безпосередньо з відповідної таблиці похідних елементарних функцій.

1. $\int 0dx = C$.

2. $\int 1dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int a^x dx = \dfrac{1}{\ln a}a^x + C$.

6. $\int e^x dx = e^x + C$.

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$.

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$.

До таблиці основних інтегралів відносять також такі формули:

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C \quad (|x| > 1)$.

15. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \quad (|x| \neq 1)$.

16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0)$.

17. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0)$.

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C \quad (a > 0, \quad |x| < a)$.

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

20. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.

21. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$.

Ці формули не мають аналогів серед формул таблиці похідних. Те, що похідними функцій, які стоять у правих частинах цих формул, є відповідні підінтегральні функції, перевіряється безпосереднім диференціюванням.

За допомогою інтегралів 1 – 21, які зазвичай називають ***табличними інтегралами***, та властивостей невизначеного інтеграла можна виразити інтеграли і від складніших елементарних функцій також через елементарні функції. Водночас інтеграли від деяких елементарних функцій уже не є елементарними функціями. Прикладами таких інтегралів можуть бути такі:

$\int e^{-x^2}dx$; $\int \sin(x^2)dx$; $\int \frac{\sin x}{x}dx$. Кожен із зазначених інтегралів є функцією, яка не є елементарною.

Якщо первісна деякої функції $f(x)$ є елементарною функцією, то говорять, що невизначений інтеграл $\int f(x)dx$ виражається через елементарні функції. У цьому випадку можна також сказати, що інтеграл береться в елементарних функціях.

4.4. Основні методи інтегрування

1. Безпосереднє інтегрування.

Безпосереднім інтегруванням називають інтегрування, що полягає в прямому застосуванні властивостей невизначеного інтеграла і формул таблиці основних інтегралів.

Приклад. Знайти $\int(\sin x + 2e^x - x^2)dx$.

Розв'язання. $\int(\sin x + 2e^x - x^2)dx = \int \sin x dx + 2\int e^x dx - \int x^2 dx =$

$$= -\cos x + 2e^x - \frac{x^3}{3} + C.$$

2. Інтегрування заміною змінних.

Заміна змінної – один із найчастіше застосовуваних прийомів інтегрування.

Цей метод застосовують у тих випадках, коли шуканий інтеграл не є табличним, але за допомогою введення нової змінної інтегрування його можна звести до табличного.

Нехай потрібно знайти інтеграл $\int f(x)dx$. Зробимо заміну змінної в підінтегральному вираженні, поклавши $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція з неперервною похідною, що має обернену функцію $t = t(x)$. Отримаємо:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (36)$$

Тут мається на увазі, що після інтегрування в праву частину рівності замість t буде підставлено його вираз через x: $t = t(x)$.

Функцію $x = \varphi(t)$ слід вибирати так, щоб після заміни змінної можна було спростити обчислення невизначеного інтеграла, що стоїть у правій частині рівності (36).

Формулу (36) часто використовують у зворотному порядку. Для цього запишемо її в наступному вигляді:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt. \qquad (37)$$

Тут мається на увазі, що після інтегрування в правій частині замість цього t буде підставлено $\varphi(x)$. Формулу (37) зазвичай називають формулою інтегрування підстановкою.

Приклади.

1. Обчислити $\int e^{5x}dx$.

Розв'язання. Для обчислення цього інтеграла природно зробити таку заміну (підстановку): $t=5x$. Тоді $dt=5dx$ і $dx=\frac{1}{5}dt$. В результаті отримаємо

$$\int e^{5x}dx=\frac{1}{5}\int e^{t}dt=\frac{1}{5}e^{t}+C=\frac{1}{5}e^{5x}+C.$$

2. Обчислити $\int e^{x}\sin e^{x}dx$.

Розв'язання. В цьому випадку зручно застосувати заміну $t=e^{x}$. Надалі будемо записувати розв'язання в такий спосіб:

$$\int e^{x}\sin e^{x}dx=\left|\begin{matrix}t=e^{x}\\dt=e^{x}dx\end{matrix}\right|=\int\sin tdt=-\cos t+C=-\cos e^{x}+C.$$

3. Обчислити $\int\sin^{5}x\cos xdx$.

Розв'язання. Тут зручна заміна $t=\sin x$.

$$\int\sin^{5}x\cos xdx=\left|\begin{matrix}t=\sin x\\dt=\cos xdx\end{matrix}\right|=\int t^{5}dt=\frac{t^{6}}{6}+C=\frac{\sin^{6}x}{6}+C.$$

4. Обчислити $\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx$.

Розв'язання. $\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\left|\begin{matrix}t=\varphi(x)\\dt=\varphi'(x)dx\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|\varphi(x)|+C.$

При обчисленні невизначених інтегралів буває корисно пам'ятати, що якщо $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(ax)dx=\frac{1}{a}F(ax)+C$,

$\int f(x+b)dx=F(x+b)+C$, $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$. Ці рівності є наслідком формули (37).

3. Інтегрування частинами.

Цей метод належить до дуже ефективних методів інтегрування і заснований на наступній теоремі.

Теорема 44. Якщо функції $U=U(x)$ та $V=V(x)$ диференційовані на деякому інтервалі та інтеграл $\int VdU$ існує, то існує і інтеграл $\int UdV$, при цьому

$$\int UdV = UV - \int VdU \ . \qquad (38)$$

Доведення. Запишемо диференціал добутку функцій $U=U(x)$ та $V=V(x)$: $d(UV)=VdU+UdV$. Звідси $UdV=d(UV)-VdU$.

З огляду на, що з рівності диференціалів функцій випливає рівність їх невизначених інтегралів, отримаємо $\int UdV=\int d(UV)-\int VdU$. Оскільки за умовою існує $\int VdU$ і $\int d(UV)=UV+C$ (властивість 3 невизначеного інтеграла), то існує і $\int UdV$, при цьому $\int UdV=UV-\int VdU$. Теорему доведено.

Формула (38) зводить питання про обчислення інтеграла $\int UdV$ до обчислення інтеграла $\int VdU$. Обчислення інтеграла $\int UdV$ за допомогою формули (38) називають інтегруванням частинами. Функція V, що знаходиться по диференціалу dV (інтегруванням), визначається неоднозначно. Зазвичай за функцію V обирається функція, що записується найбільш простою формулою.

Більшість інтегралів, які знаходять за допомогою інтегрування частинами, може бути розбито на дві групи.

1. Інтеграли, підінтегральна функція яких є добутком многочлена $P_n(x)$ на одну з наступних функцій: $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$. Інтегруючи частинами, за функцію $U(x)$ беруть зазначену вище функцію.

2. Інтеграли, підінтегральна функція яких є добуток многочлена $P_n(x)$ на $\sin ax$, $\cos ax$ або e^{ax}, де a – деяке число. Такі інтеграли обчислюються шляхом n – кратного застосування формули інтегрування частинами. У цьому випадку щоразу за функцію $U(x)$ береться многочлен, степінь якого після кожного інтегрування знижується на одиницю.

Приклади.

1. Обчислити $\int x^5 \ln x dx$.

Розв'язання. Позначимо $U=\ln x,\ dV=x^5dx$ і знайдемо $dU=\dfrac{dx}{x},\ V=\dfrac{x^6}{6}$.

Всі наші позначення та обчислення зручно записувати наступним чином:

$$\int x^5 \ln x dx = \begin{vmatrix} U=\ln x & dU=\dfrac{dx}{x} \\ dV=x^5dx & V=\dfrac{x^6}{6} \end{vmatrix} = \frac{x^6}{6}\ln x - \int \frac{x^6}{6}\frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{6}\int x^5 dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{36}x^6 + C.$$

2. Обчислити $\int x^2 \sin x dx$.

Розв'язання. $\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{matrix} U = x^2, & dU = 2xdx \\ dV = \sin x dx, & V = -\cos x \end{matrix} \right| =$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx = \left| \begin{matrix} U = x, & dU = dx \\ dV = \cos x dx, & V = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Зазначені вище дві групи інтегралів не вичерпують всі інтеграли, які обчислюються інтегрування частинами.

4.5. Поняття визначеного інтеграла

Розглянемо спочатку завдання про знаходження обсягу випуску продукції z, виробленої фірмою за проміжок часу $[T_1, T_2]$. Нехай $y = f(t)$ – продуктивність праці фірми на час $t \in [T_1, T_2]$. Якщо продуктивність праці в проміжок часу $[T_1, T_2]$ не змінюється, тобто $f(t) = c = \text{const}$ при $t \in [T_1, T_2]$, то, очевидно, $z = c(T_2 - T_1)$. Якщо ж продуктивність праці $f(t)$ змінюється з часом, то величину обсягу продукції наближено можна обчислити так. Розіб'ємо відрізок $[T_1, T_2]$ на більш дрібні відрізки точками $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T_2$. На кожному частковому відрізку $[t_{k-1}, t_k]$ обчислимо наближено обсяг виробленої продукції Δz_k, вважаючи, що на цьому відрізку продуктивність праці була постійною, рівною $f(t_k)$. Тоді матимемо: $\Delta z_k = f(t_k)\Delta t_k$, де $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ і $z \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t_k$. Зрозуміло, що ця рівність буде тим точнішою, чим менше відрізки $[t_{k-1}, t_k]$, тобто чим менше Δt_k. Тому величину обсягу випуску продукції за проміжок $[T_1, T_2]$ слід вважати рівною $z = \lim\limits_{\max \Delta t_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t_k$.

Потреба обчислення таких границь призводить до поняття визначеного інтегралу.

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана обмежена функція $y = f(x)$. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n довільних частин (часткових відрізків) точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$;

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

і позначимо через $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_k, ..., \Delta x_n$ відповідно довжини часткових відрізків $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{k-1}, x_k], ..., [x_{n-1}, x_n]$. На кожному з цих відрізків виберемо довільну точку c_k $(x_{k-1} \le c_k \le x_k)$ і розглянемо таку суму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sigma(x_k, c_k). \qquad (39)$$

Ця сума називається ***інтегральною***. Шукатимемо границю інтегральної суми (39) у припущенні, що довжини Δx_k всіх часткових відрізків $[x_{k-1}, x_k]$ прямує до нуля (очевидно, що при цьому кількість n цих відрізків необмежено зростає), тобто будемо шукати

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sigma(x_k, c_k). \qquad (40)$$

Функція $f(x)$ називається ***інтегровною на відрізку*** $[a,b]$, якщо існує скінченна границя (40), яка не залежить від того, яким чином $[a,b]$ ділиться на часткові відрізки і яким чином вибираються точки c_k на них, при умові, що довжина кожного часткового інтервалу прямує до нуля. Ця границя називається ***визначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ та позначається символом $\int_a^b f(x)dx$. Таким чином,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sigma(x_k, c_k).$$

З означення визначеного інтеграла випливає, що його величина не залежить від позначення змінної інтегрування, тобто.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(y)dy.$$

Повертаючись до задачі про знаходження обсягу випуску продукції, отримуємо: якщо $f(t)$ – продуктивність праці в момент часу $t \in [T_1, T_2]$, то $\int_{T_1}^{T_2} f(t)dt = z$ – обсяг продукції, випущеної за проміжок часу $[T_1, T_2]$.

З означення визначеного інтеграла випливає, що не будь-яка функція інтегрується на будь-якому відрізку.

Покажемо, що функція $f(x) = C = \text{const}$ інтегровна будь-якому відрізку $[a,b]$. Оскільки для будь-якого розбиття відрізка $[a,b]$ та будь-якого вибору точок $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\sigma(x_k, c_k) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} C\Delta x_k = C\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = C(b-a),$$

то $\int_a^b C dx = \lim\limits_{\max \Delta x_K \to 0} \sigma(x_k, c_k) = C(b-a)$.

Наведемо без доведення важливу для подальшого теорему.

Теорема 45. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона інтегровна на цьому інтервалі, тобто існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

При введенні визначеного інтегралу ми припускали, що $a < b$. У випадку, коли $a > b$, $\int_a^b f(x)dx$ розуміють $-\int_b^a f(x)dx$, тобто вважають, що $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. Також вважають, що якщо функція $f(x)$ визначена в точці a, то $\int_a^a f(x)dx = 0$. На закінчення зазначимо, що якщо $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$, то вона інтегровна й на будь-якому іншому відрізку $[c,d]$, що є частиною відрізка $[a,b]$.

4.6. Основні властивості визначеного інтеграла

1. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$ та c – внутрішня точка цього івідрізка, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a,b]$, а k – довільне число, то

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$$

тобто постійний множник можна виносити за знак визначеного інтегралу.

3. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ – функції, що інтегровні на відрізку $[a,b]$, то

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx,$$

тобто визначений інтеграл від алгебраїчної суми інтегровних функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від цих функцій.

Доведення властивостей $1-3$ випливають безпосередньо з означення визначеного інтеграла і властивостей границь.

4. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то всередині цього відрізку знайдеться така точка c, що

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c). \qquad (41)$$

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то на цьому відрізку вона досягає свого найменшого та найбільшого значень. Позначимо через m та M відповідно її найменше та найбільше значення. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n часткових відрізків точками $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ і позначимо через Δx_k довжину відповідного часткового відрізку. Оскільки на відрізку $[a,b]$ $m \le f(x) \le M$ та $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b-a$,

за будь-якого вибору c_k з відрізку Δx_k будемо мати:

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \ge m \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = m(b-a),$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \le M \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M(b-a),$$

або $$m(b-a) \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \le M(b-a).$$

У цій нерівності перейдемо до границі за умови, що всі Δx_k прямують до нуля. Отримаємо: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Останню нерівність запишемо так: $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$.

Таким чином, число $\alpha = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ міститься між найменшим m та найбільшим M значеннями неперервної функції $f(x)$. Тоді з властивостей неперервної на відрізку функції випливає, що на відрізку $[a,b]$ знайдеться принаймні одна точка c така, що $f(c) = \alpha$, тобто $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Із цієї рівності і випливає властивість 4.

4.7. Геометричний зміст визначеного інтеграла

Нехай потрібно обчислити площу фігури, що обмежена неперервною кривою $y = f(x)$ (тобто кривою, що є графіком неперервної функції $y = f(x)$), віссю $0x$ та прямими $x = a$ та $x = b$ $(a < b)$. Таку фігуру називають криволінійною трапецією.

Вважатимемо для простоти, що на відрізку $[a,b]$ функція $f(x)$ приймає лише додатні значення (рис. 12).

Для розв'язання поставленої задачі вчинимо так. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n довільних частин точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ $(a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b)$ і позначимо через Δx_1, Δx_2, …, Δx_n довжини відрізків $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$ відповідно. На кожному частковому відрізку $[x_{k-1}, x_k]$ виберемо довільну точку c_k і в цій точці побудуємо перпендикуляр до перетину з кривою $y = f(x)$. Розглянемо n прямокутників з основами, рівними $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ і висотами, рівними $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n)$ відповідно. Сума площ усіх цих прямокутників

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k ,$$

тобто площа ступінчастої фігури, що складається з n прямокутників, дає наближене значення шуканої площі S криволінійної трапеції. Зрозуміло, що площа S_n тим менше відрізнятиметься від шуканої площі S криволінійної трапеції, чим дрібнішими будуть відрізки $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$.

Тому за точне значення площі S криволінійної трапеції природно прийняти границю суми $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ у припущенні, що довжина Δx_k кожного відрізку необмежено зменшується, тобто.

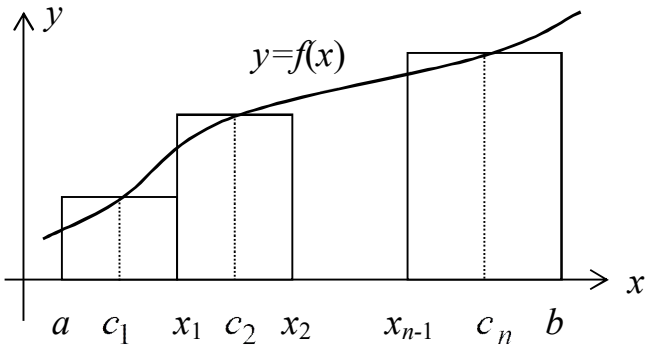


Рис. 12

$$S = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx .$$

Таким чином, у випадку, коли графік функції $y = f(x)$ розташовується над віссю $0x$, тобто коли $f(x) \geq 0$ визначений інтеграл дорівнює площі S криволінійної трапеції.

Нескладно показати, що якщо $f(x) \leq 0$ на відрізку $[a,b]$, то визначений інтеграл дорівнює площі криволінійної трапеції, взятої зі знаком мінус.

4.8. Обчислення визначеного інтеграла

Природно постає питання: чи існує зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралом від однієї й тієї функції? Незважаючи на те, що невизначений інтеграл – це функція (точніше множина функцій), а визначений інтеграл – число, позитивну відповідь на це питання дає теорема Ньютона -Лейбніца, доведення якої буде дано нижче.

Нехай $y = f(x)$ – неперервна на відрізку $[a,b]$ функція. Розглянемо визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$. Зафіксуємо нижню межу a, а верхню будемо змінювати. Очевидно, що визначений інтеграл буде функцією своєї верхньої межі. Щоб мати звичні позначення, верхню межу позначимо через x $(a \le x \le b)$, підінтегральний вираз – $f(t)dt$. Тоді визначений інтеграл буде функцією від x, тобто $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$. Такий інтеграл називається ***визначеним інтегралом зі змінною верхньою межею***.

При $f(t) \ge 0$ функції $\Phi(x)$ виражає собою змінну площу криволінійної трапеції $aAXx$ (рис. 13). Крім того, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ має чудову властивість, яку можна виразити наступною теоремою.

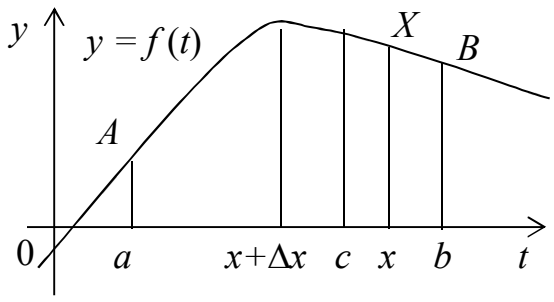


Рис. 13

<u>Теорема 46.</u> Якщо $f(t)$ неперервна на $[a,b]$ функція, а $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$, то $\Phi'(x) = f(x)$, тобто похідна від визначеного інтеграла по змінній верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції на верхній межі.

<u>Доведення</u>. Дамо x приріст Δx (на рис. 13 $\Delta x < 0$). Тоді функція $\Phi(x)$ отримає приріст

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt.$$

За властивістю 1 визначеного інтеграла $\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$

тому $\Delta\Phi = \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$.

За властивістю 4: $\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)(x+\Delta x - x) = f(c)\Delta x$,

тобто $\Delta\Phi = f(c)\Delta x$, де $x + \Delta x < c < x$.

Згідно з означенням похідної, матимемо

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Але при $\Delta x \to 0$ $c \to x$ та $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim\limits_{c \to x} f(c)$. Оскільки $f(t)$ неперервна на $[a,b]$, то $\lim\limits_{c \to x} f(c) = f(x)$. Отже, $\Phi'(x) = f(x)$. Теорему доведено.

Наслідок. Якщо функція $f(t)$ на відрізку $[a,x]$ неперервна, то, згідно з доведеною теоремою, існує визначений інтеграл $\int\limits_a^x f(t)dt$, тобто існує функція $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, що є первісною для функції $y = f(x)$. Тим самим було доведено основну теорему інтегрального числення.

Теорема 47. Будь-яка неперервна функція має первісну.

Формула Ньютона-Лейбніца.

Теорема 46 дозволяє встановити простий метод обчислення визначених інтегралів, не вдаючись до підсумовування та граничного переходу. Як було встановлено вище, функція $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ є первісною для неперервної функції $f(x)$. Відповідно до теореми 43, будь-яка інша первісна $F(x)$ функції $f(x)$ відрізняється від $\Phi(x)$ постійним доданком, тобто $F(x) = \Phi(x) + C$.

Отже, $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - C$. Для визначення сталої C покладемо $x = a$;

тоді $0 = \int\limits_a^a f(t)dt = F(a) - C$, звідки $C = F(a)$. Отже, $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

Поклавши в останній рівності $x = b$, отримаємо формулу Ньютона-Лейбніца: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Оскільки визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування, формулу Ньютона-Лейбніца можна переписати так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (42)$$

Введемо позначення: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$. Тоді (42) можна переписати так:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Зауважимо, що різниця $F(b) - F(a)$ не залежить від вибору первісної $F(x)$. Справді,

$$[F(x) + C]\Big|_a^b = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a).$$

Формула Ньютона-Лейбніца показує, що для обчислення визначеного інтеграла потрібно знайти якусь первісну $F(x)$ для підінтегральної функції $f(x)$ і порахувати різницю значень $F(x)$ при $x = b$ і $x = a$. Інакше кажучи, визначений інтеграл дорівнює приросту первісної для підінтегральної функції на відрізку інтегрування.

Приклади.

1. Продуктивність праці фірми протягом робочого дня визначається формулою $y = 12 + \frac{1}{(t+1)^2}$. Визначити обсяг продукції *z,* виробленої фірмою за перші 3 години роботи.

Розв'язання. Оскільки $-\frac{1}{t+1}$ є первісної функції $\frac{1}{(t+1)^2}$, то обсяг виробленої продукції, що цікавить нас, буде наступним:

$$z = \int_0^3 \left(12 + \frac{1}{(t+1)^2}\right)dt = \left(12t - \frac{1}{1+t}\right)\Big|_0^3 = 36 - \frac{1}{4} + 1 = 36{,}75.$$

2. Обчислити $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Оскільки $\arcsin x$ є первісною для $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, то за формулою Ньютона-Лейбніца маємо:

$$\int\limits_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}.$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі.

Нехай при обчисленні визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ потрібно зробити заміну змінної за формулою $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ монотонна на відрізку $[\alpha, \beta]$ функція, що задовольняє умовам

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \tag{43}$$

а функції $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ і $f(\varphi(t))$ неперервні на $[\alpha, \beta]$. Тоді

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,. \tag{44}$$

Справді, якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$, то за формулою Ньютона-Лейбніца маємо

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,. \tag{45}$$

Покажемо, що якщо в первісній $F(x)$ покласти $x = \varphi(t)$, то $F(\varphi(t))$ буде первісною функції $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$. Знайдемо похідну складеної функції $F(\varphi(t))$, де проміжним аргументом є $\varphi(t) = x$, за новою змінною t:

$$F'_t(\varphi(t)) = \frac{dF(\varphi(t))}{d\varphi(t)} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \frac{d\varphi(t)}{dt} =$$

$$= F'(x) \cdot \varphi'(t) = f(x) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,.$$

Отже, за формулою Ньютона-Лейбніца маємо

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))\,.$$

Враховуючи умови (43), отримаємо:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = F(b) - F(a). \qquad (46)$$

З рівностей (45) та (46) отримуємо ***формулу заміни змінної*** (44).

При заміні змінної у визначеному інтегралі немає необхідності повертатися до попередньої змінної, достатньо лише визначити нові межі інтегрування за формулами (43).

Приклади.

1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну: $x = 3\sin t$. Тоді $dx = 3\cos t\,dt$, а $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = 3\cos t$. Знайдемо нові межі інтегрування:

при $x = 0$ $\quad 3\sin t = 0$, тобто $t = 0$,

при $x = 3$ $\quad 3\sin t = 3$, тобто $t = \frac{\pi}{2}$.

Отже, після заміни змінної та меж інтегрування маємо

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt = 9\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{9}{2}\left(t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{9}{4}\left(\sin\pi - \sin 0\right) = \frac{9}{4}\pi.$$

2. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^5 x\sqrt{x-1}\,dx$.

Розв'язання. Покладемо $\sqrt{x-1} = t$. Тоді $x = t^2 + 1$, $dx = 2tdt$, а $x\sqrt{x-1}dx = 2(t^4 + t^2)dt$. Нові межі інтегрування отримаємо з рівності $\sqrt{x-1} = t$. Поклавши $x = 1$, дістанемо $t = 0$; поклавши $x = 5$, отримаємо $t = 2$. Отже,

$$\int_1^5 x\sqrt{x-1}dx = 2\int_0^2 (t^4 + t^2)dt = 2\frac{t^5}{5}\Big|_0^2 + 2\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^2 =$$

$$= 2\left(\frac{32}{5} - 0\right) + 2\left(\frac{8}{3} - 0\right) = \frac{64}{5} + \frac{16}{3} = 18\frac{2}{15}.$$

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Нехай $U(x)$ та $V(x)$ – дві функції, що диференціюються на відрізку $[a,b]$. Тоді $d(UV) = VdU + UdV$. Інтегруючи обидві частини отриманого тотожності в межах від a до b, отримаємо:

$$\int_a^b d(UV) = \int_a^b VdU + \int_a^b UdV. \qquad (47)$$

Оскільки за формулою Ньютона-Лейбніца $\int_a^b d(UV) = UV\Big|_a^b$, то рівність (47) набуває вигляду $UV\Big|_a^b = \int_a^b VdU + \int_a^b UdV$, або

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU. \qquad (48)$$

Формула (48) називається формулою ***інтегрування частинами*** у визначеному інтегралі.

Приклад. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{2\pi} x\sin 2xdx$.

Розв'язання. Покладемо $U = x$, $dV = \sin 2xdx$.

Тоді $dU = dx$, $V = -\frac{1}{2}\cos 2x$. Застосовуючи формулу (48), отримаємо:

$$\int_0^{2\pi} x\sin 2xdx = -\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2xdx = -\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\cos 4\pi + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot\cos 0 + \frac{1}{4}(\sin 4\pi - \sin 0) = -\pi.$$

4.9. Обчислення площ

Як зазначалося раніше, якщо функція $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$ неперервна і додатна, то площа криволінійної трапеції, що має основу $[a,b]$ і обмежена зверху графіком цієї функції, а з боків прямими $x = a$ та $x = b$,

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (49)$$

Якщо ж на $[a,b]$ неперервна функція $y=f(x)$ не додатна, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx \le 0$, а абсолютна величина цього інтеграла дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції, тобто

$$S=-\int_a^b f(x)dx. \qquad (50)$$

Формули (49) і (50) можна об'єднати в одну:

$$S=\int_a^b |f(x)|dx. \qquad (51)$$

Тому, якщо функція $y=f(x)$ на відрізку $[a,b]$ змінює знак, то для обчислення площі фігури, обмеженої графіком функції $y=f(x)$, віссю $0x$ та прямими $x=a$ і $x=b$, ми повинні користуватися формулою (51).

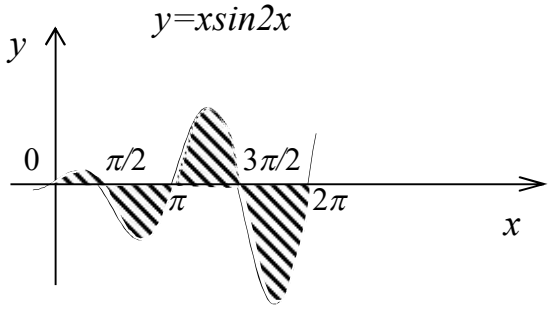


Рис. 14

Приклад. Обчислити площу S фігури, що обмежена кривою $y=x\sin 2x$ та віссю $0x$ при $0\le x\le 2\pi$ (рис. 14).

Розв'язання. Функція $y=x\sin 2x$ на інтервалі $(0,\ 2\pi)$ змінює знак у точках $\frac{\pi}{2}$, π і $\frac{3}{2}\pi$. Тому шукана площа

$$S=\int_0^{2\pi}|x\sin 2x|dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2} x\sin 2xdx-\int_{\pi/2}^{\pi} x\sin xdx+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} x\sin 2xdx-\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} x\sin 2xdx.$$

Наприкінці попереднього пункту (приклад) при обчисленні визначеного інтеграла $\int_0^{2\pi} x\sin 2xdx$ було встановлено, що функція $-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x$ є первісною для функції $x\sin 2x$. Тому потрібна площа

$$S=\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi/2}-\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi}+$$

$$+\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}-\left(-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{2}\right)-\left(-\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\pi+\frac{5}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi=4\pi.$$

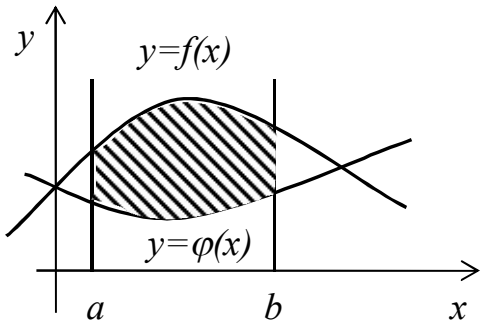


Рис. 15

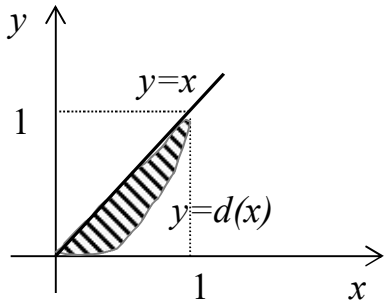


Рис. 16

Якщо потрібно обчислити площу, обмежену кривими $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ та прямими $x=a$, $x=b$ (Рис. 15), то за умови, що $f(x)\geq\varphi(x)$ на $[a,b]$, будемо мати

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b \varphi(x)dx=\int_a^b\left[f(x)-\varphi(x)\right]dx. \qquad (5\ 2)$$

Під час аналізу соціально-економічної структури суспільства, тобто під час оцінювання ступеня нерівності в розподілі доходів серед населення, використовують так звану «діаграму, або криву Джині» розподілу багатства в суспільстві (рис. 16).

Функція $y=d(x)$ визначає частку *суспільства*, що має частку доходу не більше $d(x)$. Якщо дохід у суспільстві розподілено рівномірно, то крива $y=d(x)$ є прямою $y=x$.

Якщо ж дохід розподіляється нерівномірно, то крива Джіні розташовується під прямою $y=x$ (див. рис. 16).

Площа фігури, що утворилася, характеризує ступінь нерівномірності розподілу доходів у суспільстві. Чим більша площа цієї фігури, тим більш нерівномірно розподілено багатство у суспільстві.

Розмір цієї площі *k* називається «коефіцієнтом Джині».

Видно, що при рівномірному розподілі доходів $k=0$; у загальному випадку $0\leq k\leq\frac{1}{2}$.

Приклад. Знайти коефіцієнт Джині розподілу доходів у суспільстві, якщо функція Джині $d(x)=x^3$.

Розв'язання. Очевидно,

$$k = \int_0^1 \left(x - x^3\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Такий коефіцієнт свідчить про значну нерівномірність розподілу доходів у суспільстві.

4.10. Невласні інтеграли

При введенні поняття визначеного інтеграла робилися припущення, що: 1) відрізок $[a,b]$ інтегрування є скінченним і 2) підінтегральна функція на відрізку обмежена. Відмова від виконання цих умов призводить до поняття ***невласних*** інтегралів першого і другого роду.

Невласні інтеграли першого роду (інтеграли з нескінченними межами). Спочатку розглянемо випадок, коли функція $f(x)$ визначена на півосі $[a,+\infty)$ та інтегровна на будь-якому відрізку $[a,b]$, де $b > a$.

Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$, то ця границя називається ***невласним інтегралом першого роду*** та позначається символом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, тобто

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

При цьому говорять, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

Символ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ використовують і тоді, коли зазначена вище границя нескінченна або не існує. В цьому випадку говорять, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Аналогічно визначають невласні інтеграли по півосі $(-\infty, b]$ та по всій осі $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f(x)dx,$$

причому у другому випадку передбачається, що $a \to -\infty$, $b \to +\infty$ незалежно друг від друга.

З означень невласних інтегралів першого роду випливає:

1) якщо для деякого дійсного числа a збігається кожен з невласних інтегралів $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx$ та $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, то збігається і невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ і при цьому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx;$$

2) якщо збігається невласний інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ і $a_1 \geq a$, то збігається і невласний інтеграл $\int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)dx$, причому

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{a}^{a_1} f(x)dx + \int\limits_{a_1}^{+\infty} f(x)dx.$$

Приклади.

1. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$.

Розв'язання. Зважаючи на те, що для будь-кого $b > 0$ $\int\limits_{0}^{b} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^b = -e^{-b} + 1$, отримаємо:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-x})\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} (-e^{-b} + 1) = 1.$$

Отже, невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx$ збігається.

2. Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^b \right) = 2 \lim_{b\to+\infty} \sqrt{b} - 2 = +\infty.$$

Отже, цей інтеграл розбігається.

Невласні інтеграли другого роду (інтеграли від необмежених функцій).

Нехай на проміжку $[a,b)$ задано функцію $f(x)$, яка не обмежена на цьому проміжку, але обмежена та інтегровна на будь-якому відрізку $[a,b-\alpha]$, де $0<\alpha<b-a.$ Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx$, то вона називається ***невласним інтегралом другого роду*** від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)dx$, тобто.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_a^{b-\alpha} f(x)dx.$$

При цьому говорять, що невласний інтеграл збігається. Якщо зазначена вище границя нескінченна або не існує, то в цьому випадку говорять, що невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбігається.

Аналогічно визначається невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ від необмеженої функції $f(x)$, визначеної на проміжку $(a,b]$, обмеженої та інтегровної на будь-якому відрізку $[a+\alpha,b]$, де $0<\alpha<b-a.$

Нехай функція $f(x)$ має нескінченний розрив в точці $x=c$, де $a<c<b$, разом із тим $f(x)$ обмежена і інтегровна на будь-яких відрізках $[a,c-\alpha]$ та $[c+\beta,b]$, де $0<\alpha<c-a$, $0<\beta<b-c$.

У цьому випадку за означенням

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,$$

тобто $$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\alpha\to+0}\int_a^{c-\alpha} f(x)dx+\lim_{\beta\to+0}\int_{c+\beta}^b f(x)dx.$$

Зауважимо, що α та β прямують до нуля незалежно друг від друга.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^4}$.

Розв'язання. $x=0$ є точкою розриву функції $f(x)=\frac{1}{x^4}$.

Тому $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^4}=\lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_{-1}^{-\alpha}\frac{dx}{x^4}=-\frac{1}{3}\lim\limits_{\alpha\to+0}\left(\frac{1}{x^3}\Big|_{-1}^{-\alpha}\right)=\frac{1}{3}\lim\limits_{\alpha\to+0}\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{3}=\infty$.

Отже, $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^4}$ розбігається.

Інтеграл Пуассона.

В курсі «Теорія ймовірностей та математична статистика» буде потрібен невласний інтеграл Пуассона: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

Відповідний невизначений інтеграл $\int e^{-x^2}dx$ Место для формулы.не виражається через елементарні функції. Тому, опускаючи доведення, наводимо значення збіжного невласного інтеграла Пуассона: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

Оскільки підінтегральна функція e^{-x^2} парна, то

$$\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Якщо зробити заміну змінної: $x=\frac{t}{\sqrt{2}}$, то

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\pi}$ звідки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$.

Останній інтеграл є найпоширенішою формою інтеграла Пуассона.

5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

5.1. Основні поняття та означення

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що пов'язує незалежну змінну *x*, шукану функцію $y=f(x)$ та її похідні y', y'', …, $y^{(n)}$. Найвищий порядок похідної шуканої функції, що входить в диференціальне рівняння, називається ***порядком*** цього рівняння.

Наприклад, рівняння $yy''+2xy'+y^2-\operatorname{tg}x=0$ – диференціальне рівняння другого порядку. В загальному вигляді диференціальне рівняння *n*-го порядку можна записати так:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (53)$$

Розв'язком диференціального рівняння називається будь-яка функція $y = f(x)$, яка разом із своїми похідними y', y'', …, $y^{(n)}$ задовольняє рівняння (53).

Приклад. Нехай нам дано рівняння $y'' - y' = 0$. Неважко перевірити, що розв'язками цього рівняння є функції $y = e^x$, $y = 23e^x$, $y = 5e^x + 10$. Очевидно, що будь-яка функція виду $y = C_1 e^x + C_2$ є розв'язком цього диференціального рівняння. Тут C_1 та C_2 – довільні незалежні сталі.

З наведеного прикладу видно, що диференціальне рівняння має нескінченну кількість розв'язків.

Загальним розв'язком диференціального рівняння *n*-го порядку (53) називається функція

$$y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n), \qquad (54)$$

що містить *n* довільних сталих і задовольняє рівняння (53). ***Частинним розв'язком*** диференціального рівняння (53) називається будь-який його розв'язок, що виходить із загального розв'язку (54) при конкретних числових значеннях $C_1, C_2, ..., C_n$.

Співвідношення виду

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0, \qquad (55)$$

що неявно визначає загальний розв'язок, називається ***загальним інтегралом рівняння*** (53).

Розв'язати (проінтегрувати) диференціальне рівняння *n*-го порядку – означає знайти його загальний розв'язок (54) або загальний інтеграл (55).

5.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку пов'язує незалежну змінну *x*, шукану функцію $y = y(x)$ та її похідну. В загальному вигляді його можна записати так:

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (56)$$

У рівняння (56) можуть не входити в явному вигляді *x* та *y*, але y' входить обов'язково. Якщо (56) вдається розв'язати щодо y', то воно приймає вид

$$y' = f(x, y). \qquad (57)$$

Нехай $y = y(x)$ є розв'язком рівняння (56) чи (57). Графік функції $y = y(x)$ називається ***інтегральною кривою***.

Загальний розв'язок (54) диференціального рівняння (56) має вигляд:

$$y = y(x, C). \qquad (58)$$

При конкретному значенні сталої утворюється ***частинний розв'язок*** рівняння (56) або (57). Оскільки диференціальне рівняння має незліченну множину розв'язків, то йому відповідає й незліченна множина інтегральних кривих. Для виділення з цієї множини конкретної кривої потрібно задати точку (x_0, y_0), через яку ця крива проходить, тобто ми повинні знати значення y_0 розв'язку $y = y(x)$ при заданому значенні незалежної змінної $x = x_0$. Завдання значення $y = y_0$ загального розв'язку (58) при $x = x_0$ називається накладанням ***початкових умов*** на рівняння (56) або (57). Початкові умови заведено позначати так:

$$y\Big|_{x=x_0} = y_0 \quad \text{або} \quad y(x_0) = y_0. \qquad (59)$$

Знаходження розв'язку рівняння (56) або (57), що відповідає початковим умовам (59), називається ***задачею Коші***.

Наведемо без доведення одну з основних теорем теорії диференціальних рівнянь.

Теорема Коші. Якщо права частина рівняння $y' = f(x, y)$ та її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ неперервні в деякій області, що містить точку (x_0, y_0), то в цій області існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, що задовольняє початкову умову $y\Big|_{x=x_0} = y_0$.

З геометричної точки зору це означає, що через кожну точку (x_0, y_0) цієї області проходить єдина інтегральна крива $y = y(x)$.

Розглянемо методи знаходження розв'язків деяких типів диференціальних рівнянь першого порядку.

Рівняння з відокремлюваними змінними.

Якщо диференціальне рівняння першого порядку можна звести до вигляду

$$y' = f(x) \cdot \varphi(y), \qquad (60)$$

то його називають рівнянням з ***відокремлюваними змінними***.

З найпростішим типом рівняння такого виду (при $\varphi(y) = 1$) ми вже зустрічалися: $y' = f(x)$. Як відомо, розв'язком цього рівняння є невизначений інтеграл, тобто $y = \int f(x)dx = F(x) + C$. Для знаходження розв'язку рівняння типу (60) необхідно передусім ***відокремити змінні***. Для цього запишемо рівняння (60) як: $\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$. Звідки $dy = f(x) \cdot \varphi(y)dx$. Поділивши ліву та праву частину останньої рівності на $\varphi(y) \neq 0$, отримаємо:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx. \qquad (61)$$

Це ***рівняння з відокремленими змінними***. Вважаючи y відомою функцією від x, ми маємо право розглядати (61) як рівність двох диференціалів. Отже, $\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx$. Таким чином, інтегруючи (61), знаходимо загальний інтеграл рівняння (60) з відокремлюваними змінними. Проілюструємо сказане вище на прикладі.

Приклад. Проінтегрувати диференціальне рівняння

$$\left(x^2 - yx^2\right)\cdot y' + y^2 + xy^2 = 0.$$

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді (60):

$$y' = -\frac{y^2 + xy^2}{(1-y)\cdot x^2} = -\frac{y^2}{1-y}\cdot\frac{1+x}{x^2} \qquad \text{або} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{1-y}\cdot\frac{1+x}{x^2}.$$

Відокремимо змінні: $-\frac{1-y}{y^2}dy = \frac{1+x}{x^2}dx$.

Інтегруючи, отримаємо:

$$-\int\frac{1-y}{y^2}dy = \int\frac{1+x}{x^2}dx \text{ або} -\int\frac{dy}{y^2} + \int\frac{dy}{y} = \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{y} + \ln|y| = -\frac{1}{x} + \ln|x| + C.$$

Після очевидних перетворень отримаємо загальний інтеграл рівняння

$$\frac{x+y}{xy} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C.$$

Лінійні рівняння.

Якщо диференціальне рівняння першого порядку можна подати у вигляді

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad (62)$$

то його називають лінійним. Тут $P(x)$ і $Q(x)$ – задані неперервні функції або сталі.

Розв'язок рівняння (62) шукатимемо у вигляді добутку двох функцій від x, тобто у вигляді

$$y = U(x)\cdot V(x). \qquad (63)$$

Зрозуміло, що одну з цих функцій можна вибрати довільно, а іншу визначити так, щоб (63) було загальним розв'язком рівняння (62).

Диференціюючи обидві частини рівності (63) по x, знаходимо

$$y' = U'V + UV'. \qquad (64)$$

Підставляючи (63) і (64) в (62), отримаємо:

$$U'V + UV' + P(x)UV = Q(x) \quad \text{або}$$

$$U'V + U(V' + P(x)V) = Q(x). \qquad (65)$$

Користуючись правом вибору однієї з функцій, виберемо функцію V так, щоб вираз, що стоїть у дужках (65), обернувся на нуль, тобто щоб

$$V' + P(x)V = 0. \qquad (66)$$

Відокремлюючи змінні рівняння (66), отримаємо $\frac{dV}{V} = -P(x)dx$.

Оскільки нам достатньо знайти який-небудь частинний розв'язок рівняння (66), то для зручності після інтегрування візьмемо $C = 0$:

$$\ln|V| = -\int P(x)dx \quad \text{або} \quad V = e^{-\int P(x)dx}. \qquad (67)$$

Підставимо знайдене значення функції $V(x)$ в рівняння (65). Отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними для визначення $U(x)$:

$$U'e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Розділяємо змінні і знаходимо $U(x)$:

$$dU = \frac{Q(x)dx}{e^{-\int P(x)dx}} = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

$$U = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C. \qquad (68)$$

Підставляючи (67) і (68) в (63), знаходимо загальний розв'язок рівняння (62):

$$y = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)\cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Зауваження. При інтегруванні лінійних рівнянь, зазвичай, готовими формулами (67) і (68) не користуються, а роблять послідовно всі обчислення.

Приклади.

1. Проінтегрувати диференціальне рівняння

$$(x+1)y' - 2y = (x+1)^4.$$

Розв'язання. Зведемо рівняння до виду (62). Для цього поділимо його почленно на $x+1$. Очевидно, що $x+1 \neq 0$, оскільки в іншому разі коефіцієнт при y' дорівнює нулю. Отримуємо: $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$. Підставляючи замість y та y' відповідно (63) і (64), матимемо:

$$U'V + UV' - \frac{2}{x+1}UV = (x+1)^3 \text{ або}$$

$$U'V + U\left(V' - \frac{2V}{x+1}\right) = (x+1)^3. \qquad (69)$$

Прирівнюємо вираз, що стоїть у дужках, до нуля: $V' - \frac{2V}{x+1} = 0$.

Відокремлюємо змінні: $\frac{dV}{V} = \frac{2dx}{x+1}$. Звідки $\ln|V| = 2\ln|x+1|$ або $V = (x+1)^2$.

Підставляючи $V = (x+1)^2$ в (69), отримуємо:

$$U'(x+1)^2 = (x+1)^3 \text{ або } U' = x+1.$$

Інтегруючи, отримаємо $U = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + C$.

Остаточно матимемо $y = UV = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)\cdot(x+1)^2$.

2. Знайти розв'язання диференціального рівняння $y' - 2xy = x - x^3$, що задовольняє початкову умову $y|_{x=0} = 1$.

Розв'язання. Після заміни $y = U \cdot V$ отримуємо

$$U'V + UV' - 2xUV = x - x^3 \text{ або } U'V + U(V' - 2xV) = x - x^3.$$

Розв'язуємо рівняння $\frac{dV}{dx} - 2xV = 0$:

$$\int \frac{dV}{V} = 2\int x dx, \qquad \ln|V| = x^2, \quad V = e^{x^2}.$$

Після підстановки $V = e^{x^2}$ маємо: $\frac{dU}{dx}\cdot e^{x^2} = x - x^3$ або

$$dU = x(1-x^2)e^{-x^2}dx, \text{ тобто } U = \int x(1-x^2)e^{-x^2}dx.$$

Зробимо заміну: $-x^2 = t$, тоді $-2xdx = dt$,

$$U = -\frac{1}{2}\int (1+t)e^t dt = -\frac{1}{2}\int e^t dt - \frac{1}{2}\int te^t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}\left(te^t - e^t\right) + C = -\frac{1}{2}te^t + C = \frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + C.$$

Отримуємо загальний розв'язок $y = UV = e^{x^2}\left(\frac{x^2}{2}e^{-x^2} + C\right) = \frac{x^2}{2} + Ce^{x^2}$.

Для визначення сталої C підставимо в загальний розв'язок початкову умову $x = 0,\ y = 1$. Отримаємо $C = 1$.

Шуканий частинний розв'язок $y = \frac{x^2}{2} + e^{x^2}$.

5.3. Диференціальні рівняння другого порядку

Диференціальне рівняння другого порядку в загальному вигляді можна записати так:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{70}$$

У рівнянні (70) обов'язково має бути друга похідна y'', той час як x, y і y' можуть бути відсутніми. Загальний розв'язок рівняння (70) має вигляд $y = y(x, C_1, C_2)$, а загальний інтеграл $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$. Для визначення частинного розв'язку (задача Коші) задаються початкові умови у вигляді

$$y\Big|_{x = x_0} = y_0, \qquad y'\Big|_{x = x_0} = y_0'.$$

При цьому значення сталих C_1 та C_2 знаходяться із системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0, C_1, C_2) \\ y_0' = y'(x_0, C_1, C_2) \end{cases}. \tag{71}$$

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку.

Диференціальне рівняння другого порядку називається ***лінійним***, якщо воно містить потрібну функцію y та її похідні y' і y'' в першому степені, і має вигляд

$$y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = f(x), \tag{72}$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ і $f(x)$ - Задані функції від x або постійні.

Функція $f(x)$ (72) називається ***правою частиною рівняння***. Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння (72) називається ***неоднорідним*** чи рівнянням з правою частиною.

При $f(x) \equiv 0$ рівнянні (72) набуває вигляду

$$y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = 0 \tag{73}$$

і називається ***однорідним***.

Надалі нам знадобляться деякі властивості однорідних рівнянь, які сформулюємо як теорем, доведення яких рекомендується провести самостійно.

Теорема 48. Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – частинні розв'язки рівняння (73), то їх сума $y_1 + y_2$ також є розв'язком цього рівняння.

Теорема 49. Якщо $y_1(x)$ – частинний розв'язок рівняння (73), а C – довільна стала, то $Cy_1(x)$ також є розв'язком цього рівняння.

Два розв'язки $y_1(x)$ та $y_2(x)$ диференціального рівняння (73) називаються ***лінійно незалежними***, якщо їх відношення не є сталим, тобто $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$.

В іншому випадку рішення називаються ***лінійно залежними*** і кожне з них може бути отримано з іншого множенням останнього на деяке число.

Теорема 50. Якщо $y_1(x)$ та $y_2(x)$ – два лінійно незалежні розв'язки рівняння (73), то

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x), \tag{74}$$

де C_1 та C_2 – довільні сталі, є загальним розв'язком цього рівняння.

Зауваження 1. Якби y_1 та y_2 були лінійно залежними розв'язками, то знайшлося б таке число λ, що $y_1(x) = \lambda y_2(x)$. Тоді (74) можна було б подати у вигляді : $y = C_1\lambda \cdot y_2(x) + C_2 \cdot y_2(x) = (C_1\lambda + C_2)y_2(x)$.

Позначивши $C_1\lambda + C_2$ через C, отримаємо $y = C \cdot y_2(x)$. Ця функція не може бути загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку, оскільки містить лише одну довільну сталу.

Зауваження 2. Якщо в (72) $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ – довільні функції, то немає загальних методів знаходження розв'язків рівнянь такого типу. Далі ми розглянемо рівняння, де $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ – сталі. Такі рівняння називаються ***рівняннями зі сталими коефіцієнтами***.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Нехай маємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{75}$$

де p та q – сталі.

Відповідно до теореми 50, для знаходження загального розв'язку цього рівняння достатньо знати його два лінійно незалежні частинні розв'язки. Шукатимемо частинні розв'язки рівняння (75) у вигляді $y = e^{kx}$. Тоді $y' = ke^{kx}$, та $y'' = k^2e^{kx}$. Підставляючи отримані вирази для похідних в (75), отримаємо:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0 \quad \text{або} \quad k^2 + pk + q = 0. \tag{76}$$

Рівняння (76) називається ***характеристичним рівнянням***. Позначимо його корені через k_1 та k_2, тобто

$$k_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \qquad k_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Очевидно, що $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$ є частинними розв'язками рівняння (75).

Розглянемо три можливі випадки.

1. Корені характеристичного рівняння є дійсними та різними, тобто $k_1 \neq k_2$**.** Тоді маємо два лінійно-незалежні частинні розв'язки рівняння (75):

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ та } y_2 = e^{k_2 x}, \text{ оскільки}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}.$$

Отже, $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ буде загальним розв'язком рівняння (75).

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 2y' - 8y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння матиме вигляд: $k^2 + 2k - 8 = 0$. Його корені $k_1 = 2$ та $k_2 = -4$. Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння матиме вигляд: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$.

2. Корені характеристичного рівняння є дійсними та рівними, тобто $k_1 = k_2$**.** В цьому випадку частинні розв'язки $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = e^{k_2 x}$ лінійно залежні, оскільки $\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_1 x}} = 1$.

Отже, перший частинний розв'язок – $y_1 = e^{k_1 x}$, а другий ми повинні знайти з умови, що $\frac{y_2}{y_1} \neq \text{const}$. Неважко переконатися, що у цьому випадку $(k_2 = k_1)$ функція $xe^{k_1 x}$ задовольняє рівняння (75). Отже, $y_2 = xe^{k_1 x}$ буде другим лінійно незалежним розв'язком рівняння (75), а загальний розв'язок матиме вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x} = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x).$$

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$ $k_1 = k_2 = 3$.

Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = e^{3x}(C_1 + C_2 x).$$

3. Корені характеристичного рівняння є комплексними. У математиці $\sqrt{-1}$ прийнято позначати літерою i і називають ***уявною одиницею***, а вирази виду $a + bi$, де a і b – дійсні числа, називати ***комплексними числами***. Комплексні числа $a + bi$ та $a - bi$ називають ***комплексно спряженими***. У квадратного рівняння $k^2 + pk + q = 0$ у разі, коли його дискримінант $p^2 - 4q$ від'ємний, коренями будуть комплексно спряжені числа

$$-\frac{p}{2} + \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i, \qquad -\frac{p}{2} - \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2} i.$$

У випадку, коли дискримінант характеристичного рівняння (76) є від'ємним, частинними лінійно незалежними розв'язками рівняння (75) будуть: $y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, де $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}$. Тому загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x).$$

Приклади.

1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + 10y = 0.$$

Розв'язання. Знаходимо корені характеристичного рівняння

$$k^2 - 2k + 10 = 0: \quad k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 10} = 1 \pm 3i.$$

Загальний розв'язок $y = e^x (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$.

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 2y' + 17y = 0,$$

що задовольняє початковим умовам: $y\Big|_{x=0} = 0$, $y'\Big|_{x=0} = 1$.

Розв'язання. Коренями характеристичного рівняння $k^2 + 2k + 17 = 0$ є $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 17} = -1 \pm 4i$.

Загальний розв'язок $y = e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$.

При $x = 0$ маємо $0 = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0$, звідки $C_2 = 0$. Отже, загальний розв'язок має вигляд $y = C_1 \cdot e^{-x} \sin 4x$. Знаходимо y':

$$y' = -C_1 \cdot e^{-x} \sin 4x + 4C_1 \cdot e^{-x} \cos 4x = C_1 \cdot e^{-x} (4 \cos 4x - \sin 4x).$$

При $x=0$ повинна виконуватися рівність: $1=C_1\cdot e^0(4\cos 0-\sin 0)$, звідки $C_1=\frac{1}{4}$.

Шуканий частинний розв'язок $y=\frac{1}{4}e^{-x}\sin 4x$.

6. РЯДИ

6.1. Поняття числового ряду

Нехай задано нескінченну послідовність чисел $U_1, U_2,\ldots, U_n,\ldots$.

Числовим рядом (або просто ***рядом***) називається нескінченна сума

$$U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}U_k. \qquad (77)$$

Числа $U_1, U_2,\ldots,U_n,\ldots$ називаються ***членами ряду***, при цьому U_n називається ***загальним членом ряду***. Щоб скласти ряд, необхідно задати закон, за яким обчислюється загальний член U_n ряду.

Так, якщо $U_n=\frac{1}{n^2}$, то ряд (77) матиме вигляд :

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Сума перших n членів ряду (77) називається ***частковою сумою*** цього ряду і зазвичай позначається S_n:

$$S_n=U_1+U_2+\ldots+U_n=\sum_{k=1}^{n}U_k. \qquad (78)$$

Вираз $U_{n+1}+U_{n+2}+\ldots=\sum_{k=n+1}^{\infty}U_k$, який утворюється із ряду (77) шляхом відкидання перших n членів, називається ***залишком ряду*** і зазвичай позначається R_n. Ряд (77) називається ***збіжним***, якщо при $n\to\infty$ існує скінченна границя $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. Цю границю S називають ***сумою ряду*** (77) і пишуть:

$$U_1+U_2+\ldots+U_n+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}U_k=S.$$

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не існує або $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, то говорять, що ряд (77) ***розбігається***.

Як приклад розглянемо ряд, члени якого є членами геометричної прогресії:

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + aq^{n-1} + \ldots. \qquad (79)$$

Сума перших n членів цього ряду при $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

Якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}$, або

$a + aq + \ + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \frac{a}{1-q}$. Отже, якщо $|q| < 1$, то ряд (79) збігається і його сума дорівнює $\frac{a}{1-q}$.

Якщо $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \infty$. Отже, якщо $|q| > 1$, то ряд (79) розбігається.

Якщо $q = 1$, то ряд (79) набуває вигляду: $a + a + \ldots + a + \ldots$. Тому $S_n = na$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, тобто ряд розбігається.

Якщо $q = -1$, то ряд (79) набуває вигляду: $a - a + a - a + \ldots$. У цьому випадку $S_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n - \text{парне}, \\ a, & \text{якщо } n - \text{непарне}. \end{cases}$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, тобто ряд розбігається. Таким чином, ряд виду (79) збігається тоді і тільки тоді, коли $|q| < 1$.

Розглянемо ще один приклад:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots.$$

Покажемо, що цей ряд збігається. Дійсно, через очевидну рівність $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, будемо мати

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

Отже, наш ряд збігається та його сума дорівнює одиниці.

Зазначимо кілька простих властивостей рядів, що випливають безпосередньо з означення збіжності ряду та властивостей границь послідовностей.

1. Відкидання (додавання) скінченної кількості членів ряду не впливає на збіжність ряду.

2. Якщо $C \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} CU_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. Причому, якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n = S$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} CU_n = CS = C\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$.

3. Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n$ збігаються і їх суми відповідно дорівнюють S_1 та S_2, то ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(U_n \pm V_n\right)$, що називаються відповідно сумою і різницею даних рядів, також збігаються, при цьому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(U_n \pm V_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} V_n = S_1 \pm S_2.$$

6.2. Необхідна ознака збіжності ряду

При дослідженні рядів одним із основних питань є питання про те, збігається чи розбігається даний ряд. Необхідна умова збіжності ряду полягає в наступному.

Теорема 51. Якщо ряд (77) збігається, то за необмеженого зростання n його загальний член U_n прямує до нуля.

Доведення. Нехай ряд (77) збігається та його сума дорівнює *S*. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} U_k = S$. Зрозуміло, що тоді має місце і така рівність: $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} U_k = S$.

З іншого боку, $S_n - S_{n-1} = U_n$. Тому:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Теорему доведено.

З цієї теореми випливає наступне.

Наслідок. Якщо при необмеженому зростанні n загальний член U_n ряду (77) не прямує до нуля, то ряд (77) розбігається. Так, наприклад, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3k+1}$ розбігається, оскільки

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+1} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

тобто не виконано необхідну умову збіжності ряду.

Зауважимо, що якщо загальний член U_n ряду (77) прямує до нуля при $n \to \infty$, то це ще не означає, що ряд (77) збігається.

Розглянемо, наприклад, так званий ***гармонійний ряд***:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad (80)$$

Очевидно, що для нього необхідна ознака збіжності ряду виконується:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Покажемо, що ряд (80) розбігається. Для цього розглянемо ряд (80)

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

та допоміжний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

Допоміжний ряд отримано з ряду (80) шляхом заміни $\frac{1}{3}$ на $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$ на $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{15}$ на $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \ldots, \frac{1}{31}$ на $\frac{1}{32}$ тощо. Позначимо через $S_n^{(1)}$ та $S_n^{(2)}$ відповідно часткові суми гармонійного та допоміжного рядів. Очевидно, що при $n > 2$

$$S_n^{(1)} > S_n^{(2)}. \qquad (81)$$

З іншого боку, як неважко побачити:

$$S_2^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}, \qquad S_4^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_8^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_{16}^{(2)} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2},$$

$$S_{2^k}^{(2)} = 1 + k \cdot \frac{1}{2}.$$

Отже, часткова сума $S_n^{(2)}$ може бути зроблена як завгодно великою, якщо взяти достатньо велике n, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \infty$.

Тому з (81) випливає $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \infty$, тобто гармонійний ряд розбігається.

6.3. Достатні ознаки збіжності знакосталих рядів

Числовий ряд (77) називається ***знакосталим***, якщо всі його члени мають однакові знаки.

Розглянемо ряд ознак, що дозволяють зробити висновок про збіжність (або розбіжність) ряду з невід'ємними членами, які сформульовані у вигляді теорем, доведення яких наводити не будемо.

Нехай дані два ряди з додатними членами:

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k = U_1 + U_2 + \ldots + U_n + \ldots, \tag{82}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} V_k = V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots. \tag{83}$$

Теорема 52 (ознака порівняння рядів). Якщо члени ряду (82) не більше за відповідні члени ряду (83), тобто.

$$U_n \le V_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{84}$$

тоді, якщо збігається ряд (83), то збігається і ряд (82); якщо ряд (82) розбігається, то розбігається і ряд (83).

Зауваження. Теорема 52 залишається справедливою і у тому випадку, коли умова (84) виконується для всіх n, починаючи з деякого номера p, тобто для $n = p,\ p+1,\ \ldots$.

Приклади.

1. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \ldots.$

Розв'язання. Порівняємо наш ряд з рядом:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

який, очевидно, збігається, тому що є сумою членів нескінченно спадної геометричної прогресії. Через очевидну нерівність $\frac{1}{n^n}<\frac{1}{2^n}\quad (n>2)$ і зауваження до теореми 52 робимо висновок, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^k}$ збігається.

2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots.$

Розв'язання. Оскільки члени цього ряду не менші за відповідні члени гармонійного ряду $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, який, як було встановлено вище, розбігається, то наш ряд також розбігається.

Теорема 53 (ознака Даламбера). Якщо для ряда $\sum_{k=1}^{\infty}U_k$ з додатними членами відношення $(n+1)$-го члена до n-го при $n\to\infty$ має границю l, тобто $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=l$, то:

1) якщо $l<1$ – ряд збігається;
2) якщо $l>1$ – ряд розбігається;
3) якщо $l=1$ – потрібні додаткові дослідження.

Таким чином, ознака Даламбера дає відповідь на питання про те, чи збігається цей знакосталий ряд, тільки в тому випадку, коли $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$ існує і відрізняється від одиниці. Якщо ж ця границя дорівнює одиниці або не існує, то ознака Даламбера не дає можливості встановити, збігається ряд або розбігається. У цьому випадку необхідно застосувати якусь іншу ознаку.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$.

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1,$$

то, за ознакою Даламбера, цей ряд збігається.

Теорема 54 (радикальна ознака Коші). Якщо для ряду $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ з додатними членами величина $\sqrt[n]{U_n}$ має при $n \to \infty$ границю l, тобто $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = l$, то:

1) якщо $l < 1$ – ряд збігається;
2) якщо $l > 1$ – ряд розбігається;
3) якщо $l = 1$ – потрібні додаткові дослідження.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k$.

Розв'язання. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$

Отже, ряд збігається.

Теорема 55 (інтегральна ознака Коші). Якщо функція $f(x)$, визначена за всіх $x \geq 1$, невід'ємна і монотонно спадає, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ збігається тоді і тільки тоді, коли збігається невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$.

Розв'язання. Очевидно , що функція $f(x) = \frac{1}{x^p}$ задовольняє всім вимогам теореми 55. Розглянемо невласний інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$. Оскільки

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^b = \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - 1), & \text{при } p \neq 1, \\ \ln x \Big|_1^b = \ln b, & \text{при } p = 1, \end{cases}$$

то при $p > 1$

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - 1) = \frac{1}{1-p} \cdot \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1},$$

тобто невласний інтеграл збігається.

Отже, при $p>1$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ збігається.

Якщо $p<1$, то $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^p}=\lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-1)=\infty$, і, значить, ряд розбігається.

Якщо ж $p=1$, то $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to+\infty}\ln b=\infty$, а це означає, що ряд розбігається.

Таким чином, розглянутий ряд збігається лише у випадку $p>1$.

6.4. Знакопереміжні ряди

Ряд, члени якого мають знаки, що чергуються, тобто ряд виду

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}U_k=U_1-U_2+U_3-U_4+...+(-1)^nU_n+..., \qquad (85)$$

де $U_1,U_2,...,U_n,...$ додатні, називається ***знакопереміжним*** рядом. Достатня ознака збіжності такого ряду виражається наступною теоремою.

Теорема (ознака) Лейбніца. Якщо в знакопереміжному ряді (85) члени такі, що

$$U_1>U_2>U_3>...>U_n>... \qquad (86)$$

та $$\lim_{n\to\infty}U_n=0, \qquad (87)$$

то ряд (85) збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+....$$

Розв'язання. Оскільки $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...$ і $\lim\limits_{n\to\infty}U_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$; то, згідно з теоремою Лейбниця, цей ряд збігається.

На закінчення відзначимо, що залишок R_n ряду (85)

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^kU_k=(-1)^nU_{n+1}+(-1)^{n+1}U_{n+2}+...=(-1)^n(U_{n+1}-U_{n+2}+...)$$

по абсолютній величині менше U_{n+1}, тобто $|R_n|<U_{n+1}$. Дійсно,

$$|R_n| = \left|(-1)^n \left(U_{n+1} - U_{n+2} + U_{n+3} - U_{n+4} + ...\right)\right| =$$

$$= \left|U_{n+1} - U_{n+2} + U_{n+3} - U_{n+4} + ...\right| =$$

$$= \left|U_{n+1} - (U_{n+2} - U_{n+3}) - \left(U_{n+4} - U_{n+5}\right) - ...\right|.$$

Тому, враховуючи (86), отримуємо $|R_n| < U_{n+1}$.

6.5. Знакозмінні ряди

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ називається знакозмінним, якщо серед його членів $U_1, U_2, ..., U_n, ...$ є як додатні, так і від'ємні. Очевидно, що знакопереміжний ряд є окремим випадком знакозмінного ряду. Наведемо одну достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.

Теорема 56. Якщо знакозмінний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ такий, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |U_k|$, складений з абсолютних величин його членів, збігається, то і даний знакозмінний ряд також збігається.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\alpha}{k^2} = \frac{\cos \alpha}{1} + \frac{\cos 2\alpha}{2^2} + ... + \frac{\cos n\alpha}{n^2} + ..., \qquad (88)$$

де α – будь-яке число.

Розв'язання. Разом із даним рядом розглянемо ряди:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos k\alpha|}{k^2} = \frac{|\cos \alpha|}{1} + \frac{|\cos 2\alpha|}{2^2} + ... + \frac{|\cos n\alpha|}{n^2} + ..., \qquad (89)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ... \qquad (90)$$

Раніше було показано (див. інтегральну ознаку Коші), що ряд (90) збігається. Оскільки члени ряду (89) не перевищують відповідних членів ряду (90), то, відповідно до ознаки порівняння рядів (теорема 52), ряд (89) також збігається. Тоді, на підставі теореми 56, збігається і ряд (88).

Знакозмінний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ називають ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |U_k|$, складений з абсолютних величин його членів. Так, ряд

(88) збігається абсолютно. Якщо ж знакозмінний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ збігається, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |U_k| = |U_1| + |U_2| + \ldots + |U_n| + \ldots$ розбігається, то знакозмінний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ називається ***умовно*** або ***неабсолютно збіжним*** рядом. Так, наприклад, знакозмінний ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

є умовно збіжним, оскільки ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ складений з абсолютних величин його членів (гармонічний ряд), розбігається.

За допомогою поняття абсолютної збіжності ряду теорему 56 можна сформулювати коротко так: будь-який абсолютно збіжний ряд збігається.

6.6. Степеневі ряди

Функціональні ряди. Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots, \qquad (91)$$

члени якого є функціями від x. Такий ряд називається ***функціональним***. Надаючи x різних числових значень, будемо отримувати різні числові ряди, які можуть бути збіжними або розбіжними. Сукупність усіх тих значень x, за яких числовий ряд, отриманий із ряду (91), збігається, називається ***областю збіжності функціонального ряду*** (91). Очевидно, що в області збіжності ряду (91) його сума є певною функцією від x, яку зазвичай позначають через $S(x)$ (або $f(x)$):

$$S(x) = U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots .$$

У цьому випадку також говорять, що функція $S(x)$ ***розкладається в ряд***.

Через $S_n(x)$, аналогічно випадку числового ряду, позначають суму n перших членів ряду (91): $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x)$, а через $R_n(x)$ – залишок ряду: $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x)$.

Очевидно, що якщо ряд (91) збігається і його сума дорівнює $S(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \qquad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Інтервал збіжності степеневого ряду.

Степеневим рядом називається функціональний ряд виду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ..., \qquad (92)$$

де $a_0, a_1, a_2, .., a_n, ...$ – сталі, які називаються ***коефіцієнтами ряду*** (92).

Областю збіжності степеневого ряду є деякий інтервал $(-R, R)$ із центром у початку координат, який називається ***інтервалом збіжності***.

Число R називається ***радіусом збіжності*** ряду (92). Інтервал збіжності може вироджуватися в точку ($R = 0$) або збігатися з усією числовою віссю $(R = \infty)$.

Теорема 57. Якщо при $n \to \infty$ існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$, то ряд (92) абсолютно збігається при $|x| < R$ і розбігається при $|x| > R$.

Зауваження. На кінцях інтервалу (тобто при $x = \pm R$) питання збіжності ряду (92) вирішується індивідуально для кожного конкретного ряду.

Приклади.

1. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + x + x^2 + ... + x^n + ... \qquad (93)$$

Розв'язання. Визначимо радіус збіжності. Оскільки $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = \ldots = 1$, то, згідно з теоремою 57, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1} = 1$. Досліджуємо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x = \pm 1$.

При $x = 1$ степеневий ряд (93) перетворюється на числовий ряд $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$, який, очевидно, розбігається.

При $x = -1$ отримуємо ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots$, який теж розбігається.

Отже, ряд (93) абсолютно збігається на інтервалі (–1, 1). На кінцях інтервалу збіжності, тобто при $x = \pm 1$ ряд розбігається.

2. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + ... \qquad (94)$$

Розв'язання. Очевидно, що $a_n = \dfrac{1}{n}$. Тому

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$$

При $x = 1$ маємо ряд $1 + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$, що розбігається.

При $x=-1$ одержуємо ряд $1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots$, який збігається згідно з ознакою Лейбниця. Ряд, складений з абсолютних величин членів останнього ряду, розбігається.

Тому, ряд (94) при $|x|<1$ збігається абсолютно, при $x=-1$ – умовно, при $x=1$ – розбігається, тобто ряд збігається на проміжку $[-1,1)$.

3. Дослідити на збіжність ряд: $x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$.

Розв'язання. $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$.

Отже, ряд абсолютно збігається за всіх значень $x\in(-\infty,+\infty)$.

4. Дослідити на збіжність ряд

$$x+(2x)^2+(3x)^3+\ldots+(nx)^n+\ldots.$$

Розв'язання. Очевидно, що $a_n=n^n$. Тому

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}=e^{-1}\cdot 0=0.$$

Отже, ряд збігається лише за $x=0$.

6.7. Диференціювання та інтегрування степеневих рядів

Нехай дано степеневий ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots. \tag{95}$$

Розглянемо ряд

$$a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots, \tag{96}$$

отриманий із ряду (95) почленним диференціюванням, та ряд

$$a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\ldots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\ldots, \tag{97}$$

отриманий із ряду (95) почленним інтегруванням.

Має місце така теорема.

Теорема 58. Ряди (95), (96) і (97) мають один і той же інтервал збіжності $(-R,R)$. Причому якщо $S(x)$, $S_1(x)$ і $S_2(x)$ відповідно суми цих рядів, то

$$S_1(x)=S'(x),\ S_2(x)=\int_0^x S(t)dt. \tag{98}$$

Проілюструємо застосування цієї теореми з прикладу.

Приклад. Знайти суму $S(x)$ ряду

$$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots. \tag{99}$$

Розв'язання. Розглянемо ряд

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots, \tag{100}$$

отриманий із ряду (99) почленним диференціюванням. Раніше було показано (приклади 1, 2), що радіуси збіжності рядів (99) та (100) дорівнюють одиниці. Очевидно, що при $|x|<1$ сума $S_1(x)$ ряду (100), як сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії, дорівнює $\frac{1}{1-x}$, тобто $S_1(x)=\frac{1}{1-x}$. Тому, на підставі першої з рівностей (98), маємо $S_1(x)=S'(x)=\frac{1}{1-x}$, звідки $S(x)=\int\limits_0^x \frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$.

6.8. Ряди за степенями $x-a$

Функціональний ряд виду

$$a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots, \tag{101}$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – сталі, також називається ***степеневим рядом***. Цей ***ряд*** записано ***за степенями*** $x-a$. Степеневий ряд виду (92) є окремим випадком ($a=0$) степеневого ряду (101).

Для визначення інтервалу збіжності ряду (101) необхідно попередньо зробити заміну:

$$x-a=y. \tag{102}$$

Тоді ряд (101) набуде вигляду $a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots+a_ny^n+\ldots$.

Нехай $(-R,R)$ – інтервал збіжності останнього ряду. Тоді, в силу (102) інтервал збіжності ряду (101) визначатиметься з умови: $|x-a|<R$ або $-R<x-a<R$. Отже, інтервал збіжності ряду (101) буде $(a-R, a+R)$.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\ldots+\frac{(x-1)^n}{n}+\ldots.$$

Розв'язання. Зробивши заміну $x-1=y$, отримаємо ряд

$$y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\ldots+\frac{y^n}{n}+\ldots,$$

який абсолютно збігається на інтервалі (–1, 1), тобто при $|y|<1$.

Тому вихідний ряд абсолютно збігається, коли $|x-1|<1$ або $0<x<2$; при $x=0$ вихідний ряд збігається умовно; при $x=2$ – розбігається.

Отже, проміжок збіжності нашого ряду – $[0, 2)$.

6.9. Ряди Тейлора та Маклорена

Як відомо із диференціального числення, якщо функція $f(x)$ має всі похідні до $(n+1)$-го порядку включно в деякому околі точки $x=a$, то справедлива ***формула Тейлора*** :

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x), \qquad (103)$$

де $R_n(x)$ – залишковий член формули Тейлора.

Нагадаємо, що залишковий член $R_n(x)$ формули Тейлора може бути подано у формі Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Якщо функція $f(x)$ в околі точки a має похідні всіх порядків, тобто нескінченно диференційовна, і якщо

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0, \qquad (104)$$

то, переходячи у формулі Тейлора (103) до границі при $n\to\infty$, отримаємо ***розкладання функції*** $f(x)$ у ряд Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots.$$

Підкреслимо, що ряд Тейлора нескінченно диференційованої функції $f(x)$ збігається до цієї функції тільки тоді, коли виконується умова (104).

З ряду Тейлора при $a=0$ отримуємо ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\ldots.$$

ДОДАТКИ

Деякі сталі

$\pi = 3{,}14159$; $e = 2{,}71828$; $\ln\pi = 1{,}14473$;

$\pi^2 = 9{,}8696$; $e^2 = 7{,}3891$; $\sqrt{2} = 1{,}41421$;

$\sqrt{\pi} = 1{,}77245$; $\sqrt{e} = 1{,}64872$; $\sqrt{3} = 1{,}73205$.

$\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$; $\frac{1}{e} = 0{,}36788$;

Основні формули алгебри

$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$; $a^b : a^c = a^{b-c}$;

$(a^b)^c = a^{bc}$; $\sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}$; $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$;

$a - b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$;

$a - b = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}\right)$;

$a + b = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}\right)$.

Корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Розкладання квадратного тричлена на множники:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 та x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Арифметична прогресія

$a_{n+1} = a_n + d$ (означення арифметичної прогресії),

$a_n = a_1 + d(n-1)$ (формула n - го члена),

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ (формула суми перших n членів).

Геометрична прогресія

$b_{n+1} = b_n q$, $b_1 \neq 0, q \neq 0$ (означення геометричної прогресії),

$b_n = b_1 q^{n-1}$ (формула n-го члена),

$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ (формула суми перших n членів),

$S = \frac{b_1}{1-q}$ (формула суми нескінченної геометричної прогресії при $|q| < 1$).

Логарифми

$a^{\log_a b} = b (0 < a \neq 1, b > 0)$; $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$;

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$; $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$;

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} (0 < c \neq 1)$ (формула переходу до нової основи).

Основні тригонометричні формули

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}; \qquad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

Знаки тригонометричних функцій за чвертями

Функція / Чверть	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

Деякі значення тригонометричних функцій

Функція / Аргумент	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
0	0	1	0	–
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0
π	0	-1	0	–

Формули зведення

Функція / Аргумент	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

Основні формули диференціального числення

Похідна: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Основні правила диференціювання

Якщо c – стала, а $u(x)$ і $v(x)$ – диференційовні функції, то:

1) $c' = 0$; 2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 3) $(cu)' = cu'$;

4) $(uv)' = u'v + uv'$; 5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

6) $\left(f\left(u(x)\right)\right)' = f'_u \cdot u'_x$.

Основні формули диференціювання (u – функція від x)

1) $\left(u^a\right)' = au^{a-1} \cdot u'$; зокрема: $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

2) $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$; зокрема: $\left(e^u\right)' = e^u u'$;

3) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$; зокрема: $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$;

4) $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$; 5) $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$; 6) $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

7) $\left(\operatorname{ctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$; 8) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

9) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 10) $\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

11) $\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Основні формули інтегрального числення

Невизначений інтеграл

$\int f(x)dx = F(x) + C$, $F'(x) = f(x)$.

Властивості невизначеного інтеграла (правила інтегрування)

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. 2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$. 4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

5. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Таблиця основних інтегралів

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (якщо $\alpha \neq -1$).

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)| + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.

10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$.

11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C \\ -\arccos\frac{x}{a} + C \end{cases}$.

15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$.

16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\ \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\ \frac{x}{a} + C \end{cases}$.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Михайленко, В. Г., Свіщова, Є. В. (2026). *Математичний аналіз: практикум*. Харків: Вид-во НУА, 108 с.

2. Барковський, В. В., Барковська, Н. В. (2020). *Вища математика для економістів*. Київ: Центр навчальної літератури, 448 с.

3. Валєєв, К. Г.,Джалладова, І. А. та Дегтяр, С. В. (2021). *Вища математика для економістів*. Київ: Знання, 287 с.

4. Васильченко, І. П. *Вища математика для економістів*. (2022). Київ: Знання, 341 с.

5. Зайцев, Є. П. (2021). *Вища математика*. Київ: Алерта, 608 с.

6. Клепко, В. Ю., Голець, В. Л. (2019). *Вища математика в прикладах і задачах*. Київ: Центр навчальної літератури, 594 с.

7. Литвин, І. І., Конончук, О. М. та Железняк, Г. О. (2019). *Вища математика*. Київ: Центр навчальної літератури, 368 с.

8. Макаренко, В. О. (2022). *Вища математика для економістів*. Київ: Знання, 517 с.

9. Турчанінова, Л. І., Доля, О. В. (2020). *Вища математика в прикладах і задачах*. Київ: Ліра-К, 348 с.

10. Фортуна, В. В., Бескровний, О. І. (2022). *Вища та прикладна математика*. Львів: Магнолія-2006, 647 с.

11. Чеберяк О. Г.,Кузубов, В. В. та Свистун, Л. О. (2021). *Математика для економістів. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння*. 2-ге вид. Київ: Самміт-книга, 287 с.

ЗМІСТ

Вступ 3
1. Вступ до аналізу 5
1.1. Дійсні числа та їх основні властивості 5
1.2. Функціональна залежність 7
1.3. Поняття границі 10
1.4. Основні теореми про границі 15
1.5. Границя функції 16
1.6. Чудові границі 21
1.7. Неперервність функції 24
2. Диференціальне числення функції однієї змінної 29
2.1. Похідна 29
2.2. Геометричний, механічний та економічний зміст похідної 32
2.3. Основні властивості похідної 34
2.4. Основні формули диференціювання 39
2.5. Диференціювання неявної функції 40
2.6. Логарифмічна похідна 40
2.7. Похідна функції, що задана параметрично 41
2.8. Похідні вищих порядків 42
2.9. Диференціал функції 42
2.10. Основні теореми про диференційовані функції та їх застосування 44
2.11. Зростання (спадання) функції 51
2.12. Локальний екстремум функції 52
2.13. Глобальний екстремум функції 57
2.14. Опуклість графіка функції. Точки перегину 58
2.15. Асимптоти графіка функції 60
2.16. Побудова графіків функцій 62
3. Диференціальні функції багатьох змінних 66
3.1. Поняття функції багатьох змінних 66
3.2. Границя та неперервність функції багатьох змінних 68
3.3. Частинні похідні та диференційовність функцій багатьох змінних 70
3.4. Похідна за напрямом. Градієнт 74
3.5. Частинні похідні вищих порядків 78
3.6. Необхідна умова локального екстремуму функції багатьох змінних 79
3.7. Достатні умови локального екстремуму функції двох змінних 80
3.8. Умовний екстремум 82
3.9. Глобальний екстремум функції в обмеженій замкненій області 85
3.10. Побудова емпіричних форму методом найменших квадратів 87
4. Інтегральне числення 93
4.1. Первісна функція та невизначений інтеграл 93
4.2. Основні властивості невизначеного інтеграла 95
4.3. Таблиця основних інтегралів 95
4.4. Основні методи інтегрування 97

4.5. Поняття визначеного інтеграла 100
4.6. Основні властивості визначеного інтеграла 102
4.7. Геометричний зміст визначеного інтеграла 104
4.8. Обчислення визначеного інтеграла 105
4.9. Обчислення площ 110
4.10. Невласні інтеграли 113
5. Диференціальні рівняння 116
5.1. Основні поняття та означення 116
5.2. Диференціальні рівняння першого порядку 117
5.3. Диференціальні рівняння другого порядку 122
6. Ряди 126
6.1. Поняття числового ряду 126
6.2. Необхідна ознака збіжності ряду 128
6.3. Достатні ознаки збіжності знакосталих рядів 130
6.4. Знакопереміжні ряди 133
6.5. Знакозмінні ряди 134
6.6. Степеневі ряди 135
6.7. Диференціювання та інтегрування степеневих рядів 137
6.8. Ряди за степенями $x - a$ 138
6.9. Ряди Тейлора та Маклорена 139
Додатки 140
Список літератури 146

Навчальне видання

МИХАЙЛЕНКО Віталій Григорович
СВІЩОВА Євгенія Віталіївна

Т

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник

В авторській редакції
Комп'ютерний набір і верстка Є. В. Свіщова

Підписано до друку Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Гарнітура «Таймс».
Ум. друк. арк. 8,85. Обл.-вид. арк. 6,22.
Тираж 300 пр. Зам №

План 2026/27 навч. р., поз. №1 у переліку робіт кафедри .

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво №1153 від 16.12.2002.

Надруковано у видавництві Народної української академії

Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Майка Йогансена, 27