

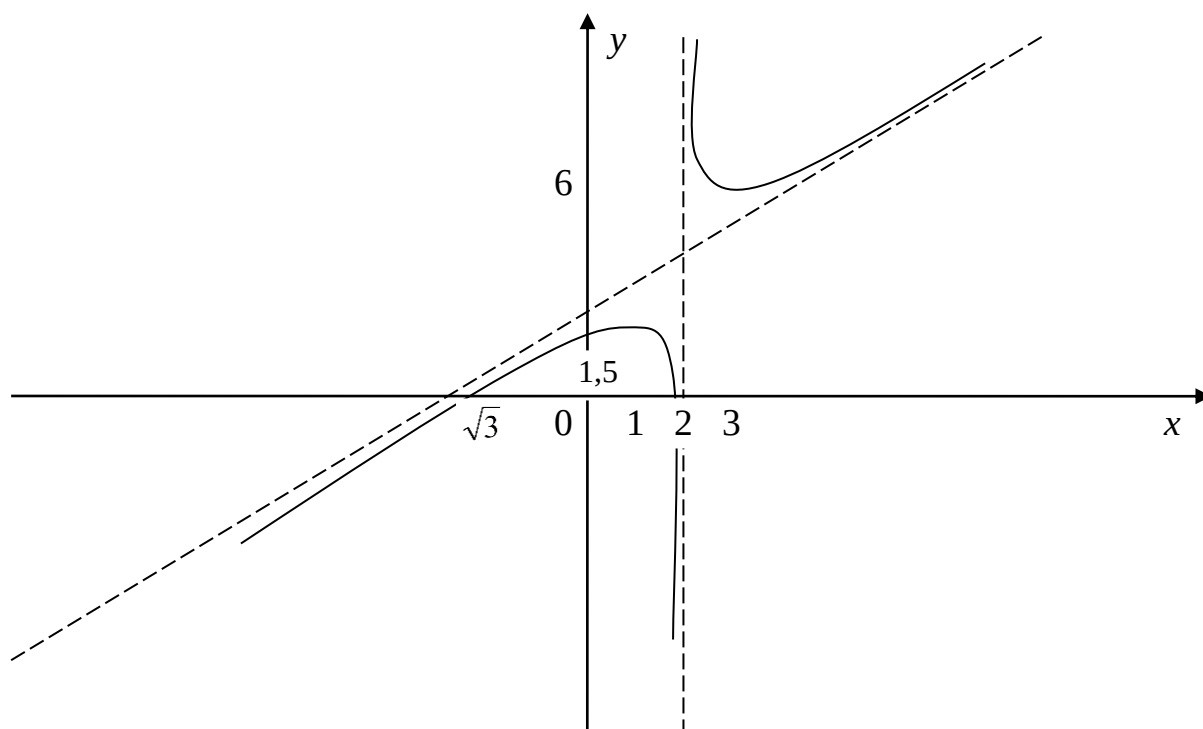


НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

В. Г. Михайленко, Є. В. Свіщова

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

ПРАКТИКУМ



Видавництво НУА

НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

В. Г. Михайленко, Є. В. Свіщова

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

ПРАКТИКУМ

Харків
Видавництво НУА
2026

УДК 517(075.8+076.1)

М69

*Затверджено на засіданні
кафедри інформаційних технологій та математики.
Протокол №2 від 22.09.2025*

Рецензент канд. фіз.-мат. наук *О. Г. Ніколаєва*
(ХНУ ім. В. Н. Каразіна)

Посібник містить задачі, які відносяться до розділу «Математичний аналіз». На початку кожного параграфа наведено необхідні короткі теоретичні відомості (означення, формули тощо). Більшість задач мають вказівки щодо їх розв'язання, докладно розбираються типові приклади.

Михайленко, Віталій Григорович .

М69

Математичний аналіз : практикум / В. Г. Михайленко, Є. В. Свіщова ; Нар. укр. акад. ; каф. інформ. технологій та математики. – Харків: Вид-во НУА, 2026. – 108 с.

УДК 517(075.8+076.1)

© Народна українська академія, 2026

ВСТУП

Перехід до ринкових відносин призвів до необхідності підготовки економістів та соціологів, які досконало володіють математичним апаратом економічних та соціологічних досліджень і вміють застосувати його на практиці.

У вивченні математики зазвичай найбільші труднощі викликає розв'язання завдань. Мета цього посібника – заповнити певною мірою цю прогалину, допомогти студентам навчитися самостійно розв'язувати основні типи задач математичного аналізу.

Навчальний посібник охоплює такі розділи: введення в аналіз (границя і неперервність), диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних, інтегральне числення (невизначений та визначений інтеграл), диференціальні рівняння та ряди.

Увесь матеріал посібника поділено на окремі параграфи. На початку кожного параграфа вміщено означення, теореми, формули та інші короткі відомості з теорії та методичні вказівки, необхідні для розв'язання наступних задач. Потім наводяться докладні розв'язання типових задач із короткими поясненнями теоретичних положень. Наприкінці кожного параграфа міститься достатня кількість задач для самостійного розв'язання.

Така побудова навчального посібника дозволяє використовувати його як для роботи під керівництвом викладача, так і для самостійного вивчення зазначених розділів курсів «Вища математика» та «Математика для соціологів».

Студенти отримають велику користь, якщо працюватимуть над посібником активно. Це означає, що перш ніж розпочати розв'язання задач, слід ґрунтовно вивчити теоретичний матеріал, що належить до відповідного параграфу та уважно розібрати розв'язані задачі. Ще краще, якщо студенти, засвоївши теорію, відразу почнуть самостійно розв'язувати задачі, звертаючись до розв'язань у тексті лише у разі труднощів.

Для зручності роботи з посібником деякі основні правила та формули елементарної математики, а також розглянутих розділів математичного аналізу наведено окремо у вигляді Додатка та поміщено наприкінці посібника. Там же розміщено список рекомендованої літератури, яка може бути використана студентами для більш детального вивчення курсу.

Посібник написаний у повній відповідності до програм курсів «Вища математика» та «Математика для соціологів». Він розрахований як на студентів очної форми навчання, так і на студентів-заочників.

Таким чином, цей посібник може бути використаний як довідник, розв'язник і в той же час як задачник, що дуже зручно для студентів і надає їм широкі можливості для активної самостійної роботи.

1. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ

1.1. Дійсні числа та їх основні властивості

Множина дійсних чисел складається з раціональних та ірраціональних чисел. Раціональним називається число, яке можна представити у вигляді дробу $\frac{p}{q}$, де p і q – цілі числа, причому $q \neq 0$. Ірраціональними називаються числа, які не є раціональними.

Будь-які два дійсні числа a і b пов'язані одним із наступних співвідношень: $a = b$, або $a > b$, або $a < b$. Якими б не були числа a, b і c :

- 1) якщо $a = b$ і $b = c$, то $a = c$;
- 2) якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$.

Властивості арифметичних дій

Якими б не були числа a, b і c :

- 1) $a + 0 = a$; $a + b = b + a$; $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$;
- 2) $ab = ba$; $(ab) \cdot c = a \cdot (bc) = a \cdot b \cdot c$; $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$; $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$;
- 3) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;
- 4) якщо $a < b$, то $a + c < b + c$;
- 5) якщо $a < b$ і $c > 0$, то $ac < bc$; якщо ж $c < 0$, то $ac > bc$;
- 6) якщо $a \neq 0$, то $\frac{1}{a} = a^{-1}$; $\frac{a}{a} = 1$; $\frac{0}{a} = 0$; $a^0 = 1$;
- 7) $(a^b)^c = a^{bc}$, $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$, $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$;

Абсолютною величиною (або **модулем**) числа a називається саме число a , якщо $a \geq 0$, і число $-a$, якщо $a < 0$. Абсолютна величина числа a позначається символом $|a|$.

Таким чином:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$$

Абсолютна величина числа має такі властивості:

$$|a| \geq 0; \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0; \quad |-a| = |a|, \quad -|a| \leq a \leq |a|, \quad |a \pm b| \leq |a| + |b|;$$
$$|ab| = |a| \cdot |b|; \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ (якщо } b \neq 0); \quad \sqrt{a^2} = |a|, \quad |a|^2 = a^2.$$

Якщо $\varepsilon > 0$, то нерівності $|a| < \varepsilon$ і $-\varepsilon < a < \varepsilon$ рівносильні (еквівалентні).

Числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ утворюють арифметичну прогресію, якщо $a_{k+1} = a_k + d$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Число d називається різницею арифметичної

прогресії. Загальний член прогресії $a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$; сума n членів арифметичної прогресії: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$.

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ утворюють геометричну прогресію, якщо $a_{k+1} = a_1 q^k$ ($a_1 \neq 0, q \neq 0$) $k=1, 2, \dots, n-1$. Число q називається знаменником геометричної прогресії. Загальний член прогресії $a_k = a_1 q^{k-1}$, сума n членів геометричної прогресії: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Для нескінченно спадної геометричної прогресії

($|q| < 1$) сума членів прогресії $S = \frac{a_1}{1 - q}$.

Розв'язком рівняння $a + x = b$ є число $x = b - a$; розв'язком рівняння $ax = b$ ($a \neq 0$) є число $x = \frac{b}{a}$.

Розв'язком рівняння $|x| = a$ ($a > 0$) є числа $x_1 = a$ та $x_2 = -a$.

Розв'язками (коренями) рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, якщо дискримінант $b^2 - 4ac \geq 0$, є числа $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; якщо ж дискримінант $b^2 - 4ac < 0$, то рівняння дійсних коренів (розв'язків) не має.

Якщо рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має дійсні корені x_1 і x_2 , то квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ розкладається на множники: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Якщо a і b довільні дійсні числа, причому $a < b$, то множина всіх дійсних чисел x , які знаходяться між числами a і b , тобто задовольняють подвійній нерівності $a < x < b$, позначається $x \in (a, b)$ і називається **інтервалом** (відкритим інтервалом, проміжком), а самі числа a та b називаються кінцями інтервалу (відповідно лівим і правим).

Множина чисел x , які задовольняють нерівностям $a \leq x \leq b$, називається **відрізком** (замкненим інтервалом) і позначається: $x \in [a, b]$.

Множини чисел x , які задовольняють нерівностям $a \leq x < b$ або $a < x \leq b$ позначаються відповідно як $x \in [a, b)$ та $x \in (a, b]$.

Множина чисел x , які задовольняють умові $x < a$ ($x > a$) позначається $x \in (-\infty, a)$ ($x \in (a, +\infty)$); множина чисел, які задовольняють умові $x \leq a$ ($x \geq a$) позначається $x \in (-\infty, a]$ ($x \in [a, +\infty)$); множина всіх дійсних чисел позначається $x \in (-\infty, +\infty)$ або $x \in \mathbb{R}$.

Кожному дійсному числу a відповідає точка на числовій осі (координатній прямій); кожній точці числової осі відповідає певне дійсне

число a , що називається її координатою. Числовим проміжкам (інтервалам) відповідають проміжки (інтервали) на координатній прямій. Множині всіх дійсних чисел відповідає вся координатна пряма. (Тому множина $x \in (-\infty, +\infty)$ називається також числовою прямою, а будь-яке число – точкою цієї прямої).

Нерівність $|x| < a$, ($a > 0$) еквівалентно подвійній нерівності $-a < x < a$.

Якщо a – довільна точка числової осі, а $\varepsilon > 0$ – будь-яке додатне число, то інтервал $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ називається ε -*около* точки a . Цей інтервал може бути записаний так: $|x - a| < \varepsilon$.

ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Записати у вигляді інтервалів множини чисел (точок), що задовольняють нерівності:

$$1) |x| < 5; \quad 2) |x| \geq 7; \quad 3) x^2 \leq 225; \quad 4) |x + 2| < 4; \quad 5) |x - 9| \geq 12.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1. Нерівність $|x| < 5$ еквівалентна (рівносильна) нерівностям $-5 < x < 5$.
 $x \in (-5, 5)$.

2. Нерівність $|x| \geq 7$ еквівалентна нерівностям $x \geq 7$ і $x \leq -7$.
 $x \in (-\infty, -7] \cup [7, +\infty)$.

3. Нерівність $x^2 \leq 225$ еквівалентна нерівності $|x| \leq 15$, яка, у свою чергу, еквівалентна нерівностям $-15 \leq x \leq 15$. Значить, $x \in [-15, 15]$.

4. Нерівність $|x + 2| < 4$ еквівалентна нерівностям $-4 < x + 2 < 4$. Розв'язуючи ліву нерівність $-4 < x + 2$, отримуємо $-6 < x$; розв'язуючи праву нерівність $x + 2 < 4$, отримуємо $x < 2$. Отже, $x \in (-6, 2)$.

5. Нерівність $|x - 9| \geq 12$ еквівалентна двом нерівностям $x - 9 \geq 12$ та $x - 9 \leq -12$. З першої нерівності отримуємо $x \geq 21$, а з другої – $x \leq -3$. Отже, $x \in (-\infty, -3] \cup [21, +\infty)$.

Приклад 2. Розкласти на множники: 1) $x^2 - 5x + 6$; 2) $3x^2 - 2x - 1$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

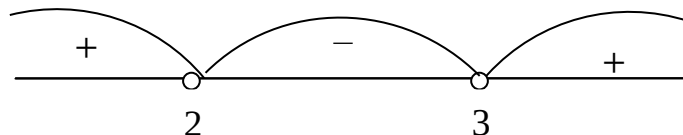
$$1. \text{ Знайдемо корені рівняння } x^2 - 5x + 6 = 0: \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 3, \quad x_2 = 2. \text{ Отже, } x^2 - 5x + 6 = (x - 3) \cdot (x - 2).$$

$$2. \text{ Коренями рівняння } 3x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ будуть } x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3 \cdot 4}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -\frac{1}{3}. \text{ Значить, } 3x^2 - 2x - 1 = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + \frac{1}{3}) = (x - 1) \cdot (3x + 1).$$

Приклад 3. Розв'язати нерівності: 1) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$; 2) $3x^2 - 2x - 1 < 0$.

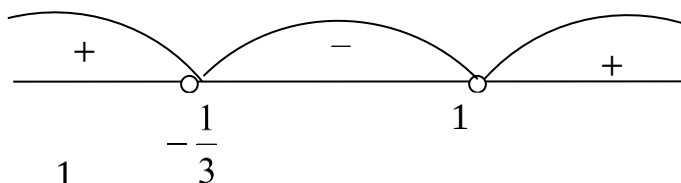
РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1. Нерівність $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ еквівалентна нерівності $(x - 3)(x - 2) \geq 0$ (див. *Приклад 2*), яку зручно розв'язати методом інтервалів:



Отже, $x \in (-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

2. Нерівність $3x^2 - 2x - 1 < 0$ еквівалентна нерівності $3(x - 1)(x + \frac{1}{3}) < 0$, яку розв'язуємо аналогічно попередньому прикладу:



Отже, $x \in (-\frac{1}{3}, 1)$.

ЗАВДАННЯ

1.1. Записати у вигляді інтервалів множини чисел (точок), що задовольняють умовам:

- 1) $|x| < 3$; 2) $|x| \geq 4$; 3) $x^2 \leq 25$; 4) $x^2 > 36$; 5) $|x - 2| < 1$; 6) $|x - 3| \geq 2$;
7) $(x - 2)^2 \geq 9$; 8) $(x + 3)^2 < 16$; 9) $-3 \leq x + 2 \leq 5$; 10) $|2x + 1| < 1$.

1.2. Знайти суму членів прогресії:

- 1) $1 + 3 + 5 + \dots + 121$; 2) $5 + 2 - 1 - 4 - \dots - (8 - 3n)$;
3) $1 + 2 + 4 + \dots + 1024$; 4) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}$;
5) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$; 6) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$; 7) $\frac{2}{3} - \frac{4}{9} + \frac{8}{27} - \frac{16}{81} + \dots$.

1.3. Розкласти на множники:

- 1) $x^2 + 3x - 4$; 2) $2x^2 + 3x - 5$; 3) $6x^2 + x - 2$; 4) $15x^2 - 11x + 2$.

1.4. Розв'язати рівняння:

$$1) |x| + |x - 2| = 2; \quad 2) |x + 1| - |x + 3| = 0; \quad 3) |x + 3| - |x + 1| = 2.$$

1.2. Функціональна залежність

Змінною величиною називається величина, яка набуває різних числових значень. Величина, числові значення якої не змінюються, називається **постійною (сталюю)** величиною або **константою**.

Якщо кожному значенню змінної x , що належить деякому інтервалу, відповідає одне певне значення іншої змінної y , то кажуть, що y є **функція** від x і символічно це записують так: $y = f(x)$, або $y = \varphi(x)$, або $y = y(x)$ тощо. При цьому змінна x називається **аргументом** чи незалежною змінною, а множина значень x , для яких визначено значення змінної y , називається **областю визначення** функції $f(x)$.

Якщо функція задана рівнянням виду $y = f(x)$, то вона називається **явною** (заданою у явному вигляді). Функція, задана рівнянням $F(x, y) = 0$, не розв'язаним відносно y , називається **неявною**. Кажуть, що функція задана **параметрично**, якщо x і y задані як функції третьої змінної, яка називається параметром і зазвичай позначається буквою t :
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}.$$

Якщо змінна y залежить від змінної u , яка сама є функцією від x , то y називається **складеною функцією** від x або **суперпозицією функцій** і позначається $y = f(u(x))$ або $y = f(u)$ де $u = \varphi(x)$.

Графіком функції $y = f(x)$ називається геометричне місце точок площини xOy координати яких задовольняють умові: $y = f(x)$, тобто множина точок площини xOy з координатами $(x, f(x))$.

Функція $f(x)$ називається **зростаючою**, якщо більшому значенню аргумента відповідає більше значення функції, тобто, якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$.

Функція $f(x)$ називається **спадною**, якщо більшому значенню аргумента відповідає менше значення функції, тобто, якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$.

Функція $f(x)$ називається **парною**, якщо $f(-x) = f(x)$, і **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy , графік непарної – відносно початку координат.

Функція $f(x)$ називається **періодичною**, якщо існує додатне число T , таке що $f(x + T) = f(x)$. Найменше додатне число T , що має зазначену властивість, називається **основним періодом функції**.

Основними елементарними функціями називаються:

- 1) степенева функція $y = x^a$, де a – будь-яке дійсне число;
- 2) показникова функція $y = a^x$, де a – додатне число, що не дорівнює одиниці;
- 3) логарифмічна функція $y = \log_a x$, де a – додатне число, що не дорівнює одиниці;
- 4) тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;
- 5) обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Елементарними функціями називаються функції, які можна одержати із основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних дій і суперпозицій.

Приклад 4. Знайти області визначення функцій:

$$1) y = \sqrt{x^2 + 4x - 5}; \quad 2) y = \log_a(x - 1); \quad 3) y = \frac{2x + 3}{x^2 + 4x - 5}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1. Функція $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$ визначена для тих значень x , при яких $x^2 + 4x - 5 \geq 0$. Оскільки коренями рівняння $x^2 + 4x - 5 = 0$ є $x_1 = -5$ та $x_2 = 1$, то областю визначення цієї функції буде $x \in (-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$.

2. Функція $y = \log_a(x - 1)$ буде визначена для тих значень x , для яких $x - 1 > 0$, тобто $x \in (1, +\infty)$.

3. Функція $y = \frac{2x + 3}{x^2 + 4x - 5}$ визначена для всіх значень x , при яких $x^2 + 4x - 5 \neq 0$. Отже, областю визначення цієї функції буде вся числова вісь, за винятком точок $x = 1$ та $x = -5$, тобто $x \in (-\infty, -5) \cup (-5, 1) \cup (1, +\infty)$.

Приклад 5. Чи є серед функцій: 1) $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, 2) $g(x) = 3^x + 3^{-x}$,

3) $\varphi(x) = 1 + x + x^2$ парні чи непарні?

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1) Замінімо x на $-x$, отримаємо: $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = \frac{\cos x}{-x} = -f(x)$. Значить, функція $f(x)$ непарна.

2) В даному випадку $g(-x) = 3^{-x} + 3^{-(-x)} = 3^{-x} + 3^x = g(x)$. Значить, функція $g(x)$ парна.

3) Тут $\varphi(-x) = 1 + (-x) + x^2 = 1 - x + x^2$. Через те, що $\varphi(-x) \neq \varphi(x)$ і $\varphi(-x) \neq -\varphi(x)$, функція $\varphi(x)$ не є ані парною, ані непарною, тобто $\varphi(x)$ – функція загального виду.

Приклад 6. Знайти $\varphi(f(x))$ і $f(\varphi(x))$, якщо $\varphi(x) = \sqrt{x}$, а $f(x) = \sin x$.

Р О З В ’ Я З А Н Н Я. $\varphi(f(x)) = \sqrt{\sin x}$, $f(\varphi(x)) = \sin \sqrt{x}$.

ЗАВДАННЯ

1.5. У точках $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ обчислити значення функцій:

- 1) $y = |x|$; 2) $y = |x-1|$; 3) $y = |x| - x$; 4) $y = |x| + |x-1| + |x-2|$;
 5) $y = 2^x + 2^{-x}$; 6) $y = 3^x - 3^{-x}$; 7) $y = \sin \frac{\pi x}{2}$; 8) $y = \cos \pi x$.

1.6. Знайти області визначення функцій:

- 1) $y = \sqrt{x-1}$; 2) $y = \sqrt{x^2-1}$; 3) $y = \sqrt{x^2-3x+2}$; 4) $y = \sqrt{x^2+x+1}$;
 5) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$; 6) $y = \sqrt[3]{x}$; 7) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x+2}$;
 8) $y = \frac{x-1}{x+1}$; 9) $y = \frac{1}{1+2^x}$; 10) $y = \frac{3^x}{1+3^x}$; 11) $y = \lg(2x^2+5x-7)$;
 12) $y = \frac{1}{\log_2(x^2-3x+2)}$; 13) $y = \sin(x + \frac{\pi}{4})$; 14) $y = \sqrt{\sin x}$;
 15) $y = \sqrt{1+\cos 3x}$; 16) $y = \frac{1+\cos x}{1+\sin x}$.

1.7. Обчислити $\varphi(a)$, $\varphi(a+h)$, $\varphi(b)-\varphi(a)$, $\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}$, $\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$,

якщо:

- 1) $\varphi(x) = x^2$; 2) $\varphi(x) = x^3$; 3) $\varphi(x) = \sqrt{x}$; 4) $\varphi(x) = x^2 + x + 2$.

1.8. Які із зазначених функцій парні, а які – непарні:

- 1) $y = \frac{\sin x}{x}$; 2) $y = \frac{2^x-1}{2^x+1}$; 3) $y = \frac{(x+1)^2}{x}$; 4) $y = a^x + \frac{1}{a^x}$;
 5) $y = \frac{1+\cos x}{x}$; 6) $y = x + x^2 + x^3$; 7) $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^3$.

1.9. Знайти $\varphi(f(x))$ і $f(\varphi(x))$, якщо: 1) $\varphi(x) = x^2$, $f(x) = 2^x$;

- 2) $\varphi(x) = x^3$, $f(x) = \lg x$; 3) $\varphi(x) = \sin x$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

1.10. Побудувати графіки функцій:

- 1) $y = x$; 2) $y = |x|$; 3) $y = -|x|$; 4) $y = |x + 1|$; 5) $y = x^2$;
6) $y = x^3$; 7) $f(x) = \log_a x$; 8) $y = a^x$; 9) $y = 2 \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$;
10) $y = \cos 2x$, $x \in [0, 2\pi]$.

1.3. Границя числової послідовності (змінної величини)

Якщо кожному натуральному n ставиться у відповідність за певним законом деяке дійсне число x_n , то множину занумерованих дійсних чисел $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ називають **числовою послідовністю** $\{x_n\}$ або **змінною величиною** x_n . При цьому, кожне число x_n називають елементом або членом цієї послідовності, а число n – його номером.

Число a називається **границею числової послідовності** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ або **границею змінної** x_n , якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа ε знайдеться таке натуральне число N , (яке залежить від ε), що для всіх $n \geq N$ виконується умова $|x_n - a| < \varepsilon$. Символічно це записується так: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

або $x_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. При цьому послідовність $\{x_n\}$ називають **збіжною**. Якщо у послідовності $\{x_n\}$ границя не існує, то послідовність $\{x_n\}$ називають **розбіжною**.

Якщо x_n наближається до своєї границі a , залишаючись менше ніж a , то використовується запис $x_n \rightarrow a - 0$, якщо ж x_n наближається до a , залишаючись більше за a , то використовується запис $x_n \rightarrow a + 0$.

Змінна величина може мати лише одну границю.

Границя константи дорівнює цій константі, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$.

Змінна величина називається **нескінченно малою**, якщо її границя дорівнює нулю. Нескінченно малі часто позначають буквами грецького алфавіту $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \dots$ тощо.

Нескінченно малі α_n і β_n називаються **еквівалентними** ($\alpha_n \sim \beta_n$), якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$, то кажуть, що нескінченно мала α_n має більш високий порядок (малості), ніж β_n .

Для того щоб змінна x_n мала границю, яка дорівнює a , необхідно і достатньо, щоб вона мала вигляд $x_n = a + \alpha_n$, де α_n – нескінченно мала.

Змінна x_n називається **обмеженою**, якщо існує таке число $A > 0$, що для усіх n виконується умова $|x_n| < A$. Якщо змінна x_n має границю, то вона обмежена.

Якщо змінна x_n не приймає нульових значень і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$, то змінна $\frac{1}{x_n}$ обмежена.

Добуток обмеженої величини на нескінченно малу є нескінченно малою величиною.

Змінна величина x_n називається **нескінченно великою**, якщо для будь-якого великого додатного числа A можна вказати таке натуральне число N , що для всіх $n \geq N$ має місце *нерівність* $|x_n| > A$. При цьому використовується така символіка: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ або $x_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Якщо нескінченно велика величина починаючи з деякого n_0 набуває лише додатних (від'ємних) значень, то це символічно записують так: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ або $x_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ або $x_n \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow \infty$).

Якщо x_n нескінченно велика, то $\frac{1}{x_n}$ нескінченно мала, якщо α_n нескінченно мала і $\alpha_n \neq 0$, то $\frac{1}{\alpha_n}$ нескінченно велика;

При обчисленні границь використовуються такі властивості.

Якщо існують $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, то:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Властивості 2) і 3) справедливі для будь-якого *скінченного числа змінних*, що мають границі;

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \text{ якщо } y_n \text{ не набуває нульових значень і}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0;$$

5) якщо відношення двох нескінченно малих має границю, то ця границя не зміниться при заміні кожної з нескінченно малих еквівалентними їм нескінченно малими, тобто, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = a$ і $\alpha_n \sim \alpha_n^1, \beta_n \sim \beta_n^1$, то;

6) якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ і $x_n \leq z_n \leq y_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

Приклад 7. Показати, що при $n \rightarrow \infty$ послідовність $5, 4\frac{1}{2}, 4\frac{1}{3}, \dots, 4 + \frac{1}{n}, \dots$ має границею число 4.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

Оскільки загальний член послідовності дорівнює $x_n = 4 + \frac{1}{n}$ і $\frac{1}{n}$ при $n \rightarrow \infty$ прямує до нуля, тобто є нескінченно малою, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (4 + \frac{1}{n}) = 4$.

Приклад 8. Знайти границі змінних:

$$1) x_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}; \quad 2) x_n = \frac{n^2 + 2n - 3}{3n^2 + 2n + 1}; \quad 3) x_n = \frac{\sqrt{n^6 + n^2 + 10}}{2n^3 + n};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n^1}{\beta_n^1} = a \quad x_n = \frac{1+2+3+\dots+n}{n^2+1}; \quad 5) x_n = \frac{2^n + 3^n}{1+3^n}; \quad 6)$$

$$x_n = \frac{\sin n}{n};$$

$$7) x_n = \sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 3};$$

$$8) x_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 3}).$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1. Оскільки $\frac{2}{n}$ і $\frac{3}{n^2}$ є нескінченно малими, то $\frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}$ теж є нескінченно малою. Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}) = 1$.

2. Змінна величина є дробом, чисельник і знаменник якого необмежено зростають, тобто є нескінченно великими (у такому разі кажуть, що має місце невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$). Тому при обчисленні границі скористатися властивістю (4) неможливо. Розділивши чисельник і знаменник на n^2 , отримуємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 3}{3n^2 + 2n + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})} = \frac{1}{3},$$

тому що при $n \rightarrow \infty$ кожен із дробів $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n^2}$, $\frac{1}{n^2}$ є нескінченно малою величиною.

3. У цьому випадку також має місце невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Розділимо чисельник та знаменник на n^3 (при діленні $\sqrt{n^6 + n^2 + 10}$ на n^3 підкореневий вираз ділиться на n^6): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + n^2 + 10}}{2n^3 + n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n^4} + \frac{10}{n^6}}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^4} + \frac{10}{n^6}}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

4. Вираз, що стоїть у чисельнику, є сумою членів арифметичної прогресії: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2}$. Тому,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n}{2(n^2 + 1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

5. $\frac{2^n + 3^n}{1 + 3^n}$ при $n \rightarrow \infty$ є невизначеністю виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Розділимо чисельник та

знаменник на 3^n . Отримаємо: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{1 + 3^n} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\frac{1}{3^n} + 1} = 1,$

оскільки $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ і $\frac{1}{3^n}$ – нескінченно малі.

6. У цьому випадку границя чисельника не існує, але за всіх n $\sin n$ є обмеженою величиною, оскільки $|\sin n| \leq 1$. Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n \cdot \frac{1}{n} = 0,$

оскільки $\frac{1}{n}$ – нескінченно мала.

7. Тут має місце невизначеність виду $(\infty - \infty)$. Перетворимо її на невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Із цією метою помножимо і розділимо змінну x_n на

$\sqrt{n^2 + 2n - 1} + \sqrt{n^2 - n + 3}$, після чого чисельник і знаменник розділимо на n (підкорені вирази при цьому поділяються на n^2). Отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 3}) &= (\infty - \infty) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n - 1} - \sqrt{n^2 - n + 3})(\sqrt{n^2 + 2n - 1} + \sqrt{n^2 - n + 3})}{\sqrt{n^2 + 2n - 1} + \sqrt{n^2 - n + 3}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - 1 - (n^2 - n + 3)}{\sqrt{n^2 + 2n - 1} + \sqrt{n^2 - n + 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 4}{\sqrt{n^2 + 2n - 1} + \sqrt{n^2 - n + 3}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

8. У даному випадку маємо справу з невизначеністю виду $(\infty(\infty - \infty))$. Для знаходження границі виконаємо перетворення, аналогічні перетворенням попереднього прикладу:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 3}) &= (\infty(\infty - \infty)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 3})(\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 3})}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 3}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2 + 1 - (n^2 + 3))}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 + 3}} = \\ &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n^2}}} = -\frac{2}{2} = -1. \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ

1.11. Знайти границі змінних:

$$1) x_n = \frac{5n^3 + 3n^2 + 4}{4n^3 + 2n + 5}; \quad 2) x_n = \frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 2n + 3}; \quad 3) x_n = \frac{n^5 + 3n^2 + n}{2n^2 + n + 7};$$

$$\begin{aligned}
4) x_n &= \frac{n^3 + 5n - 4}{n^2 + 3n + 6}; & 5) x_n &= \frac{n^2 + n + 1}{n^3 + 2n - 1}; & 6) x_n &= \frac{n + 3}{n^3 + n^2 + 1}; \\
7) x_n &= \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}; & 8) x_n &= \frac{2 + 5 + 8 + \dots + (3n - 1)}{5n^2 + 1}; \\
9) x_n &= \frac{\sqrt{n^4 + n^2 + 2}}{2n^2 + n}; & 10) x_n &= \frac{\sqrt[3]{n^6 + n^4 + 1}}{n^2 + 2}; & 11) x_n &= \frac{2\sqrt{n} - 3\sqrt[3]{n}}{3\sqrt{n} + 2\sqrt[3]{n}}; \\
12) x_n &= \frac{1 + \sqrt{n} + n}{2 + \sqrt{n} - n}; & 13) x_n &= \frac{2^n + 2 \cdot 5^n}{3^n + 3 \cdot 5^n}; & 14) x_n &= \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}; \\
15) x_n &= \frac{2^{-n} + 2^n}{2^{-n} - 2^n}; & 16) x_n &= \frac{3^{-n}}{n}; & 17) x_n &= \frac{\cos n}{n}; & 18) x_n &= \frac{\sin n}{\lg(n + 1)}; \\
19) x_n &= \frac{\sin n + 2 \cos n}{\sqrt{n}}; & 20) x_n &= \frac{\sin n - 3 \cos n}{\sqrt[3]{n}}; & 21) x_n &= \frac{n + \sin n}{n - \sin n}; \\
22) x_n &= \frac{\cos n - \sqrt{n}}{\sin n + \sqrt{n}}; & 23) x_n &= \sqrt{n^2 + 5n + 1} - \sqrt{n^2 + 3n + 2}; \\
24) x_n &= \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 7n + 1}; & 25) x_n &= \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n + 3}; \\
26) x_n &= \sqrt{5n - 1} - \sqrt{n^2 + 2n}; & 27) x_n &= \sqrt{n} + 2\sqrt[3]{n + 1}; & 28) x_n &= \sqrt[4]{n + 2} + \sqrt[3]{n - 1}; \\
29) x_n &= n(\sqrt{2n^2 + 3} - \sqrt{2n^2 - 1}); & 30) x_n &= n(\sqrt{n^4 + n^2 - 1} - \sqrt{n^4 + n^2 + n + 1}).
\end{aligned}$$

1.4. Границя функції

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки a (тобто на деякому інтервалі, що містить точку a), за винятком, може бути, самої точки a , а $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ — довільна нескінченна послідовність значень аргументу x (з цього інтервалу) така, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ($x_n \neq a$). Цій послідовності значень аргументу відповідає послідовність значень функції: $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$.

Означення 1. (Границя функції по Гейне). Число b називається *границею функції* $f(x)$ при $x \rightarrow a$ і позначається $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, якщо для

будь-якої послідовності $x_n \rightarrow a$ ($x_n \neq a$) значень аргументу x відповідна послідовність $f(x_n)$ значень функції $f(x)$ має границею число b .

Означення 2 (границя функції по Коші). Число b називається **границею функції** $f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного числа $\varepsilon > 0$ існує таке додатне число δ , що $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$.

Означення 1 та 2 еквівалентні (рівносильні).

Числа $f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ і $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ (якщо вони існують)

називаються **односторонніми границями** (відповідно, **лівою** та **правою** границею) функції $f(x)$ у точці a . Для існування границі функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$ необхідно і достатньо, щоб мала місце рівність: $f(a-0) = f(a+0)$. Функція $f(x)$ у точці a може мати лише одну границю.

Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, то функція $f(x)$ називається **нескінченно малою при**

$x \rightarrow a$. Нескінченно малі функції часто символічно позначають так: $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, ... Сума **скінченного** числа нескінченно малих функцій, добуток нескінченно малої функції на обмежену функцію є функція нескінченно мала.

Нескінченно малі при $x \rightarrow a$ функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **еквівалентними**, якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$; при цьому використовується запис $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow a$.

Число b називається границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$ $\left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \right)$, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число $A(\varepsilon)$, що $|f(x) - b| < \varepsilon$ для всіх $|x| > A$.

Якщо $|f(x)| > M$ при $0 < |x - a| < \delta$ (при $|x| > A$), де M – довільне додатне число, то умовно записують $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ $\left(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \right)$.

У цьому випадку функція $f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \rightarrow a$ ($x \rightarrow \infty$).

Якщо $f(x)$ – нескінченно велика, то $\frac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала функція; якщо

$\alpha(x)$ – нескінченно мала, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ – нескінченно велика функція.

При обчисленні границь функцій використовуються такі властивості (теореми).

Якщо існують $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ і $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, де a може бути як числом, так і

символом ∞ , то:

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x);$
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$

Властивості (2) і (3) справедливі для будь-якого *скінченного* числа функцій, що мають границі;

$$4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \text{якщо } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0;$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{перша чудова границя});$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e = 2,71828... \quad (\text{друга чудова границя})$$

(логарифм числа x по основі e називається *натуральним* логарифмом і позначається $\ln x$);

7) якщо відношення двох нескінченно малих функцій має границю, то ця границя не зміниться при заміні кожної з нескінченно малих функцій на еквівалентну їй нескінченно малу, тобто, якщо $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = b$,

$$\text{і } \alpha(x) \sim \alpha_1(x), \quad \beta(x) \sim \beta_1(x) \quad \text{при } x \rightarrow a, \quad \text{то } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = b.$$

При розв'язанні прикладів буває корисним використовувати еквівалентність наступних нескінченно малих функцій: якщо $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ при $x \rightarrow a$, то $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$, $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$, $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$.

Приклад 9. Знайти границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{4x+5}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x+1}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-1} - \sqrt{x^2-x+2} \right); \quad 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-1} - \sqrt{x^2-x+2} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{x+3}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^3}{1-x^2}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+3x+1}{3x^2-x-4};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{2x^2-3x+1}}{x}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x};$$

$$\begin{aligned}
 13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}; \quad & 14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2x^2 + x - 3)}{x^2 - 1}; \quad & 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x}; \\
 16) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x}; \quad & 17) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^{\frac{3}{x}}; \quad & 18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+2x)}.
 \end{aligned}$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1. У даному випадку має місце невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Поділимо чисельник і знаменник на x . Отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{4x+5} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{4 + \frac{5}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{5}{x}\right)} = \frac{3}{4}.$$

2. Тут також невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Перетворимо знаменник:

$\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$. Оскільки $x \rightarrow +\infty$, то $x > 0$, отже $|x| = x$. Тому:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{1} = 3.
 \end{aligned}$$

3. Розв'язуємо аналогічно попередньому, враховуючи, що за умови $x \rightarrow -\infty$ слідує, що $x < 0$ і, отже, $|x| = -x$:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \\
 &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -3
 \end{aligned}$$

4. У даному випадку має місце невизначеність виду $(\infty - \infty)$. Помножимо і розділимо даний вираз на $\left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 2}\right)$, після чого чисельник і знаменник поділимо на x : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 2}\right) = (\infty - \infty) =$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 2}\right) \left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 2}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} + \sqrt{x^2 - x + 2}\right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1 - (x^2 - x + 2)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 3}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)} = \\
 &= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}} = \frac{4}{1 + 1} = \frac{4}{2} = 2.
 \end{aligned}$$

5. Розв'язуємо аналогічно до попереднього, враховуючи, що в даному випадку $|x| = -x$. Отримаємо: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 2}\right) = -2$.

6. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$ і $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 5$, то

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x + 1}{x + 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 3)} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

7. При $x \rightarrow 1$ чисельник і знаменник дробу прямують до нуля (невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$). Оскільки $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$, $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ і $x \neq 1$ при $x \rightarrow 1$, то чисельник і знаменник можна скоротити (розділити) на $x - 1$. Тому:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{3}.$$

8. Оскільки $\lim_{x \rightarrow -1} (1 - x^2) = 0$, а $\lim_{x \rightarrow -1} (1 - x^3) = 2$, то маємо:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^3}{1 - x^2} = \left(\frac{2}{0} \right) = \infty.$$

9. Тут невизначеність виду $\left(\frac{0}{0} \right)$. Для знаходження границі чисельник та знаменник необхідно розкласти на множники:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 - x - 4} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)(x+\frac{1}{2})}{3(x+1)(x-\frac{4}{3})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+\frac{1}{2})}{3(x-\frac{4}{3})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{3x-4} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

10. Це також невизначеність виду $\left(\frac{0}{0} \right)$. Помножимо чисельник і знаменник

$$\begin{aligned} \text{на } \sqrt{9+x}+3: \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{9+x}-3)(\sqrt{9+x}+3)}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9+x-9}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{9+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{9+x}+3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

11. Розв'язуємо аналогічно попередньому:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-3x+1}}{x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-3x+1})(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2-3x+1})}{x(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2-3x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x+1-(2x^2-3x+1)}{x(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2-3x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x-x^2}{x(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2-3x+1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4-x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2-3x+1}} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

12. Оскільки при $x \rightarrow 0$ $\sin 3x \sim 3x$, то $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = 3$.

13. Зважаючи на те, що: $1 - \cos 4x = 2\sin^2 2x$ і $\sin 2x \sim 2x$ при $x \rightarrow 0$,

$$\text{одержуємо: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(2x)^2}{x^2} = 8.$$

14. Оскільки при $x \rightarrow 1$ $2x^2 + x - 3 \rightarrow 0$, то $\sin(2x^2 + x - 3) \sim 2x^2 + x - 3$.

$$\text{Тому: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2x^2 + x - 3)}{x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+\frac{3}{2})}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x+\frac{3}{2})}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+3}{x+1} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

15. У цьому випадку має місце невизначеність виду (1^∞) . Отже, необхідно використовувати другу чудову границю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{3x} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{\frac{x}{5} \cdot 5 \cdot 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{\frac{x}{5} \cdot 15} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{\frac{x}{5}} \right]^{15} = e^{15}. \end{aligned}$$

16. Через те, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$, ми знову маємо справу з

невизначеністю виду (1^∞) . Тому, перетворимо функцію так, щоб можна було використати другу чудову границю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \left(\frac{x+1}{x-1} \right) - 1 \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1-(x-1)}{x-1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1} \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right)^{\frac{4x}{x-1}}. \end{aligned}$$

Оскільки $\frac{2}{x-1} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2}} = e$. Зважаючи на те, що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{1 - \frac{1}{x}} = 4, \text{ остаточно отримуємо:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]^{\frac{4x}{x-1}} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x-1}} = e^4.$$

17. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{1+x^2} = 1$ і $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, то при розв'язуванні

необхідно використати другу чудову границю. Виконаємо перетворення, аналогічні перетворенням попереднього прикладу:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1+x^2} \right)^{\frac{3}{x}} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1+x}{1+x^2} - 1 \right]^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{x-x^2}{1+x^2} \right]^{\frac{3}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{x-x^2}{1+x^2} \right]^{\frac{1+x^2}{x-x^2} \cdot \frac{3}{1+x^2} \cdot \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{x-x^2}{1+x^2} \right]^{\frac{1+x^2}{x-x^2} \cdot \frac{3x(1-x)}{x(1+x^2)}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(1-x)}{1+x^2}} = e^3. \end{aligned}$$

18. При $x \rightarrow 0$ $e^x - 1 \sim x$ та $\ln(1+2x) \sim 2x$. Тому:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+2x)} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 10. Знайти односторонні границі функції $f(x)$ у точці x_0 :

$$1) f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}, x_0 = 0; \quad 2) f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}, x_0 = 1; \quad 3) f(x) = \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4}, x_0 = 2.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

$$1. \text{ Якщо } x \rightarrow +0, \text{ то } \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \text{ і } 2^{\frac{1}{x}} \rightarrow \infty. \text{ Отже, } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

$$\text{Якщо ж } x \rightarrow -0, \text{ то } \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \text{ і } 2^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0. \text{ Отже, } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

2. Якщо $x \rightarrow 1 + 0$, то $x - 1 \rightarrow +0$ і $\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$, тоді $\lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$.

Якщо ж $x \rightarrow 1 - 0$, то $x - 1 \rightarrow -0$ і $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$, тоді $\lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$.

3. У даному випадку
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+2,5)}{(x-2)(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2,5)}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+5}{x+2} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

Тому:
$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = 2,25.$$

ЗАВДАННЯ

1.12. Знайти границі:

1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x - 3}{2x^2 - x + 1}$; 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{4x^2 + 5x - 3}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{4x^3 + x^2 - 2}$;

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 4}{x^4 + 3x - 1}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{3x + 4}$; 6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 1}{3x^2 - x + 2}$;

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 5}}{x + 5}$; 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1}}{2x + 3}$; 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1}}{2x + 3}$;

10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 5}}{x + 5}$; 11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1} \right)$;

12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x - 5} - \sqrt{x^2 - 2x + 1} \right)$; 13) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x} \right)$;

14) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - 5x - 2} \right)$; 15) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x + 3}{3x + 5}$; 16) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x + 2}$;

17) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$; 18) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - 8}$; 19) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x - 5}{15x^2 - 2x - 3}$;

$$\begin{array}{lll}
20) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 - x - 3}; & 21) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{x^2 + x - 2}; & 22) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 10}; \\
23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x} - \sqrt{4-2x}}{x}; & 24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{9+x} - \sqrt{9+x^2}}; & 25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}; \\
26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}; & 27) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 - 1}; & 28) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^3 - 8}; \\
29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 3x}{x}; & 30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x + \sin 3x}; & 31) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}; \\
32) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}; & 33) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x+1}{x+2} \right]^{\frac{x+1}{x+3}}; & 34) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1+x}{2-x} \right]^x; \\
35) \lim_{x \rightarrow 0} [1+2x]^{\frac{1}{3x}}; & 36) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{3}{x} \right]^{5x}; & 37) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x+1}{x+5} \right]^{3x-1}; \\
38) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1-x}{1+2x} \right]^{\frac{21}{x}}; & 39) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{e^x - 1}; & 40) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 5x}{\ln(1+5x)}.
\end{array}$$

1.13. Знайти односторонні границі функції $f(x)$ у точці x_0 :

$$\begin{array}{ll}
1) f(x) = 3^{\frac{1}{x}}, \quad x_0 = 0; & 2) f(x) = e^{\frac{x}{\sin x}}, \quad x_0 = 0; \\
3) f(x) = e^{\frac{x}{\sin x}}, \quad x_0 = \pi.
\end{array}$$

1.14. Знайти границі функції $f(x)$ у точках: $x = 0$, $x = \pm 1$ та при $x \rightarrow \infty$.

$$1) f(x) = \frac{\sin \pi x}{x}; \quad 2) f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + 3x + 2}; \quad 3) f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}.$$

1.5. Неперервність функції

Функція $f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0 , якщо:

- 1) $f(x)$ визначена в деякому околі цієї точки;
- 2) існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Необхідна і достатня умова неперервності функції $f(x)$ в точці x_0 :

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0).$$

Під **приростом аргументу**, яке зазвичай позначається Δx , мається на увазі як додатне, так і від'ємне досить мале по абсолютній величині число.

Приростом функції $y = f(x)$ у точці x , що відповідає приросту аргументу Δx , називається число $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. У цих позначеннях умова неперервності функції $f(x)$ у точці x_0 може бути записана так:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0. \text{ Функція, неперервна у кожній}$$

точці деякого інтервалу, називається **неперервною на цьому інтервалі**.

Усі основні елементарні функції неперервні на своїй області визначення.

Алгебраїчна сума та добуток **скінченного** числа неперервних функцій є неперервною функцією. Частка двох неперервних функцій є неперервною функцією у тих точках, де знаменник відмінний від нуля. Складена функція (суперпозиція функцій), що складається з неперервних функцій, є неперервною функцією.

Функції, неперервні на замкнутому інтервалі, мають наступні властивості. Якщо $f(x)$ неперервна на замкнутому інтервалі $[a, b]$, то:

1) $f(x)$ обмежена на цьому інтервалі, тобто існує таке число $A > 0$, що для всіх $x \in [a, b]$ має місце $|f(x)| < A$;

2) $f(x)$ приймає принаймні в одній точці $x_1 \in [a, b]$ своє найбільше і принаймні в одній точці $x_2 \in [a, b]$ своє найменше значення;

3) $f(x)$ приймає на цьому інтервалі всі проміжні значення між своїми найменшим та найбільшим значеннями;

4) якщо $f(x)$ на кінцях інтервалу приймає значення протилежних знаків, то принаймні в одній точці $x_0 \in [a, b]$ вона дорівнює нулю.

Точки області визначення функції або є граничними точками цієї області, в яких порушується умова неперервності, називаються **точками розриву функції**. Точки розриву прийнято класифікувати так:

– x_0 називають точкою **усувного розриву**, якщо $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) \neq f(x_0)$;

– x_0 називають точкою **розриву першого роду**, якщо в цій точці у функції існують скінченні односторонні границі, але $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$. При цьому різницю $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ називають **стрибком функції у точці** x_0 ;

– усі інші точки розриву називають точкою **розриву другого роду** (в цій точці хоча б одна з односторонніх границь дорівнює нескінченності або не існує).

Приклад 11. Дослідити на неперервність функції:

$$1) f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 2x - 3}; \quad 2) f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{2^x} + 1}; \quad 3) f(x) = \frac{x^2 + x}{\sin x}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1) Чисельник і знаменник дробу є функціями, неперервними на всій числовій осі. Тому функція $f(x)$ буде неперервною скрізь, крім точок $x_1 = -3$ і $x_2 = 1$, у яких знаменник перетворюється на нуль. Ці точки будуть точками розриву функції. Досліджуємо ці точки.

Оскільки $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 2x - 3} = \left(\frac{-4}{0} \right) = \infty$, то в точці $x = -3$ у функції розрив другого роду.

Досліджуємо точку $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 2x - 3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x+3} = \frac{5}{4}.$$

Значить, у точці $x = 1$ у функції усувний розрив $\left(f(1-0) = f(1+0) = \frac{5}{4} \right)$.

2) Як чисельник, так і знаменник дробу є неперервними функціями при $x \neq 0$, причому знаменник $2^{\frac{1}{x}} + 1 \neq 0$. Тому, при $x \neq 0$ функція неперервна. Точка $x = 0$ є точкою розриву функції. Якщо $x \rightarrow -0$, то $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ і $2^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$. Тому:

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = -1.$$

Якщо ж $x \rightarrow +0$, то $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ і $2^{\frac{1}{x}} \rightarrow \infty$. Отже,

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}{1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}} = 1.$$

Значить, у точці $x = 0$ у функції розрив першого роду. Стрибок функції $f(+0) - f(-0) = 2$.

3) Чисельник та знаменник дробу – неперервні функції. Отже, функція неперервна скрізь, де $\sin x \neq 0$, тобто скрізь, крім точок $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

У точці $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} (x + 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 1.$$

Тому $f(+0) = f(-0) = 1$, отже, $x = 0$ – точка усувного розриву.

$$\text{У точках } x = k\pi \ (k \neq 0) \quad \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x^2 + x}{\sin x} = \left(\frac{(k\pi)^2 + k\pi}{0} \right) = \infty.$$

Отже, у цих точках у функції розриви другого роду.

ЗАВДАННЯ

1.15. Дослідити на неперервність функції:

$$\begin{aligned} 1) \ f(x) &= \frac{x}{(x-1)(x-2)}; & 2) \ f(x) &= \frac{2x^2 + 7x + 6}{x^2 + 5x + 6}; & 3) \ f(x) &= \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 3}; \\ 4) \ f(x) &= \frac{2x + 3}{x^2 + x + 1}; & 5) \ f(x) &= \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 3x + 5}. \end{aligned}$$

2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

2.1. Похідна та диференціал

Похідною функції $y = f(x)$ називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля. Для позначення похідної використовуються такі символи: y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$. Таким чином:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Знаходження похідної називається **диференціюванням функції**. Якщо функція має похідну, то функція називається **диференційовною**.

Основні правила диференціювання

Якщо c – стала, а $u(x)$ та $v(x)$ – функції, що диференціюються, то:

$$1) \ c' = 0; \quad 2) \ (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad 3) \ (cu)' = cu'$$

$$4) \ (uv)' = u'v + uv'; \quad 5) \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$6) \ (f(u(x)))' = f'_u \cdot u'_x \text{ (правило диференціювання складеної функції);}$$

$$7) \ \text{якщо функція задана параметрично} \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \text{ то } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)};$$

8) якщо функція y задана неявно, тобто визначається з рівняння $F(x, y) = 0$, то для знаходження похідної y' диференціюють по x обидві частини рівняння, враховуючи при цьому, що y є функція від x . З отриманого рівняння знаходять y' .

Формули диференціювання (u – функція від x)

$$1) \left(u^a\right)' = au^{a-1} \cdot u'; \quad \text{зокрема: } \left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}; \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

$$2) \left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'; \quad \text{зокрема: } \left(e^u\right)' = e^u u';$$

$$3) \left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u \ln a}; \quad \text{зокрема: } (\ln u)' = \frac{u'}{u};$$

$$4) (\sin u)' = \cos u \cdot u'; \quad 5) (\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \quad 6) (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};$$

$$7) (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}; \quad 8) (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$9) (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad 10) (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$$

$$11) (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Похідною другого порядку (другою похідною) функції $y = f(x)$ називається похідна від її похідної. Друга похідна позначається одним з наступних символів: y'' , $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Таким чином, $y'' = (y')'$.

Аналогічно, **похідна третього порядку (третьа похідна)** є похідною від другої похідної і позначається: y''' , $f'''(x)$, $\frac{d^3 y}{dx^3}$, $\frac{d^3 f}{dx^3}$. Отже, $y''' = (y'')'$.

Похідною n -го порядку (n -ю похідною) називається похідна від $(n-1)$ -ї похідної, позначається $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n f}{dx^n}$. Отже, $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Похідні вищих порядків зазвичай обчислюються послідовним диференціюванням функції.

Геометричний зміст похідної. Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0 , то значення $f'(x_0)$ похідної в цій точці є кутовим коефіцієнтом (тангенсом кута нахилу) дотичної до графіка функції в точці (x_0, y_0) , де $y_0 = f(x_0)$. Рівняння дотичної: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Механічний зміст похідної. Якщо $s = s(t)$ – закон руху матеріальної точки, яка рухається прямолінійно (s – довжина шляху, що відлічується від деякої початкової точки; t – час, за який пройдено шлях s), то $s'(t)$ – величина швидкості руху точки в момент часу t (миттєва швидкість), тобто $s'(t) = v(t)$.

Економічний зміст похідної. Якщо функція $u = u(t)$ виражає кількість виробленої продукції за час t , то $u'(t)$ являє собою продуктивність праці в

момент часу t , тобто похідна від обсягу виробленої продукції є продуктивність праці в момент часу t .

В економічних дослідженнях широко використовується поняття **еластичності**, яке пов'язане з тим, що в економічних задачах зміну залежної змінної (функції) часто зручніше обчислювати у відсотках, які відповідають зміні незалежної змінної (аргументу) на один відсоток.

Еластичністю функції $y = f(x)$ називається границя відношення відносного приросту $\frac{\Delta y}{y}$ функції y до відносного приросту $\frac{\Delta x}{x}$ аргументу x при $\Delta x \rightarrow 0$. Еластичність функції символічно позначають $E_x(y)$. Таким чином, $E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} y'$.

Еластичність – безрозмірна величина, значення якої не залежать від того, в яких одиницях вимірювалися величини x і y . Вона, зокрема, широко використовується при аналізі попиту та пропозиції. Так, еластичність попиту y щодо ціни x показує приблизно на скільки відсотків зміниться попит за зміни ціни на один відсоток.

Диференціалом функції y у точці x називається головна частина її приросту, лінійна щодо приросту аргументу. Диференціал функції $y = f(x)$ позначається dy або df . **Диференціалом dx аргументу** x називається приріст аргументу: $dx = \Delta x$. Диференціал функції $y = f(x)$ у точці x визначається рівністю: $dy = df = y'dx = f'(x)dx$.

Якщо приріст Δx аргументу малий (по абсолютній величині), то $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$, звідки $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$. Остання рівність використовується для наближених обчислень та, зокрема, для оцінки похибки значень функції. На практиці, як правило, величину x вимірюють (або обчислюють) з деякою похибкою Δx , що спричиняє похибку Δy величини $y = f(x)$. При малих значеннях Δx вважають, що $\Delta y = dy$.

Диференціал $dy = df(x)$ функції $y = f(x)$ є функцією від x . Диференціал $d(dy) = d(df(x))$ цієї функції називається **диференціалом другого порядку** або **другим диференціалом** функції $y = f(x)$ і позначається d^2y або $d^2f(x)$ (читається дэ два ігрек і, відповідно, дэ два эф від x): $d^2y = d^2f(x) = y''dx^2 = f''(x)dx^2$, де $dx^2 = (dx)^2$.

Приклад 1. Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні функцій:

- | | | |
|---------------------------------|--|--------------------------------|
| 1) $y = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$; | 2) $y = x^3 \sin x$; | 3) $y = x\sqrt{x} \arcsin x$; |
| 4) $y = \frac{\arctg x}{x}$; | 5) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$; | 6) $y = (3x^2 + 4)^5$; |

- 7) $y = \operatorname{tg}^3 x$; 8) $y = \cos(5x + 2)$; 9) $y = \operatorname{ctg}(\ln x)$;
 10) $y = \operatorname{tg}^2 3x$; 11) $y = \ln(x^2 + x + 1)$; 12) $y = \ln \sin \frac{x}{2}$;
 13) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$; 14) $y = 2^{x^4}$; 15) $y = x^{\sin x}$;
 16) $y = (\sin x)^{\cos x}$; 17) $x^2 + \sin y - e^{xy} = 0$; 18) $x = t^3 + t + 1$, $y = t^3 - t - 1$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

$$1. \quad y' = (3x^4 - 2x^3 + 5x - 7)' = (3x^4)' - (2x^3)' + (5x)' - (7)' = 3(4x^3)' - 2(3x^2)' + 5(x)' - 0 = 3 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 1 = 12x^3 - 6x^2 + 5.$$

$$2. \quad y' = (x^3 \sin x)' = (x^3)' \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$$

$$3. \quad \text{Скористаємося тим, що } x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}. \quad \text{Тоді } y' = (x\sqrt{x} \arcsin x)' = (x^{\frac{3}{2}} \arcsin x)' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \arcsin x + x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x} \arcsin x + \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$4. \quad y' = \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)' = \frac{x(\operatorname{arctg} x)' - x' \operatorname{arctg} x}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x}{x^2} = \frac{x - (1+x^2) \operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)}.$$

$$5. \quad y' = \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)' = \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{1 + \sin 2x}.$$

$$6. \quad \text{Позначимо } 3x^2 + 4 = u \text{ тоді } y = u^5. \text{ За правилом диференціювання складеної функції матимемо: } y' = (u^5)'_u \cdot (3x^2 + 4)'_x = 5u^4 \cdot 6x = 30x(3x^2 + 4)^4.$$

$$7. \quad y' = (\operatorname{tg}^3 x)' = 3\operatorname{tg}^2 x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 3\operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$8. \quad y' = (\cos(5x + 2))' = -\sin(5x + 2) \cdot (5x + 2)' = -5\sin(5x + 2).$$

$$9. \quad y' = (\operatorname{ctg}(\ln x))' = -\frac{1}{\sin^2(\ln x)} \cdot (\ln x)' = -\frac{1}{x \sin^2(\ln x)}.$$

$$10. \quad y' = (\operatorname{tg}^2 3x)' = 2\operatorname{tg} 3x (\operatorname{tg} 3x)' = 2\operatorname{tg} 3x \frac{1}{\cos^2 3x} (3x)' = \frac{6\operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x}.$$

$$11. y' = \left(\ln(x^2 + x + 1) \right)' = \frac{1}{x^2 + x + 1} (x^2 + x + 1)' = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

$$12. y' = \left(\ln \sin \frac{x}{2} \right)' = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} \right)' = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)' = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$$

$$13. y' = \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)' = \\ = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$14. y' = \left(2^{x^4} \right)' = 2^{x^4} \cdot \ln 2 \cdot (x^4)' = 4 \ln 2 \cdot x^3 2^{x^4}.$$

15. У цьому випадку і основа, і показник степеня залежить від x . Логарифмуючи, одержимо: $\ln y = \sin x \cdot \ln x$. Тепер продиференціюємо ліву і праву частини останньої рівності по x . Оскільки y є функцією від x , то $\ln y$ – складена функція від x , і тому $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$.

$$\text{Отже, } \frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}, \text{ звідки: } y' = y \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) = \\ = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

16. Аналогічно попередньому прикладу $\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x$, звідки $\frac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln \sin x + \cos x \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x}{\sin x}$. Тоді:

$$y' = y \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x}{\sin x} = (\sin x)^{\cos x} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x}{\sin x} = \\ = (\sin x)^{\cos x - 1} (\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln \sin x).$$

17. Диференціюючи по x обидві частини рівняння, отримуємо $2x + y' \cos y - e^{xy} (y + xy') = 0$, звідки $y' = \frac{ye^{xy} - 2x}{\cos y - xe^{xy}}$.

$$18. \text{Оскільки } x'_t = 3t^2 + 1, \quad y'_t = 3t^2 - 1, \text{ то } y'_x = \frac{3t^2 - 1}{3t^2 + 1}.$$

Приклад 2. Знайти похідні n -го порядку:

$$1) y = x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x - 7; \quad 2) y = e^x; \quad 3) y = 2^x; \quad 4) y = \sin x.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1) $y' = 4x^3 + 15x^2 - 4x + 3$, $y'' = 12x^2 + 30x - 4$, $y''' = 24x + 30$, $y^{IV} = 24$,
 $y^V = y^{VI} = \dots = 0$.

2) $y' = e^x$, $y'' = e^x$, ..., $y^{(n)} = e^x$.

3) $y' = 2^x \ln 2$, $y'' = 2^x \ln^2 2$, $y''' = 2^x \ln^3 2$, ..., $y^{(n)} = 2^x \ln^n 2$.

4) $y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, $y''' = -\cos x =$
 $= \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)$, ..., $y^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

Приклад 3. Знайти еластичність функції $y = x^2 - 3x + 2$ при $x = 5$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{x^2 - 3x + 2} (2x - 3)$.

При $x = 5$, отримуємо: $E_5(y) = \frac{5}{12} \cdot 7 = \frac{35}{12} \approx 2,92$.

Приклад 4. $y = \frac{x + 70}{2x + 5}$ – функція попиту на деякий товар (y – кількість товару, що купується в одиницю часу за ціною x грош. од.). Знайти еластичність попиту для ціни $x = 10$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Оскільки $y' = \left(\frac{x + 70}{2x + 5}\right)' = -\frac{135}{(2x + 5)^2}$, то

еластичність попиту щодо ціни $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = x \cdot \frac{2x + 5}{x + 70} \cdot \left(-\frac{135}{(2x + 5)^2}\right) =$
 $= -\frac{135x}{(x + 70)(2x + 5)}$. При ціні $x = 10$, отримуємо: $E_{10}(y) = -\frac{135 \cdot 10}{80 \cdot 25} = -\frac{27}{40} \approx$
 $\approx -0,68$. Отже, із збільшенням ціни $x = 10$ на товар на 1% попит зменшиться приблизно на 0,68%.

Приклад 5. Знайти диференціали функцій:

1) $y = x^3 + 2x - 1$; 2) $y = 2 \sin \sqrt{x}$; 3) $y = \arctg x^2$; 4) $y = e^{-x^2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1) $dy = (x^3 + 2x - 1)' dx = (3x^2 + 2) dx$; 2) $dy = (2 \sin \sqrt{x})' dx = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;

3) $dy = \frac{2x}{1 + x^4} dx$; 4) $dy = -2xe^{-x^2} dx$.

ЗАВДАННЯ

2.1. Знайти похідні функцій:

- 1) $y = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$; 2) $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$; 3) $y = x\sqrt{x} + x^2\sqrt{x}$;
- 4) $y = (3x^2 + 2x - 1)e^x$; 5) $y = 3x^3 \ln x - x^3 + 1$;
- 6) $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$; 7) $y = x \arcsin x + \arccos x$; 8) $y = \frac{\sin x}{x}$;
- 9) $y = x^2 \operatorname{ctg} x$; 10) $y = \frac{x^3}{\operatorname{tg} x}$; 11) $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$; 12) $y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} x$;
- 13) $y = x - \operatorname{tg} x$; 14) $y = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$; 15) $y = x \ln x$; 16) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$;
- 17) $y = x^2 2^x$; 18) $y = x^3 e^x$; 19) $y = x - \operatorname{arctg} x$; 20) $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$;
- 21) $y = \ln(2x^3 + 3x^2)$; 22) $y = \ln(1 + \cos x)$; 23) $y = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$;
- 24) $y = \arccos \frac{x}{2}$; 25) $y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x}$; 26) $y = \operatorname{tg}^2 3x$;
- 27) $y = \sqrt{2 - 3x^2}$; 28) $y = \cos^2 \frac{x}{5}$; 29) $y = \ln(\operatorname{tg} 3x)$;
- 30) $y = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$; 31) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1}$; 32) $y = \arccos \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$;
- 33) $y = \sin e^{-2x}$; 34) $y = e^{\operatorname{tg} 3x}$; 35) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$;
- 36) $y = \frac{\ln(1 + \sin x)}{\cos x}$; 37) $y = e^{\sqrt{2x}}$; 38) $y = 2^{\sin^2 x}$;
- 39) $y = \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1}$; 40) $y = 2x \cdot \sin x \cos x + \cos^2 x$; 41) $y = \arccos e^{\sqrt{x}}$;
- 42) $y = \ln(\operatorname{tg} x^5)$; 43) $y = \ln \ln \ln x$; 44) $y = \ln \cos \sqrt[3]{x}$;
- 45) $y = \frac{x - e^{2x}}{x + e^{2x}}$; 46) $y = \frac{\ln x}{x^4} + \frac{1}{x^4}$; 47) $y = 5^{\cos^3 x - 3 \cos x}$;
- 48) $y = \log_2 \sin^4 x$; 49) $y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \right)^3$; 50) $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$;
- 51) $y = \left(\frac{x - \arcsin x}{x - \arccos x} \right)^2$; 52) $y = (1 + \sin x)(1 + \cos x)$;
- 53) $y = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$; 54) $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$;
- 55) $y = x^2 e^{x^2} \ln x$; 56) $y = e^{\operatorname{tg}^2 x}$; 57) $y = \lg(x + \sqrt{x^2 + 4})$;

$$\begin{aligned}
58) \ y &= \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5; & 59) \ y &= \operatorname{arctg} e^{3x}; & 60) \ y &= \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x} \right)^6; \\
61) \ y &= e^{\frac{x}{a}} \cos \frac{x}{a}; & 62) \ y &= e^{-x} (\sin x + \cos x); & 63) \ y &= \ln \sqrt{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}}; \\
64) \ y &= \arccos \sqrt{1-2x}; & 65) \ y &= x \arcsin \sqrt{x}; & 66) \ y &= \arcsin \frac{1}{x}; \\
67) \ y &= 2^{\operatorname{arctg} 2x}; & 68) \ y &= (\arccos 3x)^2; & 69) \ y &= \left(\operatorname{tg}^3 \sqrt{x} \right)^6; \\
70) \ y &= e^{\sin 4x}; & 71) \ y &= \sqrt{\cos \sqrt{x}}; & 72) \ y &= \sqrt{\ln \cos x + 1}; \\
73) \ y &= \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 + x + 1}; & 74) \ y &= 2x \operatorname{tg} 2x + \ln \cos 2x; \\
75) \ y &= \ln(x \cdot \cos x + \sin x); & 76) \ y &= a^{x \sin x + \cos x}; & 77) \ y &= \frac{\cos^2 3x}{1 + \sin^2 3x}; \\
78) \ y &= \frac{1}{x \ln 3x}; & 79) \ y &= x^{\frac{1}{x}}; & 80) \ y &= x^{-x}; & 81) \ y &= (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}; \\
82) \ y &= (\operatorname{tg} x)^x; & 83) \ y &= x^{\ln x}; & 84) \ y &= x^{\arcsin x}; \\
85) \ x^2 + y^2 - 3xy &= 0; & 86) \ ye^x + xe^y &= 0; \\
87) \ \sin x + \sin y - \sin xy &= 0; & 88) \ x = a \cos t, \ y = a \sin t; \\
89) \ x = e^{-t} \sin t, \ y = e^{-t} \cos t; & 90) \ x = t + \operatorname{tg} t, \ y = t - \operatorname{ctg} t.
\end{aligned}$$

2.2. Знайти похідні другого порядку функцій:

$$\begin{aligned}
1) \ y &= x \sin 2x; & 2) \ y &= x\sqrt{x}; & 3) \ y &= x \arccos x; & 4) \ y &= \sqrt{\operatorname{tg} x}; \\
5) \ y &= e^{x^2}; & 6) \ y &= \ln \sin x.
\end{aligned}$$

2.3. Знайти похідні третього порядку функцій:

$$\begin{aligned}
1) \ y &= \frac{1}{2} \ln^2 x; & 2) \ y &= e^{\cos x}; & 3) \ y &= x \operatorname{tg} x; & 4) \ y &= xe^{2x}; \\
5) \ y &= \ln(1+x); & 6) \ y &= x^2 \ln x.
\end{aligned}$$

2.4. Знайти похідні n -го порядку функцій:

$$\begin{aligned}
1) \ y &= e^{kx}; & 2) \ y &= x^n; & 3) \ y &= \cos x.
\end{aligned}$$

2.5. Знайти еластичність функції $f(x)$ при $x = x_0$:

$$\begin{aligned}
1) \ f(x) &= 3x^2 + 2, \ x_0 = 2; & 2) \ f(x) &= x^3 - 2x^2 + x, \ x_0 = 5; \\
3) \ f(x) &= e^{2x+1}, \ x_0 = 1; & 4) \ f(x) &= xe^{-x}, \ x_0 = 2.
\end{aligned}$$

2.6. $f(x)$ – функція попиту на деякий товар, що продається за ціною x грош. од., тобто кількість товару, що продається в одиницю часу за ціною x . Знайти еластичність попиту на товар при ціні $x = x_0$:

- 1) $f(x) = 2x + 3$, $x_0 = 10$; 2) $f(x) = 2x\sqrt{x} - x$, $x_0 = 25$.

2.7. Знайти диференціали функцій:

- 1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \operatorname{tg} 3x$; 3) $y = \cos e^x$; 4) $y = \arcsin e^x$;
5) $y = 2 \cos \sqrt{x}$; 6) $y = \arccos \sqrt{x}$; 7) $y = e^{\sin 2x}$; 8) $y = e^{\sin^2 x}$.

2.2. Правило Лопітала

Нехай у деякому околі точки x_0 (крім, можливо, самої точки x_0) функції $f(x)$ й $\varphi(x)$ диференційовні, $\varphi'(x) \neq 0$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ або

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, тобто $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точці x_0 являє собою невизначеність

виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Тоді: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, якщо границя в правій частині цієї рівності існує.

Якщо $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точці x_0 також являє собою невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, функції $f'(x)$ та $\varphi'(x)$ задовольняють відповідним умовам, то слід перейти до відношення других похідних і т.д.

У випадку невизначеності виду $(0 \cdot \infty)$ або $(\infty - \infty)$ її потрібно алгебраїчно перетворити в невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$ або $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ і далі скористатися правилом Лопітала.

У випадку невизначеності виду (0^0) , (∞^0) або (1^∞) , треба прологарифмувати дану функцію і знайти границю її логарифма. Потім скористатися тотожністю $y = e^{\ln y}$.

Правило залишається в силі і у випадку, коли $x \rightarrow \pm\infty$.

Приклад 6. Знайти границі:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - x - 10}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{e^x - e}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$; 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$;
5) $\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln x$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$; 7) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$;

$$8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\cos x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow +0} (1+x)^{\ln x}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1) При $x = 2$ чисельник і знаменник перетворюються на нуль, тобто має місце невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Скористаємося правилом Лопіталя. Для цього розглянемо границю відношення похідних чисельника та знаменника:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - x - 10} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)'}{(3x^2 - x - 10)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3}{6x - 1} = \frac{1}{11}.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{e^x - e} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \ln x)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1}{e^x} = \frac{1}{e}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \dots =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}{e^x} = 0.$$

5) Тут має місце невизначеність виду $(0 \cdot \infty)$. Представимо добуток у вигляді частки, а потім, одержавши невизначеність виду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^2 \ln x = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = 0.$$

6) У цьому випадку має місце невизначеність виду $(\infty - \infty)$. Зведемо дробу до спільного знаменника, а потім, отримавши невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} =$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

7) Це невизначеність виду (0^0) . Позначимо $x^{\sin x} = y$ та прологарифмуємо: $\ln y = \sin x \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}$.

$$\lim_{x \rightarrow +0} \ln y = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{tg} x = 1 \cdot 0 = 0.$$

$$\text{Отже, } \lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln y} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \ln y} = e^0 = 1.$$

8) Це невизначеність виду (∞^0) . Покладемо $(\operatorname{tg} x)^{\cos x} = y$ та прологарифмуємо: $\ln y = \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x = \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}}$.

Застосовуючи правило Лопіталя, отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \ln y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\cos x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}}{\frac{-\sin x}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0.$$

$$\text{Отже, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} e^{\ln y} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \ln y} = e^0 = 1.$$

9) Це невизначеність виду (1^∞) . Прологарифмуємо і застосуємо правило Лопіталя:

$$(1+x)^{\ln x} = y \Rightarrow \ln y = \ln x \cdot \ln(1+x);$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \ln y = \lim_{x \rightarrow +0} \ln x \cdot \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\ln x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{-1}{x \ln^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \ln^2 x}{1+x} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^2 x}{1 + \frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{2}{x} \ln x}{\frac{-1}{x^2}} = 2 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 2 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -2 \lim_{x \rightarrow +0} x = 0.$$

Отже, $\lim_{x \rightarrow +0} (\ln(1+x))^{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\ln y} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \ln y} = e^0 = 1$.

ЗАВДАННЯ

2.8. Використовуючи правило Лопіталя, знайти границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{2x^3 + 3x - 5};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 2x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{1 - e^x}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +1} \frac{x-1}{\ln x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x} \right);$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x;$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow +0} x^x;$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x^2};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right);$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right);$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x.$$

2.3. Зростання та спадання функції. Екстремум

Функція $f(x)$ називається **зростаючою (спадною)** в точці x_0 , якщо при будь-якому досить малому $\Delta x > 0$ виконується умова $f(x_0 - \Delta x) < f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$ ($f(x_0 - \Delta x) > f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$).

Функція називається **зростаючою (спадною) на інтервалі**, якщо вона зростає (спадає) у кожній точці цього інтервалу. Якщо функція зростає (спадає) на інтервалі (a, b) , то для будь-яких двох точок x_1 і x_2 із цього інтервалу, що задовольняють умові $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Якщо $f'(x_0) > 0$ ($f'(x_0) < 0$), то функція $f(x)$ зростає (спадає) в точці x_0 ; якщо $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всіх x з інтервалу (a, b) , то функція $f(x)$ зростає (спадає) на цьому інтервалі.

Значення $f(x_0)$ називається **максимумом** або **локальним максимумом** (**мінімумом** або **локальним мінімумом**) функції $f(x)$, якщо при будь-якому досить малому Δx виконується умова $f(x_0) > f(x_0 \pm \Delta x)$ ($f(x_0) < f(x_0 \pm \Delta x)$), тобто, якщо в межах деякого околу точки x_0 значення $f(x_0)$ є найбільшим (найменшим). При цьому сама точка x_0 називається **точкою максимуму** (**мінімуму**) функції $f(x)$. Максимуми й мінімуми функції називаються **екстремумами** або **екстремальними значеннями** функції, а точки максимуму й мінімуму – **точками екстремуму** або **екстремальними точками** функції.

Необхідна умова екстремуму: якщо функція $f(x)$ в точці x_0 має екстремум, то її похідна $f'(x)$ в цій точці або обертається в нуль, або не існує.

Точки з області визначення функції $f(x)$, в яких $f'(x)$ обертається в нуль або не існує, називаються **критичними точками** або **точками підозрілими на екстремум**. Не будь-яка критична точка є точкою екстремуму.

Достатні умови екстремуму:

1. Якщо x_0 – критична точка функції $f(x)$ і при довільному досить малому $\Delta x > 0$ виконуються нерівності $f'(x_0 - \Delta x) > 0$ та $f'(x_0 + \Delta x) < 0$ ($f'(x_0 - \Delta x) < 0$ та $f'(x_0 + \Delta x) > 0$), то x_0 – точка максимуму (мінімуму); якщо ж знаки $f'(x_0 - \Delta x)$ та $f'(x_0 + \Delta x)$ однакові, то в точці x_0 у функції $f(x)$ екстремуму немає.

Іншими словами: якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 похідна змінює знак з "+" на "-" (з "-" на "+"), то x_0 – точка максимуму (мінімуму), якщо ж похідна знак не змінює, тоді в точці x_0 екстремуму немає.

2. Якщо $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то у функції $f(x)$ в точці x_0 екстремум є; причому, максимум, якщо $f''(x_0) < 0$, і мінімум, якщо $f''(x_0) > 0$.

Говорять, що функція $f(x)$ в точці $x_0 \in [a, b]$ досягає **найбільшого** (**найменшого**) **значення на відрізку** $[a, b]$, якщо для всіх точок цього відрізка виконується умова $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$). Найбільше (найменше) значення функції позначають так: $\max_{x \in [a, b]} f(x)$, ($\min_{x \in [a, b]} f(x)$).

Для знаходження найбільшого (найменшого) значення функції на відрізку $[a, b]$ потрібно знайти всі критичні точки функції, що належать цьому відрізку, обчислити значення функції в цих точках і на кінцях відрізка, після чого із знайдених значень вибрати найбільше (найменше).

Приклад 7. Знайти інтервали зростання та спадання функцій:

$$1) y = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 5; \quad 2) y = \arctg x.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1) Оскільки $y' = x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$, то $y' > 0$ на інтервалах $(-\infty, 1)$ та $(2, \infty)$, і $y' < 0$ на інтервалі $(1, 2)$. Отже, на інтервалах $(-\infty, 1)$ та $(2, \infty)$ дана функція зростає, а на інтервалі $(1, 2)$ – спадає.

2) У даному випадку $y' = \frac{1}{1+x^2} > 0$ для всіх x . Отже, функція $y = \arctg x$ зростає на всій числовій осі.

Приклад 8. Дослідити на екстремум функції:

$$1) y = e^{-x^2}; \quad 2) y = x^3 - 12x + 8; \quad 3) y = \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1) Функція визначена на всій числовій осі. Її похідна $y' = -2xe^{-x^2}$ також визначена для всіх x і перетворюється на нуль в єдиній точці $x = 0$. Очевидно, що для $x < 0$ похідна $y' > 0$, а для $x > 0$ похідна $y' < 0$. Отже, згідно з першою достатньою умовою екстремуму, у точці $x = 0$ функція має максимум $y_{\max} = 1$.

2) Функція визначена на всій числовій осі. Знаходимо похідну $y' = 3x^2 - 12$ і, прирівнявши її нулю, визначимо точки, підозрілі на екстремум: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Знайдемо другу похідну: $y'' = 6x$. Оскільки $y''(-2) = -12 < 0$, $y''(2) = 12 > 0$, то, згідно з другою достатньою умовою екстремуму, робимо висновок, що в точці $x_1 = -2$ функція має максимум $y_{\max} = 24$, а в точці $x_2 = 2$ – мінімум $y_{\min} = -8$.

3) У даному випадку функція теж визначена по всій числовій осі. Її похідна $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ в нуль не перетворюється за жодних значень x , але не існує при $x = 1$ (критична точка). При $x < 1$ похідна $y' < 0$, а при $x > 1$ $y' > 0$. Отже, згідно з першою достатньою умовою екстремуму, у точці $x = 1$ функція має мінімум $y_{\min} = 0$.

Приклад 9. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2$ на відріжку $[-3, 3]$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

Знайдемо критичні точки: $y' = x^2 + 2x, x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0$.

Обчислимо значення функції у цих точках: $y(-2) = \frac{4}{3}$, $y(0) = 0$.

Обчислимо значення функції кінцях відрізка: $y(-3) = 0$, $y(3) = 18$. З отриманих значень вибираємо найбільше та найменше. Отже, найбільше значення функції на відрізку $[-3, 3]$ дорівнює 18 (досягається на правому кінці відрізка), а найменше значення дорівнює нулю (досягається на лівому кінці відрізка і всередині інтервалу в точці $x = 0$).

Приклад 10. При виробництві x одиниць продукції фірма отримує прибуток $y_n = 1200x + 45x^2 - x^3 - 300$ грош. од. від її реалізації. Скільки одиниць продукції необхідно виробляти фірмі, щоб отримувати максимум прибутку?

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

Знайдемо точки можливого екстремуму функції прибутку:

$y_n' = 1200 + 90x - 3x^2 \Rightarrow 1200 + 90x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 30x - 400 = 0 \Rightarrow x_1 = -10, x_2 = 40$. Точка $x_1 = -10$ за змістом задачі нам не підходить. Досліджуємо точку $x_2 = 40$. Оскільки $y_n'' = 90 - 6x$ і $y_n''(40) = 90 - 240 < 0$, то в точці $x_2 = 40$ функція y_n досягає максимуму. Значить, фірма буде одержувати максимум прибутку, якщо буде виробляти 40 одиниць продукції.

Обчислимо максимальний прибуток фірми:

$$y_n(40) = 1200 \cdot 40 + 45 \cdot 1600 - 64000 - 300 = 55700 \text{ грош. од.}$$

Приклад 11. Фірма може виробляти не більше 60 одиниць продукції, яку продає за ціною 3000 грош. од. При виробництві x одиниць продукції витрати фірми становлять $y_в = x^3 - 90x^2 + 4500x + 200$ грош. од. Визначити обсяг випуску продукції, при якому фірма буде одержувати максимум прибутку.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

При виробництві x одиниць продукції дохід фірми буде становити $y_д = 3000x$ грош. од., а витрати на їхнє виробництво $y_в = x^3 - 90x^2 + 4500x + 200$ грош. од. Тоді прибуток $y_n = y_д - y_в = 3000x - (x^3 - 90x^2 + 4500x + 200) = -1500x + 90x^2 - x^3 - 200$ грош. од. Для розв'язку задачі необхідно знайти найбільше значення функції прибутку y_n за умови, що обсяг виробленої продукції не може бути більше 60 од., тобто при $0 \leq x \leq 60$.

Знайдемо точки можливого екстремуму функції y_n : $y_n' = -1500 + 180x - 3x^2$;

$$y_n' = 0 \Rightarrow -1500 + 180x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 60x + 500 = 0 \Rightarrow x_1 = 10, x_2 = 50.$$

Обчислюємо значення функції y_n в точках: $x = 0$, $x = 10$, $x = 50$ і $x = 60$.

Одержуємо:

$$y_n(0) = -200,$$

$$y_n(10) = -1500 \cdot 10 + 90 \cdot 100 - 1000 - 200 = -7200,$$

$$y_n(50) = -1500 \cdot 50 + 90 \cdot 2500 - 125000 - 200 = 24800,$$

$$y_n(60) = -1500 \cdot 60 + 90 \cdot 3600 - 216000 - 200 = 17800.$$

Отже фірма буде одержувати максимум прибутку (24800 грош. од.), якщо буде виробляти 50 одиниць продукції.

ЗАВДАННЯ

2.9. Знайти інтервали зростання та спадання функцій:

$$1) y = x^3 - 3x^2 + 24; \quad 2) y = xe^x; \quad 3) y = x \ln x;$$

$$4) y = x^2 e^{-x}; \quad 5) y = x 2^{-x^2}; \quad 6) \frac{1}{1+x^2}.$$

2.10. Дослідити на екстремум функції:

$$1) y = \frac{x^3}{3} - 4x; \quad 2) y = \frac{x^4}{4} - x^3; \quad 3) y = \frac{x}{5} + \frac{5}{x}; \quad 4) y = x^2(1-x);$$

$$5) y = \frac{1+\ln x}{x}; \quad 6) y = xe^{-x}; \quad 7) y = \ln(x^2+1); \quad 8) y = x - \sin^2 x;$$

$$9) y = x + \sqrt{3-x}; \quad 10) y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}; \quad 11) y = \frac{x^3}{x^2-4}; \quad 12) y = x\sqrt{1-x}.$$

2.11. Знайти найбільше та найменше значення функцій:

$$1) y = x^4 - 2x^2 + 1 \text{ на відрізку } [-3, 2];$$

$$2) y = x^3 + 6x^2 + 9x \text{ на відрізку } [-2, 3];$$

$$3) y = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 100 \text{ на відрізку } [-4, 5].$$

2.12. Земельну ділянку прямокутної форми площею 625 м^2 потрібно обнести парканом. Які повинні бути розміри ділянки, щоб витрати на спорудження паркану були найменшими?

2.13. Визначити розміри закритої коробки об'ємом 1000 см^3 із квадратною основою, на виготовлення якої витрачається найменша кількість матеріалу.

2.14. Аркуш картону має форму прямокутника зі сторонами 50 см. і 80 см. Якщо вирізати по кутам цього прямокутника квадрати однакового розміру і зігнути виступаючі частини, одержимо відкриту зверху коробку, висота якої дорівнює стороні квадрата. Якою повинна бути сторона квадрата, щоб об'єм коробки був найбільшим?

2.15. Витрати фірми при виробництві x одиниць продукції становлять $100 + 570x - 16x^2 + 0,1x^3$ грош. од. Свою продукцію фірма продає за ціною $300 - x$ грош. од. Скільки одиниць продукції потрібно виробляти фірмі, щоб

одержувати максимум прибутку? Який прибуток при цьому вона одержить? За якою ціною буде продавати продукцію?

2.16. При виробництві x одиниць продукції фірма отримує прибуток $2\sqrt{x} - \frac{0,02}{3}x\sqrt{x} - 2$ тис. грош. од. Виробничі потужності фірми дозволяють виробляти до 144 одиниць продукції на добу.

1) Скільки одиниць продукції повинна виробляти фірма за добу, щоб одержати максимум прибутку? Який прибуток буде одержувати фірма?

2) Скільки одиниць продукції повинна виробляти фірма за добу, щоб одержати максимум прибутку, якщо її виробничі потужності дозволяють виробляти не більше 81 од. продукції за добу?

2.4. Опуклість функції. Точки перегину кривої

Крива $y = f(x)$ (графік функції $y = f(x)$) називається **опуклою (угнутою)** в точці x_0 , якщо в деякому околі цієї точки крива розташована нижче (вище) дотичної до цієї кривої в точці x_0 . Якщо $y''(x_0) < 0$ ($y''(x_0) > 0$), то крива в цій точці опукла (угнута). Якщо крива опукла (угнута) у кожній точці інтервалу (a, b) , то говорять, що вона **опукла (угнута) на цьому інтервалі**.

Точка $M(x_0, y_0)$ називається **точкою перегину кривої (графіка функції)**, якщо при переході через цю точку крива змінює характер опуклості. Якщо $M(x_0, y_0)$ – точка перегину, то $y''(x_0) = 0$ або не існує (необхідна умова перегину).

Точки області визначення функції, в яких $y'' = 0$ або не існує називаються точками, підозрілими на перегин. Якщо при переході через точку $M(x_0, y_0)$, підозрілу на перегин, y'' змінює знак, то $M(x_0, y_0)$ – точка перегину (достатня умова перегину).

Приклад 12. Визначити інтервали опуклості та точки перегину графіка функції $y = e^{-x^2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

Область визначення функції – вся числова вісь. Знаходимо другу похідну: $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2)$. Із умови $y'' = 0$ отримуємо: $1 - 2x^2 = 0$, тобто $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Оскільки $y'' > 0$ для $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$, на цих інтервалах графік угнутий. На інтервалі $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ друга похідна $y'' < 0$, отже, на цьому

інтервалі графік функції опуклий. При переході через точки $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ друга похідна змінює знак – тож точки $A(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}})$ та $B(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}})$ є точками перегину.

ЗАВДАННЯ

2.17. Визначити інтервали опуклості кривих:

- 1) $y = x^2$; 2) $y = x^3$; 3) $y = e^x$; 4) $y = \ln x$;
 5) $y = \frac{x^2}{x+1}$; 6) $y = \frac{x^3}{x+1}$.

2.18. Знайти точки екстремуму та точки перегину:

- 1) $y = \frac{x^3}{6} - x^2 - 6x + 1$; 2) $y = x^4 - 18x^2 + 1$; 3) $y = e^{-x^2}$;
 4) $y = xe^x$; 5) $y = x \ln x$; 6) $y = \frac{\ln x}{x}$.

2.5. Асимптоти

Асимптотою кривої $y = f(x)$ називається пряма, до якої необмежено наближається точка, яка рухається по кривій, при її необмеженому віддаленні від початку координат. Асимптоти бувають **вертикальні** (рівняння такої асимптоти $x = a$) і **похилі** (рівняння похилої асимптоти $y = kx + b$).

Для того, щоб пряма $x = a$ була вертикальною асимптотою, необхідно і достатньо, щоб виконувалася хоча б одна з умов:
 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$; $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$; тобто, точка $x = a$ повинна бути точкою розриву другого роду функції $y = f(x)$.

Пряма $y = kx + b$ буде похилою асимптотою при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), якщо існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ та $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ та $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] = b$). Якщо область визначення функції $y = f(x)$ є скінченним інтервалом, то похилих асимптот немає.

Приклад 13. Знайти асимптоти кривої $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

Функція визначена на всій числовій осі за винятком точок $x = \pm 1$. Прямі

$x = \pm 1$ є вертикальними асимптотами, тому що $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty$. Шукаємо

похилі асимптоти: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x^2}} = 1;$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - \frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0.$$

Отже, пряма $y = x$ є похилою асимптотою як при $x \rightarrow +\infty$, так і при $x \rightarrow -\infty$. Таким чином, асимптотами будуть прямі: $x = \pm 1$ і $y = x$.

Приклад 14. Знайти асимптоти кривої $y = xe^{-x}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

Областю визначення функції є вся числова вісь. Оскільки у функції немає точок розриву, вертикальних асимптот немає. Шукаємо похилі асимптоти:

$$1. k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{\infty} \right) = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [xe^{-x} - 0 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0. \text{ Значить, при } x \rightarrow +\infty \text{ похила асимптота є і її рівняння } y = 0 \text{ (вісь } Ox).$$

$$2. k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty. \text{ Отже, при } x \rightarrow -\infty \text{ похилої асимптоти немає.}$$

ЗАВДАННЯ

2.19. Знайти асимптоти кривих:

- 1) $y = x^2 + x + 1;$ 2) $y = x^3 + 2x - 3;$ 3) $y = \frac{x^2 - 2}{x};$ 4) $y = \frac{x^2}{x - 2};$
- 5) $y = \frac{x^3}{x^2 + 1};$ 6) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2};$ 7) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4};$ 8) $y = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 9};$
- 9) $y = (x + 1)e^x;$ 10) $y = xe^{-x^2}.$

2.6. Побудова графіків функцій

Для побудови графіка функції спочатку потрібно досліджувати цю функцію. Дослідження зручно проводити у наступному порядку:

- 1) Знайти область визначення функції.
- 2) Перевірити, чи притаманна графіку функції симетрія:

- а) якщо функція парна ($f(-x) = f(x)$), то графік симетричний відносно осі Oy ;
- б) якщо функція непарна ($f(-x) = -f(x)$), то графік симетричний відносно початку координат;
- в) якщо функція періодична ($f(x + T) = f(x)$), то досить побудувати її графік на одному періоді.
- 3) Перевірити наявність асимптот (вертикальних і похилих).
- 4) Знайти (якщо вони існують) точки перетину графіка функції з осями координат. Для цього потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$ (знаходяться точки перетину графіка з віссю Ox) і обчислити $f(0)$ (знаходиться точка перетину графіка з віссю Oy).
- 5) Знайти першу та другу похідні і визначити точки, підозрілі на екстремум, і точки, підозрілі на перегин (точки з області визначення функції, в яких ці похідні обертаються в нуль або не існують).
- 6) Розбити область визначення функції на інтервали, кінцями яких є точки розриву функцій $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ і точки, у яких вони обертаються в нуль. На кожному з таких інтервалів ці функції зберігають знак.
- 7) Для області визначення функції (з урахуванням розбиття її на інтервали) побудувати наступну таблицю (таблиця 1).

Таблиця 1.

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$\dots\dots$ $\dots$	x_{n-1}	(x_{n-1}, x_n)	x_n	$(x_n, +\infty)$
$f(x)$									
$f'(x)$									
$f''(x)$									

У стовпцях x_i цієї таблиці записують значення функції $f(x_i)$, а також ті значення $f'(x_i)$ та $f''(x_i)$, які дорівнюють нулю. У стовпцях (x_i, x_{i+1}) відзначають знаки $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$. По заповненій таблиці легко побачити точки екстремуму і точки перегину.

- 8) Побудувати систему координат, асимптоти і «чудові» точки (точки перетину графіка функції з осями координат, точки екстремуму і точки перегину).
- 9) Побудувати ескіз графіка.

Приклад 15. Побудувати графік функції $y = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1. Функція визначена на всій числовій осі, за винятком точки $x = 2$.

2. Графік симетрії не має, тому що

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 3}{(-x) - 2} = \frac{x^2 - 3}{-x - 2} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}.$$

3. Пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою, оскільки $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3}{x - 2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \infty$.

Перевіряємо наявність похилих асимптот:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{x^2 - 3}{x - 2} - 1 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3 - x^2 + 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 3}{x - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{1} = 2.$$

Похила асимптота є. Її рівняння $y = x + 2$.

4. Шукаємо точки перетину графіка з віссю Ox :

$$\frac{x^2 - 3}{x - 2} = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}; \text{ та з віссю } Oy: f(0) = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Графік функції перетинає вісь Ox в точках $(-\sqrt{3}; 0)$ і $(\sqrt{3}; 0)$, а вісь Oy – в точці $(0; 1,5)$.

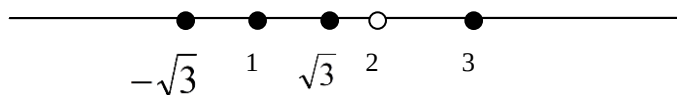
$$\begin{aligned} 5. \text{ Знаходимо } y' \text{ та } y'': y' &= \frac{2x(x - 2) - (x^2 - 3)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 3}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}, \\ y'' &= \frac{(2x - 4)(x - 2)^2 - (x^2 - 4x + 3) \cdot 2(x - 2)}{(x - 2)^4} = \frac{(2x - 4)(x - 2) - 2(x^2 - 4x + 3)}{(x - 2)^3} = \\ &= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x - 6}{(x - 2)^3} = \frac{2}{(x - 2)^3}. \end{aligned}$$

Знаходимо точки, підозрілі на екстремум:

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$$

Точок перегину немає, тому що $y'' = \frac{2}{(x - 2)^3} \neq 0$, а точка $x = 2$ не належить до області визначення функції.

6. Розіб'ємо область визначення функції на інтервали



7. Побудуємо таблицю 2 (згідно з таблицею 1).

Таблиця 2.

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f(x)$	—	0	+	2	+	0	—	не існує	+	6	+
$f'(x)$	+		+	0	—		—	не існує	—	0	+
$f''(x)$	—		—		—		—	не існує	+		+

З таблиці 2 видно, що $x=1$ — точка максимуму (при переході через цю точку $f'(x)$ змінює знак з «+» на «—»), $x=3$ — точка мінімуму ($f'(x)$ змінює знак з «—» на «+»), точок перегину нема.

8. Будуємо систему координат, асимптоти ($x=2$ і $y=x+2$), «чудові точки» ($(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(1, 2)$, $(3, 6)$) і малюємо ескіз графіка (рис. 1).

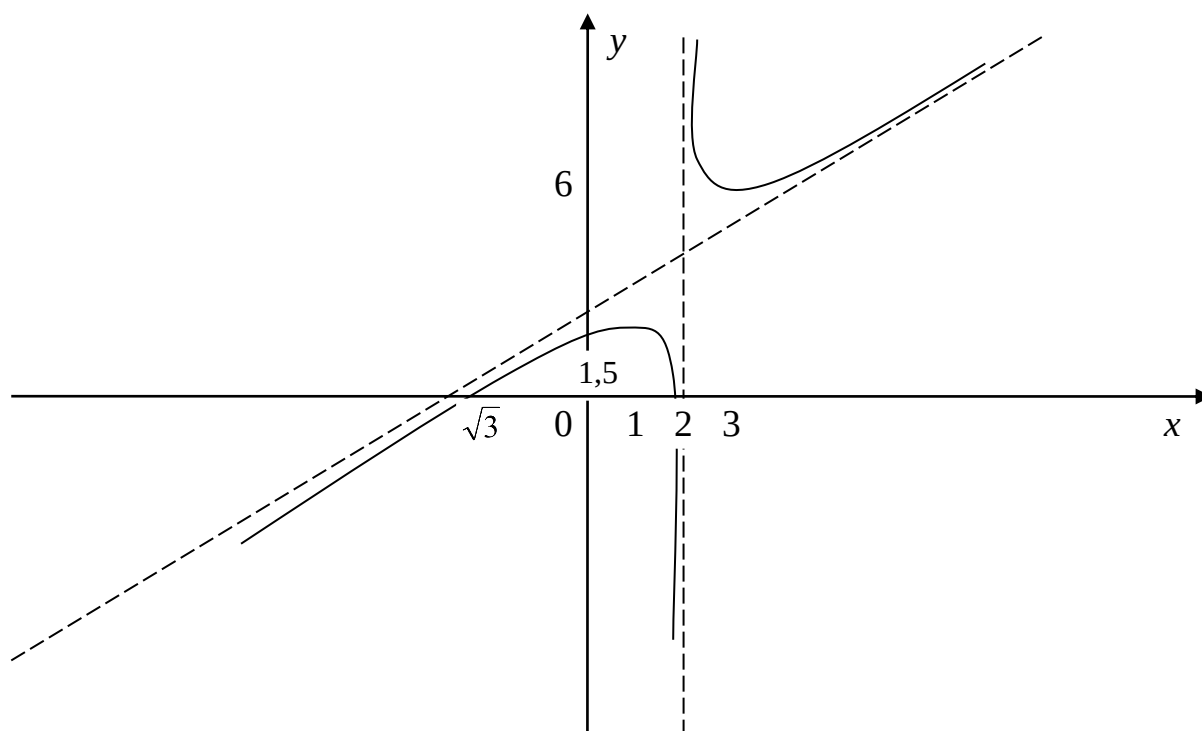


Рис. 1.

ЗАВДАННЯ

2.20. Дослідити функції та побудувати їх графіки:

- 1) $y = x^3 - 6x^2$; 2) $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$; 3) $y = \frac{x^2}{x+1}$; 4) $y = \frac{x^2}{x^2-4}$;
5) $y = \frac{x^3}{x-1}$; 6) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$; 7) $y = xe^{-x}$; 8) $y = (x+1)e^x$;
9) $y = \frac{\ln x}{x}$; 10) $y = x \ln x$.

3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

3.1. Функції багатьох змінних

Якщо кожній парі (x, y) значень двох незалежних змінних величин x і y з деякої області $D \in R^2$ за певним правилом ставиться у відповідність одне і тільки одне значення змінної величини z , то говорять, що в області D задана **функція z двох незалежних змінних x та y** . Цю функцію символічно позначають так: $z = f(x, y)$, $z = z(x, y)$ тощо. Змінні x і y називаються **аргументами**, а область D – **областю визначення функції z** .

Через те що кожній упорядкованій парі чисел (x, y) відповідає єдина точка M площини xOy і, навпаки, кожній точці M площини xOy відповідає єдина пара впорядкованих чисел (x, y) , то функцію двох змінних можна розглядати як функцію точки $M(x, y)$ та замість $z = f(x, y)$ писати $z = f(M)$.

Область D визначення функції $z = f(x, y)$ ($z = f(M)$) в найпростіших випадках являє собою частину площини xOy , обмежену деякою кривою (при цьому точки цієї кривої можуть належати або не належати області визначення) або всю площину xOy . Лінію, що обмежує область D , називають **межею області визначення**, а точки цієї лінії – **межевими точками**. Точки області D , які не є межевими, називають **внутрішніми точками області D** . Область, що складається з одних внутрішніх точок називають **відкритою**, якщо всі точки границі належать області, то область називається **замкненою**.

Приклад 1. Знайти області визначення функцій:

- 1) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$; 2) $z = \ln(25 - x^2 - y^2)$; 3) $z = e^{25 - x^2 - y^2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1) Через те, що для знаходження значень функції необхідно добувати квадратичний корінь (а це можливо тільки в тому випадку, коли підкореневий вираз не від'ємний), то областю визначення функції буде множина точок

$M(x, y)$ площини xOy , координати яких задовольняють умові: $25 - x^2 - y^2 \geq 0$, або, що теж саме, $x^2 + y^2 \leq 25$. Отже, областю визначення функції буде круг із центром в початку координат і радіусом рівним 5. Область буде замкненою, тому що її межа (коло $x^2 + y^2 = 25$) належить області визначення.

2) Беручи до уваги, що логарифм визначений тільки для додатних величин, області визначення будуть належати тільки ті точки $M(x, y)$ площини xOy , координати яких задовольняють умові: $25 - x^2 - y^2 > 0$, тобто $x^2 + y^2 < 25$. Отже, областю визначення функції будуть точки, які знаходяться всередині кола $x^2 + y^2 = 25$. Область визначення є відкритою областю, тому що її межа (коло $x^2 + y^2 = 25$) не належить області визначення.

3) Областю визначення цієї функції буде вся координатна площина xOy , тому що показникова функція визначена для будь-яких дійсних значень аргументу.

Графіком функції $z = f(x, y)$ у прямокутній системі координат $Oxyz$ є деяка поверхня (геометричне місце точок простору, координати яких задовольняють рівняння $z = f(x, y)$).

Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина точок $M(x, y)$ площини xOy , в яких функція набуває одного і того ж значення C , тобто тих точок $M(x, y)$, для яких $f(x, y) = C$. При різних значеннях C виходять різні лінії рівня.

Приклад 2. Знайти лінії рівня функції $z = x^2 + y^2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Лінії рівня даної функції визначаються умовою $x^2 + y^2 = C$ ($C > 0$). Надаючи C різні значення, одержимо концентричні кола радіуса $\sqrt{C}$ із центром в початку координат. (Графіком функції є круговий конус, вісь якого збігається з віссю Oz).

Поняття функції двох змінних легко узагальнюється на випадок функції будь-якого скінченного числа змінних.

Якщо кожній впорядкованій сукупності значень незалежних змінних $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ з деякої області $D \subset R^n$ за певним правилом ставиться у відповідність одне і тільки одне значення змінної величини u , то говорять, що в області D задана **функція n змінних** $x_1, x_2, \dots, x_n$ і використовують символічний запис $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ або $u = f(M)$.

Областю визначення функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ є деяка множина точок простору $Oxyz$. Область визначення функції чотирьох і більшого числа змінних не допускає простого геометричного тлумачення.

Приклад 3. Знайти область визначення функції $u = \frac{1}{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Функція визначена у всьому просторі R^3 , за винятком точок $M(x, y, z)$, координати яких задовольняють умові: $1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, тобто областю визначення функції буде весь тривимірний простір, за винятком точок, що лежать на одиничній сфері із центром в початку координат.

В економіці часто використовуються так звані **багатофакторні виробничі функції** $u = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, які виражають залежність обсягу або вартості u виробляємої продукції від обсягу $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ споживаних ресурсів.

Найбільш використовуваною є двофакторна виробнича функція Кобба-Дугласа: $z = Ax^\alpha y^\beta$, де A , α та β деякі невід'ємні числа (найчастіше $\alpha + \beta \leq 1$), x – обсяг фондів, y – обсяг трудових ресурсів.

ЗАВДАННЯ

3.1. Знайти області визначення функцій:

$$1) z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}; \quad 2) z = (1 - x^2 - y^2)^{-1}; \quad 3) z = \ln(x + y);$$

$$4) z = x + \sqrt{y}; \quad 5) z = \frac{x + y}{x - y}; \quad 6) y = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2};$$

$$7) u = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}; \quad 8) u = \ln(x^2 - y^2 - z^2 - 4); \quad 9) u = \frac{xy}{z};$$

$$10) u = \frac{y^2 + z^2}{x^2 - 1}.$$

3.2. Знайти лінії рівня функцій:

$$1) z = 2x + 3y; \quad 2) z = x - y^2; \quad 3) z = x^2 - y; \quad 4) z = \frac{x}{y}; \quad 5) z = \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

3.2. Похідні та диференціали функції багатьох змінних

Повним приростом Δz функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ називається різниця $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta z$, де Δx і Δy довільні прирости аргументів. Якщо прирости надаються лише одному аргументу x або y , то такі прирости $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ і $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ називаються **частинними приростами** функції $z = f(x, y)$ по x і по y відповідно.

Функція $z = f(x, y)$ називається **неперервною в точці** $M(x, y)$, якщо її повний приріст Δz прямує до нуля, коли прирости аргументів Δx і Δy прямують до нуля, тобто, якщо: $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)] = 0$.

Функція, неперервна в кожній точці деякої області, називається **неперервною в цій області**.

Для функцій більшого числа змінних поняття повного приросту, частинних приростів, неперервності функції визначаються аналогічно. Так, наприклад, повним приростом функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ буде $\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$.

Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ по незалежній змінній x називається границя $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, обчислена при фіксованому (сталому) y . Частинну похідну по x позначають одним з наступних символів: $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{\partial f}{\partial x}$; z'_x ; $f'_x(x, y)$.

Частинна похідна по y позначається: $\frac{\partial z}{\partial y}$; $\frac{\partial f}{\partial y}$; z'_y ; $f'_y(x, y)$ і визначається аналогічно: $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$.

Аналогічно вводяться поняття і позначення частинних похідних функцій більшого числа змінних. Так, для функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z}.$$

З означення частинних похідних виходить, що частинна похідна функції по будь-якій змінній є звичайна похідна функції по цій змінній, обчислена при припущенні, що решта змінних фіксовані (тобто стали). Тому, частинні похідні обчислюються за формулами і правилами обчислення похідних функцій однієї змінної.

Приклад 4. Знайти частинні похідні функцій:

$$1) z = x^2 + 3xy + 2y^2 - 5x + 6y - 7; \quad 2) u = e^{x+y^2-z^3};$$

$$3) u = x \sin y + y^2 \cos z - z^3 \operatorname{tg} v + 3x^2 y z \sqrt{v}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

$$1) \text{ Вважаючи } y \text{ сталою величиною, отримуємо: } \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y - 5;$$

$$\text{вважаючи } x \text{ сталою, отримуємо: } \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 4y + 6.$$

2) Вважаючи y та z сталими, знаходимо: $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2-z^3} \cdot 1 = e^{x+y^2-z^3}$;

вважаючи x та z сталими, знаходимо: $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x+y^2-z^3} \cdot 2y = 2ye^{x+y^2-z^3}$;

вважаючи x та y сталими, знаходимо: $\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x+y^2-z^3} \cdot (-3z^2) = -3z^2 \cdot e^{x+y^2-z^3}$.

$$3) \frac{\partial u}{\partial x} = \sin y + 6xyz\sqrt{v}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \cos y + 2y \cos z + 3x^2 z \sqrt{v};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -y^2 \sin z - 3z^2 \operatorname{tg} v + 3x^2 y \sqrt{v}; \quad \frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{z^3}{\cos^2 v} + \frac{3x^2 yz}{2\sqrt{v}}.$$

Функція $z = f(x, y)$ називається **диференційовною в точці** $M(x, y)$, якщо в цій точці її повний приріст можна представити у вигляді $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x, \Delta y) + \Delta y \cdot \beta(\Delta x, \Delta y)$, де A та B деякі незалежні від Δx і Δy числа, $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ і $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно малі при $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$ функції. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то $A = \frac{\partial z}{\partial x}$,

$$B = \frac{\partial z}{\partial y}; \text{ тобто: } \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y) + \beta(\Delta x, \Delta y).$$

Прирости аргументів називають також **диференціалами аргументів** і позначають: dx і dy ($dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$). **Повним диференціалом (диференціалом першого порядку)** dz диференційовної функції $z = f(x, y)$ називається головна частина повного приросту Δz , лінійна відносно $dx = \Delta x$ і

$$dy = \Delta y: dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Аналогічно визначається повний диференціал диференційовної функції будь-якого (скінченного) числа змінних. Так, якщо $u = f(x, y, z)$, то

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \text{ При достатньо малих приростах (диференціалах)}$$

аргументів диференційовної функції справедлива наближена рівність:

$$\Delta u \approx du.$$

Приклад 5. Знайти повний диференціал функції $u = x \sin x + y \cos z + z^2$.

Р О З В ' Я З А Н Н Я. Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin x + x \cos x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \cos z$;

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -y \sin z + 2z, \text{ то } du = (\sin x + x \cos x)dx + \cos z dy + (2z - y \sin z)dz.$$

Градiєнтом функції $u = f(M)$ в точці M називається вектор, координатами якого є частинні похідні функції в цій точці. Якщо

$u = f(M) = f(x, y, z)$, то $\text{grad } u(M) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M) \right)$. Градієнт вказує напрям найшвидшого зростання функції в даній точці.

Приклад 6. Знайти градієнт функції $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точці $M_0(1, -2, 2)$ і його величину (довжину).

Р О З В ' Я З А Н Н Я . Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$ та обчислимо їх значення в точці M_0 :
 $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 2$; $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = -4$; $\frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = 4$. Отже, $\text{grad } u(M_0) = (2, -4, 4)$, а $|\text{grad } u(M_0)| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$.

Похідною функції $u = f(M)$ в точці M_0 у напрямі вектора $\vec{l}$ (*похідною за напрямом*) називається границя $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M} = \frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$, обчислена в припущенні, що точка M необмежено наближається до точки M_0 по прямій, що проходить через точку M_0 з напрямним вектором $\vec{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n)$.

Якщо функція $u = f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ диференційовна в точці M_0 , то похідна за напрямом $\vec{l}$ обчислюється по формулі:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0) \cos \alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0) \cos \alpha_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0) \cos \alpha_n,$$

де $\cos \alpha_i = \frac{l_i}{l}$, $i = \overline{1, n}$ – напрямні косинуси вектора $\vec{l}$, а l – довжина вектора $\vec{l}$.

У випадку функції двох змінних $u = f(M) = f(x, y)$ формула має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cos \beta = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \sin \alpha$$

(α і β – кути, утворені вектором $\vec{l}$ з осями Ox і Oy відповідно).

Якщо $u = f(M) = f(x, y, z)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cos \gamma$$

(α , β , γ – кути, утворені вектором $\vec{l}$ з осями Ox , Oy і Oz).

Якщо $\vec{l}$ – одиничний вектор, а φ – кут між градієнтом функції $u = f(M)$ і вектором $\vec{l}$, то $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = (\text{grad } u(M_0), \vec{l}) = |\text{grad } u(M_0)| \cdot \cos \varphi$.

Похідна $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)$ за напрямом градієнта має найбільше значення:

$$\max_l \frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = |\operatorname{grad} u(M_0)|.$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $z = x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1$ у точці $M_0(1, -1)$:

- 1) за напрямом вектора $\vec{l}$, що утворює кут $\alpha = \frac{\pi}{6}$ з додатним напрямом осі Ox ;
- 2) за напрямом вектора $\vec{l} = (3, 4)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 4$ і обчислимо їх значення в точці M_0 : $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$, $\frac{\partial z}{\partial y}(M_0) = 2 \cdot (-1) - 4 = -6$.

1) Оскільки $\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \beta = \sin \alpha = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то

$$\frac{\partial z}{\partial l}(M_0) = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} - 3 \approx 0,4.$$

2) Оскільки довжина вектора $\vec{l}$ дорівнює $l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, то $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$ і $\frac{\partial z}{\partial l}(M_0) = 4 \cdot \frac{3}{5} - 6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12 - 24}{5} = -\frac{12}{5} = -2,4$.

Приклад 8. Знайти похідну функції $u = e^{xyz}$ у точці $M_0(0, 2, -1)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{M_0M}$, якщо $M(-2, 1, 1)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Знаходимо частинні похідні:

$\frac{\partial u}{\partial x} = yze^{xyz}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xze^{xyz}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz}$ і обчислюємо їх значення в точці M_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 2 \cdot (-1)e^0 = -2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 0 \cdot (-1)e^0 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = 0 \cdot 2e^0 = 0.$$

Знаходимо напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_0M}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = (-2, -1, 2) \Rightarrow M_0M = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow$$

$$\cos \alpha = -\frac{2}{3}, \quad \cos \beta = -\frac{1}{3}, \quad \cos \gamma = \frac{2}{3}$$

$$\text{Отже, } \frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = -2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Приклад 9. Знайти похідну функції $u = \frac{xy}{x+y}$ у точці $M_0(1, -2)$ за напрямом градієнта.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \frac{(-2)^2}{(1-2)^2} = 4, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = \frac{1^2}{(1-2)^2} = 1, \quad \text{то}$$

$$\text{grad } u(M_0) = (4, 1). \quad \text{Тому } \frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = |\text{grad } u(M_0)| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}.$$

Частинними похідними другого порядку функції багатьох змінних називаються частинні похідні від її частинних похідних першого порядку. Так, для функції $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y).$$

Аналогічно позначаються частинні похідні другого порядку для функції трьох і більшого числа змінних.

Мішаними похідними називаються похідні, відмінні одна від одної лише послідовністю диференціювання; наприклад, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Якщо мішані похідні неперервні, то вони рівні між собою. Так, наприклад, якщо $u = f(x, y, z)$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$, якщо ці похідні неперервні.

Приклад 10. Знайти частинні похідні другого порядку функцій:

1) $z = y \ln x$; 2) $u = x^2 y + y z^2 + z$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \ln x$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = -\frac{y}{x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{1}{x}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{1}{x}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0.$$

2) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + z^2$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2yz + 1$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2x$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 2z; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2y.$$

ЗАВДАННЯ

3.3. Знайти частинні похідні функцій:

- 1) $z = x^2 - 5xy + 6y - x + 1$; 2) $z = 3x^2 + \sqrt{xy} - \sqrt{xy} + 3x$;
- 3) $z = \frac{x+y}{x^2-2y}$; 4) $z = \frac{x^2-y^3}{x^2+y}$; 5) $z = e^{x^2y}$; 6) $z = \sin(x+y^2)$;
- 7) $z = (x + \sqrt{y})\cos(2x+3y)$; 8) $z = \sin(2x+y^2)\cos(x^2+3y)$;
- 9) $u = x + x^2y + y^2z + xyz^2$; 10) $u = 2x^2 - 3xy^2 + 5yz^3 - yz$;
- 11) $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$; 12) $u = \frac{x+y}{y+z}$; 13) $u = \ln(x+y^2+z^3)$; 14) $u = e^{xy+z^2}$.

3.4. Знайти повні диференціали функцій:

- 1) $u = \cos(x^2 + \sqrt{y})$; 2) $u = \operatorname{tg}(x+2y^2)$; 3) $u = \ln(x^2 + xy - e^x)$;
- 4) $u = e^{x^2+y^3}$; 5) $u = \frac{x^2}{y+z}$; 6) $u = \frac{x^2-y^3}{x^2+z^2}$.

3.5. Знайти градієнт функції $u = f(M)$ у точці M_0 :

- 1) $u = x^2y^3$, $M_0(2, -1)$; 2) $u = \ln(x^2 + y^2)$, $M_0(1, 3)$;
- 3) $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(1, 2, -2)$; 4) $u = xy^2 + yz^2$, $M_0(-1, 1, 2)$;
- 5) $u = e^{xyz}$, $M_0(0, 1, 2)$; 6) $u = \frac{x+y^2}{y+z^2}$, $M_0(1, 2, -1)$.

3.6. Знайти похідну функції $u = f(M)$ у точці M_0 за напрямом вектора $\vec{l}$:

- 1) $u = \ln(x^2 + y^2)$, $M_0(1, -2)$, $\vec{l} = (3, 4)$;
- 2) $u = \sqrt{x^2 - y^2 + 6}$, $M_0(2, -3)$, $\vec{l} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$;
- 3) $u = e^{x+2y-3z}$, $M_0(1, 1, 1)$, $\vec{l} = (1, -2, 2)$;
- 4) $u = \ln(x+3y+2z)$, $M_0(2, -2, 4)$, $\vec{l} = (2, 4, -4)$;
- 5) $u = xy^3 - 2x^2z + yz$; $M_0(2, 0, -1)$, $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M}$, $M(0, 2, -2)$;

6) $u = xe^x + ye^z$; $M_0(0, 1, 0)$, $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M}$, $M(3, -3, 0)$.

3.7. Знайти похідну функції $u = f(M)$ у точці M_0 за напрямом градієнта:

1) $u = x^2 + 2y^2 - 3x + y - 2$, $M_0(0, 1)$;

2) $u = xy - x^2 + y^2 + 7y$, $M_0(3, -2)$;

3) $u = xy + y^2z - x^2z - y + 2z + 3$, $M_0(1, 1, 1)$;

4) $u = xyz + xy + yz + xz - y - 3z + 5$, $M_0(1, 2, -1)$.

3.8. Знайти частинні похідні другого порядку:

1) $z = x^2y$; 2) $z = xy + \cos(x + y)$; 3) $u = x^2 + 3xy + 2y^3 - x - 2y + 1$;

4) $u = xy^2 + x^2y + 2xy - x + 3y - 5$; 5) $u = \sin(x^2 + y) + \cos(x - y^2)$;

6) $u = (3x + y^2)\sin x + (x - 2y^2)\cos y$; 7) $u = e^{x+2y+3z}$;

8) $u = \ln(5x - 3y + 2z)$.

3.3. Екстремум функції багатьох змінних

Точка $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ називається точкою **локального максимуму (мінімуму)** функції $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо в деякому околі цієї точки значення функції $f(M_0)$ більше (менше), ніж її значення в будь-якій іншій точці цього околу.

Точки локальних максимумів і мінімумів називаються **точками локального екстремуму функції**, а значення функції в цих точках — **екстремальними значеннями**.

Необхідна умова екстремуму. Якщо M_0 є точкою локального екстремуму диференційовної функції $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то в цій точці всі її частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю, тобто: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0$,

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = 0$, ..., $\frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0$. Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, називаються **стаціонарними точками** або точками, **підозрілими на екстремум**. Не будь-яка стаціонарна точка є точкою екстремуму.

Приклад 11. Знайти стаціонарні точки функцій:

1) $z = x^2 + y^3 + 4x - 3y + 12$; 2) $u = x^2 - 2y^2 + xz + 6x - 12y + 7$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1) Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3$, то стаціонарні точки знаходяться з

умови: $\begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$. Отже, стаціонарними точками функції

$z = x^2 + y^3 + 4x - 3y + 12$ будуть точки $M_1(-2, 1)$ та $M_2(-2, -1)$.

2) Оскільки $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + z + 6$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -4y - 12$, $\frac{\partial u}{\partial z} = x$, то стаціонарні точки

знаходяться з умови $\begin{cases} 2x + z + 6 = 0 \\ -4y - 12 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = -6 \end{cases}$. Отже, у функції

$u = x^2 - 2y^2 + xz + 6x - 12y + 7$ одна стаціонарна точка $M_0(0, -3, -6)$.

Достатні умови екстремуму функції двох змінних.

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ – стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$. Значення частинних похідних другого порядку цієї функції в точці M_0 позначають

буквами A, B, C : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) = A$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = B$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = C$

а вираз $AC - B^2$ позначають через Δ і називають **дискримінантом**:
 $\Delta = AC - B^2$.

Якщо в точці M_0 дискримінант додатний ($\Delta > 0$), то M_0 – точка екстремуму функції $f(x, y)$, причому: 1) якщо $A > 0$, то M_0 – точка локального мінімуму; 2) якщо $A < 0$, то M_0 – точка локального максимуму.

Якщо в точці M_0 дискримінант від'ємний ($\Delta < 0$), то в цій точці екстремуму немає.

Якщо $\Delta = 0$, то необхідні подальші дослідження (сумнівний випадок).

Приклад 12. Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 - y^3 - 3x + 12y - 23$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Знаходимо частинні похідні: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 + 12$ і прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ -3y^2 + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}.$$

Значить, у функції чотири стаціонарні точки: $M_1(1, 2)$, $M_2(1, -2)$, $M_3(-1, 2)$ та $M_4(-1, -2)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y$

і досліджуємо кожну зі стаціонарних точок:

$$1. \quad M_1(1, 2): \quad A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_1) = 6 \cdot 1 = 6, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_1) = 0,$$

$$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_1) = -6 \cdot 2 = -12; \quad \Delta(M_1) = 6 \cdot (-12) - 0^2 = -72 < 0.$$

Отже, у точці M_1 у функції екстремуму немає.

$$2. \quad M_2(1, -2): \quad A = 6 \cdot 1 = 6; \quad B = 0; \quad C = -6 \cdot (-2) = 12; \quad ;$$

$\Delta(M_2) = 6 \cdot 12 - 0^2 = 72 > 0$. Отже, в точці M_2 екстремум є. Оскільки $A = 6 > 0$, то M_2 – точка локального мінімуму: $z(M_2) = 1^3 - (-2)^3 - 3 \cdot 1 + 12 \cdot (-2) - 23 = -41$.

$$3. \quad M_3(-1, 2): \quad A = 6 \cdot (-1) = -6; \quad B = 0; \quad C = -6 \cdot 2 = -12;$$

$\Delta(M_3) = (-6) \cdot (-12) - 0^2 = 72 > 0$. Отже, в точці M_3 екстремум також є. Оскільки $A = -6 < 0$, то M_3 є точкою локального максимуму: $z(M_3) = (-1)^3 - 2^3 - 3 \cdot (-1) + 12 \cdot 2 - 23 = -6$.

$$4. \quad M_4(-1, -2): \quad A = 6 \cdot (-1) = -6; \quad B = 0; \quad C = -6 \cdot (-2) = 12;$$

$\Delta(M_4) = -6 \cdot 12 - 0^2 = -72 < 0$. Отже, в точці M_4 екстремуму немає.

Умовним екстремумом функції $z = f(M) = f(x, y)$ називається екстремум цієї функції за умови, що її аргументи x та y не є незалежними, а пов'язані деякою умовою $\varphi(x, y) = 0$, яка називається **рівнянням зв'язку**.

Знаходження умовного екстремуму може бути зведено до дослідження на екстремум функції Лагранжа $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, де λ – невизначений постійний множник (множник Лагранжа).

Необхідні умови умовного екстремуму такі:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

З цієї системи рівнянь знаходяться значення x та y (які є координатами точок можливого умовного екстремуму) та λ (яке відіграє допоміжну роль).

Приклад 13. Дослідити на екстремум функції:

1) $z = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 1$, за умови, що $x + 2y = 28$;

2) $z = xy$, за умови, що $3x + 2y = 24$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1) Запишемо функцію Лагранжа:

$L(x, y, \lambda) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 1 + \lambda(x + 2y - 28)$ і знайдемо точку можливого умовного екстремуму:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 6x + 2y + 2 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2x + 2y - 4 + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y + 2 + \lambda = 0 \\ x + y - 2 + \lambda = 0 \\ x + 2y - 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y + 4 = 0 \\ x + y - 2 + \lambda = 0 \\ x + 2y - 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 16 \\ \lambda = -10 \end{cases}$$

Отже, $M_0(-4, 16)$ – точка можливого умовного екстремуму. . Перевіримо, чи є ця точка точкою екстремуму функції Лагранжа

$L(x, y, -10) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 1 - 10(x + 2y - 28)$. Оскільки $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 6 > 0$,

$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 2$, $\Delta = 6 \cdot 2 - 2^2 = 8 > 0$, то в точці $M_0(-4, 16)$ у функції Лагранжа

мінімум. Отже, точка $M_0(-4, 16)$ є точкою умовного мінімуму функції $z = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 1$ за умови, що $x + 2y = 28$.

2) Запишемо функцію Лагранжа $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(3x + 2y - 24)$ та знайдемо точку можливого умовного екстремуму:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y + 3\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x + 2y - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3\lambda \\ x = -2\lambda \\ 3(-2\lambda) + 2(-3\lambda) = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 4 \\ \lambda = -2 \end{cases}.$$

Отже, $M_0(4, 6)$ – точка можливого умовного екстремуму. У функції Лагранжа $L(x, y, -2) = xy - 2(3x + 2y - 24)$ в точці $M_0(4, 6)$ екстремуму немає:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1, \quad \Delta = 0 \cdot 0 - 1 = -1 < 0. \text{ Проте, це ще не означає, що}$$

в точці M_0 у функції $z = xy$, за умови, що $3x + 2y = 24$, немає умовного екстремуму. Продовжимо дослідження. Візьмемо точку $M(4 + \Delta x, 6 + \Delta y)$ – сусідню до точки $M_0(4, 6)$. Оскільки координати цієї точки повинні задовольняти умові $3x + 2y = 24$, то $3(4 + \Delta x) + 2(6 + \Delta y) = 24 \Rightarrow$.

$$3\Delta x + 2\Delta y = 0 \Rightarrow \Delta y = -\frac{3}{2}\Delta x \quad (\Delta x - \text{будь-яке}). \text{ Отже, сусідньою точкою, що}$$

задовольняє рівнянню зв'язку $3x + 2y = 24$, буде точка $M(4 + \Delta x, 6 - \frac{3}{2}\Delta x)$.

Обчислимо значення функції $z = xy$ в цій точці:

$$z(M) = z(4 + \Delta x, 6 - \frac{3}{2}\Delta x) = (4 + \Delta x)(6 - \frac{3}{2}\Delta x) = 24 + 6\Delta x - 6\Delta x - \frac{3}{2}(\Delta x)^2 = 24 - \frac{3}{2}(\Delta x)^2$$

$$\text{і в точці } M_0(4, 6): z(M_0) = z(4, 6) = 4 \cdot 6 = 24.$$

$$\text{Оскільки } \Delta z = z(M) - z(M_0) = z(4 + \Delta x, 6 - \frac{3}{2}\Delta x) - z(4, 6) =$$

$$= 24 - \frac{3}{2}(\Delta x)^2 - 24 = -\frac{3}{2}(\Delta x)^2 < 0 \text{ при будь-яких } \Delta x \neq 0, \text{ то це означає, що в}$$

точці $M_0(4, 6)$ функція $z = xy$ за умови $3x + 2y = 24$ досягає найбільшого значення. Отже, $M_0(4, 6)$ – точка умовного максимуму.

Щоб знайти найбільше чи найменше значення функції (**глобальний екстремум**) у замкнутій області, потрібно:

1) знайти стаціонарні точки функції всередині заданої області (точки, підозрілі на локальний екстремум) та обчислити значення функції у цих точках;

2) знайти точки можливого умовного екстремуму (на межі області) та обчислити значення функції у цих точках;

3) із цих значень функції вибрати найбільше (глобальний максимум) або найменше (глобальний мінімум).

Приклад 14. Знайти найменше та найбільше значення функції $z = x^2 + y^2$ у крузі $x^2 + (y - 1)^2 \leq 16$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Знайдемо стаціонарні точки функції:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(0, 0) - \text{стаціонарна точка. Очевидно, що ця}$$

точка належить заданому кругу і в цій точці функція досягає найменшого значення $\min_{x^2 + (y-1)^2 \leq 16} Z = 0$ (у всіх інших точках $Z > 0$).

Знайдемо точки можливого умовного екстремуму функції (за умови, що x та y пов'язані співвідношенням $x^2 + (y - 1)^2 = 16$). Складемо функцію Лагранжа $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda[x^2 + (y - 1)^2 - 16]$ і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda(y - 1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + (y - 1)^2 - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \lambda x = 0 \\ y + \lambda(y - 1) = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 + \lambda) = 0 \\ y(1 + \lambda) - \lambda = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 - 16 = 0 \end{cases}.$$

Ця система має два розв'язки: $x_1 = 0, y_1 = 5, \lambda_1 = -\frac{5}{4}$ і

$x_2 = 0, y_2 = -3, \lambda_2 = -\frac{3}{4}$. Отже, точками можливого умовного екстремуму будуть точки $M_1(0, 5)$ і $M_2(0, -3)$. Обчислюємо значення функції в цих точках: $z(M_1) = 25$; $z(M_2) = 9$. Значить, найбільше значення функції в заданому крузі $\max_{x^2 + (y-1)^2 \leq 16} Z = z(M_1) = 25$.

Приклад 15. Фірма виробляє два види продукції. При виробництві x од. продукції першого виду і y од. продукції другого виду фірма одержує прибуток $z = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - 5y^2 - 100$ грош. од. Яким повинен бути оптимальний план випуску продукції (план, при виконанні якого фірма одержуватиме максимум прибутку), якщо:

- 1) фірма в змозі виробити необхідну кількість продукції;
- 2) фірмі встановлена квота: сумарний обсяг випуску продукції повинен складати 66 од., тобто $x + y = 66$;
- 3) виробничі потужності фірми дозволяють випускати продукцію сумарним обсягом: а) не більше 82 од. ($x + y \leq 82$), б) не більше 34 од. ($x + y \leq 34$).

РОЗВ'ЯЗАННЯ. 1) В даному випадку йдеться про знаходження екстремуму функції $z = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - 5y^2 - 100$.

Знаходимо стаціонарні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 20 + 5y - 4x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 50 + 5x - 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 5y = 20 \\ -x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases} \Rightarrow M_0(30, 20). \text{ Перевіряємо}$$

наявність екстремуму в точці M_0 : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -10$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 5$,

$\Delta = (-4) \cdot (-10) - 5^2 = 40 - 25 = 15 > 0$. Екстремум є, причому, оскільки $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$, то в точці M_0 у функції максимум.

Отже, фірма одержуватиме максимум прибутку, якщо вироблятиме 30 од. продукції першого виду і 20 од. – другого:

$$\max z = 20 \cdot 30 + 50 \cdot 20 + 5 \cdot 30 \cdot 20 - 2 \cdot (30)^2 - 5 \cdot (20)^2 - 100 = 600 + 1000 + 3000 - 1800 - 2000 - 100 = 4600 - 3900 = 700 \text{ грош. од.}$$

2) В цьому випадку потрібно розв'язувати задачу на умовний екстремум:

$$\begin{cases} z = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - 5y^2 - 100 \\ x + y - 66 = 0 \end{cases}$$

Складаємо функцію Лагранжа:

$L(x, y, \lambda) = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - 5y^2 - 100 + \lambda(x + y - 66)$ і знаходимо точки можливого умовного екстремуму:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 20 + 5y - 4x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 50 + 5x - 10y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 66 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 5y + \lambda + 20 = 0 \\ 5x - 10y + \lambda + 50 = 0 \\ x + y - 66 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 26 \\ \lambda = 10 \end{cases}$$

Значить, точкою, підозрілою на умовний екстремум, буде точка $M_0(40, 26)$. Легко переконатися, що (при $\lambda = 10$) в точці M_0 у функції Лагранжа

$L(x, y, 10)$ максимум: $\frac{\partial^2 L(x, y, 10)}{\partial x^2} = -4 < 0$, $\frac{\partial^2 L(x, y, 10)}{\partial y^2} = -10$, $\frac{\partial^2 L(x, y, 10)}{\partial x \partial y} = 5$:

$$\Delta = (-4) \cdot (-10) - 5^2 > 0.$$

Отже, при квоті $x + y = 66$ оптимальним планом випуску продукції фірмою буде: 40 одиниць продукції першого виду і 26 од. другого. При цьому

прибуток складатиме $z(40, 26) = 20 \cdot 40 + 50 \cdot 26 + 5 \cdot 40 \cdot 26 - 2 \cdot 40^2 - 5 \cdot 26^2 - 100 = 620$ грошових одиниць.

3) у випадку а) відповідь очевидна: оскільки фірма в змозі випускати продукцію в сумарному обсязі більше 50 од. ($82 > 50$), то оптимальним буде план: $x = 30$, $y = 20$, $z(30, 20) = 700$ (див. питання 1 даної задачі).

У випадку б) задача зводиться до знаходження глобального максимуму функції $z = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - 5y^2 - 100$ в обмеженій замкненій області: $x + y \leq 34$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ (трикутник, обмежений прямими $x + y = 34$, $x = 0$, $y = 0$). Точка локального екстремуму $M_0(30, 20)$ функції z (див. питання 1) даній області не належить. Значить, найбільше значення функції z досягається на межі області. Знаходимо точки можливих умовних екстремумів:

$$\begin{cases} z = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - 5y^2 - 100 \\ x + y - 34 = 0 \end{cases}$$

Складаємо функцію Лагранжа:

$L(x, y, \lambda) = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - 5y^2 - 100 + \lambda(x + y - 34)$ і знаходимо точки можливого умовного екстремуму:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 20 + 5y - 4x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 50 + 5x - 10y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 34 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 5y + \lambda + 20 = 0 \\ 5x - 10y + \lambda + 50 = 0 \\ x + y - 34 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 14 \\ \lambda = -10 \end{cases}$$

Значить, на прямій $x + y = 34$ точкою можливого умовного екстремуму буде точка $M_1(20, 14)$.

На прямій $x = 0$ функція z приймає вид: $z = 50y - 5y^2 - 100$ і точка можливого умовного екстремуму легко знаходиться з умови $z'_y = 50 - 10y = 0 \Rightarrow y = 5$. Значить, на прямій $x = 0$ можливий умовний екстремум функції z у точці $M_2(0, 5)$.

На прямій $y = 0$ функція z приймає вигляд: $z = 20x - 2x^2 - 100$ і точкою можливого умовного екстремуму ($z'_x = 20 - 4x = 0 \Rightarrow x = 5$) буде точка $M_3(5, 0)$.

Точками можливого глобального екстремуму будуть також вершини трикутника $M_4(0, 0)$, $M_5(34, 0)$, $M_6(0, 34)$.

Обчислимо значення функції в кожній з цих точок:

$$z(M_1) = 20 \cdot 20 + 50 \cdot 14 + 5 \cdot 20 \cdot 14 - 2 \cdot 20^2 - 5 \cdot 14^2 - 100 = 620$$

$$z(M_2) = 20 \cdot 0 + 50 \cdot 5 + 5 \cdot 0 \cdot 5 - 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 5^2 - 100 = 25$$

$$z(M_3) = 20 \cdot 5 + 50 \cdot 0 + 5 \cdot 5 \cdot 0 - 2 \cdot 5^2 - 5 \cdot 0^2 - 100 = -50$$

$$z(M_4) = -100$$

$$z(M_5) = 20 \cdot 34 + 50 \cdot 0 + 5 \cdot 34 \cdot 0 - 2 \cdot 34^2 - 5 \cdot 0^2 - 100 = -1732$$

$$z(M_6) = 20 \cdot 0 + 50 \cdot 34 + 5 \cdot 0 \cdot 34 - 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 34^2 - 100 = -4180$$

Найбільше значення ($z = 620$) в даній області функція досягає в точці $M_1(20, 14)$. Значить, оптимальний план випуску продукції (при обмеженнях $x + y \leq 34$, $x \geq 0$, $y \geq 0$) буде наступним: 20 од. продукції першого виду і 14 од. другого. При цьому прибуток фірми складатиме 620 грош. од.

ЗАВДАННЯ

3.9. Знайти стаціонарні точки функцій:

- 1) $z = x^3 + y^3 - 12x - 27y + 12$; 2) $z = x^2 + y^2 - 18 \ln y - \frac{16}{x} + 3$;
- 3) $u = x^2 + y^3 + z^4 + 2x - 12y + 32z - 5$;
- 4) $u = 2x^2 + 3y^2 - 4z^3 + v^4 + 12x - 18y + 24z + 4v + 3$;
- 5) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 6$; 6) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z - 1$.

3.10. Дослідити на екстремум функції:

- 1) $z = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 2$; 2) $z = x^4 + y^4 - 32y + 4x + 3$;
- 3) $z = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6y - 1$; 4) $z = x^2 - 2xy^2 - y^4 + 8y - 2$;
- 5) $z = x^2 + y^2 - 8 \ln x - \frac{2}{y} + 4$; 6) $z = 3x^2 + 2y^3 - 6y^2 - 24 \ln x + 7$;
- 7) $z = x^2 - 2xy - 2y^4 + 6$; 8) $z = y^2 - 2x^2y - x^4 + 8y - 5$;
- 9) $z = x^2 - y^3 + 3xy - 5x + 8$; 10) $z = 3 + 4x - 32y + x^4 + y^4$;
- 11) $u = e^{\frac{y}{2}}(x^2 + y)$; 12) $z = 6xy + (47 - x - y)(4x + 3y)$.

3.11. Знайти умовні екстремуми функцій:

- 1) $\begin{cases} z = x^2 + xy + y^2 + x - 3y + 5; \\ x + y = 6 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 2y + 5; \\ x + 2y = 6 \end{cases}$;
- 3) $\begin{cases} z = xy - 4x - 2y + 30; \\ x + y = 12 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} z = xy + 2x - 6y - 3; \\ x - y = 2 \end{cases}$;
- 5) $\begin{cases} z = 2x(1 + y) + 3y^2 - 4y - 1; \\ 2x + y = 17 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} z = x(x + 3y - 2) + 3y; \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$;

$$7) \begin{cases} z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}.$$

3.12. Знайти найбільше та найменше значення функцій:

1) $z = xy$ у крузі $x^2 + y^2 \leq 4$.

2) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y + 1$ у крузі $x^2 + y^2 \leq 25$.

3.13. Підприємство виробляє продукцію двох видів та реалізує її за ціною $p_1 = 1728$ грош. од. і $p_2 = 2700$ грош. од за одиницю продукції. Витрати на виробництво x од. продукції першого і y од. продукції другого виду складають $x^3 + y^3 + 1000$ грош. од. Визначити оптимальний план випуску, якщо:

- 1) підприємство може виробити необхідну кількість продукції;
- 2) підприємству встановлено квоту: сумарний (загальний) обсяг випуску має становити 18 од. ($x + y = 18$);
- 3) підприємство може виробити не більше 36 од. продукції ($x + y \leq 36$).

3.4. Емпіричні формули

Емпіричними формулами (функціями) називають формули, що використовуються для аналітичного представлення емпіричних даних (результатів спостережень, вимірів), які представлені у вигляді таблиці:

x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_n

Підбір емпіричних формул за результатами спостережень не може ставити перед собою задачу розгадати дійсний характер залежності між змінними. Навіть в тому випадку, коли точно відомі значення аргументу і функції, відновити функцію по скінченному набору її значень – задача в загальному випадку нерозв'язна.

Вид емпіричної формули (функції) $y = f(x)$ визначається або з теоретичних міркувань, або на підставі характеру розташування на координатній площині точок, які відповідають дослідним даним.

Після визначення (вибору) виду емпіричної формули $y = f(x)$ необхідно так визначити її параметри (коефіцієнти), щоб ця формула в якомусь сенсі була найкращою.

При виборі параметрів (коефіцієнтів) емпіричної формули часто використовується **принцип найменших квадратів**, який полягає в тому, що із множини формул виду $y = f(x)$ найкращою вважається та, в якій сума квадратів

відхилень (похибок) $S = \sum_{i=1}^n (y(x_i) - y_i)^2$ значень $y(x_i) = f(x_i)$, обчислених по

формулі $y = f(x)$ від спостережуваних значень y_i , є найменшою (функцію S називають функцією похибок). Підбір параметрів формули $y = f(x)$, заснований на цьому принципі, називається **методом найменших квадратів**.

Побудова емпіричних формул методом найменших квадратів полягає в наступному: спочатку визначається вид емпіричної формули $y = f(x)$, потім методом найменших квадратів розраховуються її параметри (коефіцієнти), після чого формула $y = f(x)$ перевіряється на придатність її до використання.

Перевірка на придатність отриманої емпіричної формули $y = f(x)$ здійснюється в такий спосіб. Обчислюються значення $y(x_i) = f(x_i)$ та порівнюються зі спостережуваними значеннями y_i . Якщо різниці (похибки) $y(x_i) - y_i$ досить малі (прийнятні), то побудована формула $y = f(x)$ приймається для використання; якщо ж ні, формула не використовується, а будується емпірична формула іншого виду.

При побудові емпіричної формули виду $y = ax + b$, її параметри (коефіцієнти a та b) знаходяться із системи рівнянь (3.1):

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + nb = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (n - \text{число спостережень}) \quad (3.1)$$

При побудові емпіричної формули виду $y = ax^2 + bx + c$, її параметри (коефіцієнти a , b та c) знаходяться із системи рівнянь (3.2):

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} \quad (3.2)$$

Приклад 16. За даними спостережень, побудувати емпіричну формулу виду $y = ax + b$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	4,98	8,57	12,51	16,06	19,94	23,42

РОЗВ'ЯЗАННЯ. У даному випадку вид емпіричної формули заданий. Тому залишається тільки знайти її параметри (коефіцієнти a та b).

Для зручності складання системи (3.1) побудуємо таку таблицю :

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1	4,98	4,98	1
2	2	8,57	17,14	4
3	3	12,51	37,53	9
4	4	16,06	64,24	16
5	5	19,94	99,70	25
6 = n	6	23,42	140,52	36
Σ	21	85,48	364,11	91

У рядку Σ записані суми стовпців (коефіцієнти системи (3.1)).

Запишемо систему (3.1):
$$\begin{cases} 91a + 21b = 364,11 \\ 21a + 6b = 85,48 \end{cases}.$$

Розв'язання цієї системи дає такі значення коефіцієнтів (параметрів) емпіричної формули: $a \approx 3,71$; $b \approx 1,26$. Отже, шукана емпірична функція має вид $y = 3,71x + 1,26$.

Перевіряємо отриману формулу на придатність до використання. Результати перевірки також зручно записати у вигляді таблиці:

x_i	y_i	$y(x_i)$	$y(x_i) - y_i$
1	4,98	4,97	-0,01
2	8,57	8,68	0,11
3	12,51	12,39	-0,12
4	16,06	16,10	0,04
5	19,94	19,81	-0,13
6	23,42	23,52	0,10

З таблиці видно, що побудована емпірична формула придатна до використання (різниці $y(x_i) - y_i$ досить малі).

Приклад 17. За даними спостережень, побудувати емпіричну формулу виду $y = ax^2 + bx + c$.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4,18	4,81	4,84	4,69	3,77

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Аналогічно попередньому прикладу, для зручності складання системи (3.2), з якої знаходяться параметри (коефіцієнти a , b та c) емпіричної формули, що шукається, побудуємо наступну таблицю:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	1	4,18	1	1	1	4,18	4,18
2	2	4,81	4	8	16	9,62	19,24
3	3	4,84	9	27	81	14,52	43,56
4	4	4,69	16	64	256	18,76	75,04
5 = n	5	3,77	25	125	625	18,85	94,25
Σ	15	22,29	55	225	979	65,93	236,27

У рядку Σ , як і в попередньому прикладі, записані суми стовпців.

Запишемо систему (3.2):
$$\begin{cases} 979a + 225b + 55c = 236,27 \\ 225a + 55b + 15c = 65,93 \\ 55a + 15b + 5c = 22,29 \end{cases}.$$

Розв'язуємо отриману систему табличним варіантом методу повного виключення:

979	225	55	236,27	1495,27
225	55	15	65,93	360,93
55	15	(5)	22,29	97,29
374	60	0	-8,92	425,08
60	(10)	0	-0,94	69,06
11	3	1	4,46	19,46
(14)	0	0	-3,28	10,72
6	1	0	-0,09	6,91
-7	0	1	4,74	-1,26
1	0	0	-0,23	0,77
0	1	0	1,29	2,29
0	0	1	3,13	4,13

Розв'язок системи: $a \approx -0,23$, $b \approx 1,29$, $c \approx 3,13$, і, отже, емпірична формула $y = -0,23x^2 + 1,29x + 3,13$.

Перевіряємо отриману формулу на придатність до використання:

x_i	y_i	$y(x_i)$	$y(x_i) - y_i$
1	4,18	4,19	0,01
2	4,81	4,79	-0,02
3	4,84	4,93	0,09
4	4,69	4,61	-0,08
5	3,77	3,83	0,06

Видно, що формула є придатною для використання.

ЗАВДАННЯ

3.14. Побудувати емпіричну формулу виду $y = ax + b$ за даними спостережень:

1)

x	0	1	2	3	4	5
y	4,25	1,55	-1,25	-3,90	-6,75	-9,35

2)

x	1	2	3	4	5
y	16,40	15,05	13,85	12,50	11,35

3.15. Побудувати емпіричну формулу виду $y = ax^2 + bx + c$ за даними спостережень:

$$1) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline y & -2,4 & 2,3 & 8,5 & 16,0 & 25,1 \end{array}$$

$$2) \begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 22,75 & 34,20 & 44,95 & 57,40 \end{array}$$

3.16. Побудувати емпіричні формули за даними спостережень:

$$1) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline y & 6 & 12 & 20 & 30 & 42 \end{array}$$

$$2) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline y & 16,0 & 18,0 & 20,5 & 23,0 & 25,0 \end{array}$$

4. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

4.1. Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$, то вона має нескінченну множину первісних, причому будь-яка її первісна має вигляд $F(x) + C$, де C – деяка стала.

Сукупність всіх первісних функцій $f(x)$ називається **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx$. Тут $\int$ – знак інтеграла, $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, x – змінна інтегрування. Отже, якщо $F(x)$ – якась первісна функції $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$. Пошук невизначеного інтеграла називається **інтегруванням функції**.

Властивості невизначеного інтеграла (правила інтегрування):

- $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$.
- $d\left(\int f(x)dx \right) = f(x)dx$.
- $\int dF(x) = F(x) + C$.
- $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$.
- $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.
- Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$.

Таблиця основних інтегралів

- $\int dx = x + C$.
- $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (якщо $\alpha \neq -1$).

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$4. \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + C.$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$9. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$$

$$10. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}.$$

$$15. \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}.$$

$$16. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}.$$

$$17. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

Безпосереднім інтегруванням називається інтегрування, що полягає у прямому застосуванні властивостей невизначеного інтеграла та формул з таблиці основних інтегралів.

Приклад 1. Знайти інтеграли:

$$а) \int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx;$$

$$б) \int (2 \sin x + 3 \cos x + 4 \operatorname{tg} x) dx;$$

$$в) \int \left(3e^x + 5 \cdot 2^x + \frac{6}{4+x^2} - \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} \right) dx.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

$$\begin{aligned} а) \int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx &= \int x^2 dx - 3 \int x dx + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} = \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} x^2 + \ln|x| + \frac{1}{x} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \int (2 \sin x + 3 \cos x + 4 \operatorname{tg} x) dx &= 2 \int \sin x dx + 3 \int \cos x dx + 4 \int \operatorname{tg} x dx = \\ &= -2 \cos x + 3 \sin x - 4 \ln |\cos x| + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \int \left(3e^x + 5 \cdot 2^x + \frac{6}{4+x^2} - \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} \right) dx &= 3 \int e^x dx + 5 \int 2^x dx + \\ + 6 \int \frac{dx}{4+x^2} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} &= 3e^x + 5 \frac{2^x}{\ln 2} + 6 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 2 \ln \left(x + \sqrt{x^2+4} \right) + C = \\ = 3e^x + \frac{5 \cdot 2^x}{\ln 2} + 3 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - 2 \ln \left(x + \sqrt{x^2+4} \right) + C. \end{aligned}$$

Заміна змінної в невизначеному інтегралі здійснюється за допомогою **підстановок** двох типів:

1) $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – монотонна, неперервно диференційовна функція нової змінної t . Формула заміни змінної у цьому випадку має вигляд:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Після обчислення інтеграла, що стоїть у правій частині, необхідно виконати зворотню підстановку, тобто замінити $t = \varphi^{-1}(x)$, де $\varphi^{-1}(x)$ – функція, обернена до функції $x = \varphi(t)$;

2) $\psi(x) = t$, де t – нова змінна. Формула заміни змінної за такої підстановки:

$$\int f(\psi(x)) \psi'(x) dx = \int f(t) dt.$$

Після обчислення інтеграла, що стоїть у правій частині, необхідно замість змінної t підставити $\psi(x)$.

Приклад 2. Знайти інтеграли:

$$\text{а)} \int \sin^2 x \cos x dx; \quad \text{б)} \int x e^{x^2} dx; \quad \text{в)} \int \frac{\ln x}{x} dx;$$

$$\text{г)} \int \sqrt{1-x^2} dx; \quad \text{д)} \int \frac{3x^2+1}{x^3+x+1} dx.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

а) зробимо підстановку (заміну) $\sin x = t$. Тоді $\cos x dx = dt$ і інтеграл стає табличним:

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \left| \sin x = t; \cos x dx = dt \right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

б) у цьому випадку зручно зробити підстановку (заміну) $x^2 = t$. Диференціюючи цю рівність, отримуємо: $2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$. Отже:

$$\int xe^{x^2} dx = \left| x^2 = t; 2xdx = dt \right| = \int \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C;$$

в) у даному випадку зручно зробити заміну $\ln x = t$. Тоді, диференціюючи, отримаємо: $\frac{dx}{x} = dt$ і $\int \frac{\ln x}{x} dx = \left| \ln x = t, \frac{dx}{x} = dt \right| = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$;

г) зробимо підстановку $x = \sin t$. Тоді отримаємо: $dx = \cos t dt$ та $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t$. Отже:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= \left| x = \sin t, dx = \cos t dt, \sqrt{1-x^2} = \cos t \right| = \int \cos^2 t dt = \\ &= \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2t}{2} + C = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t + C. \end{aligned}$$

З огляду на те, що з умови $x = \sin t$ витікає $t = \arcsin x$, остаточно отримаємо: $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x) + C$;

д) у чисельнику дробу стоїть похідна знаменника: $(x^3 + x + 1)' = 3x^2 + 1$, тоді:

$$\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x + 1} dx = \left| x^3 + x + 1 = t, (3x^2 + 1)dx = dt \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^3 + x + 1| + C$$

Інтегруванням частинами називається знаходження інтеграла за формулою $\int u dv = uv - \int v du$, де $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ – неперервно диференційовні функції. За допомогою цієї формули знаходження інтеграла $\int u dv$ зводиться до пошуку іншого інтеграла $\int v du$. Такий прийом доцільно застосовувати у випадках, коли $\int v du$ простіше, ніж $\int u dv$. При цьому за u береться така функція, яка при диференціюванні спрощується, а за dv – та частина підінтегрального виразу, інтеграл від якої відомий чи може бути знайдений.

Приклад 3. Знайти інтеграли:

$$\text{а) } \int x \sin x dx; \quad \text{б) } \int (x^2 + 1)e^x dx; \quad \text{в) } \int (x^2 + 1) \ln x dx.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

а) нехай $u = x$, $dv = \sin x dx$, тоді $du = dx$, $v = -\cos x$. Використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C;$$

б) у цьому випадку доведеться двічі інтегрувати частинами:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 1)e^x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 1, \quad du = 2x dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = (x^2 + 1)e^x - 2 \int x e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = \\ &= (x^2 + 1)e^x - 2 \left[x e^x - \int e^x dx \right] = (x^2 + 1)e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = (x^2 + 1)e^x - 2x e^x + \\ &+ 2e^x + C = (x^2 - 2x + 3)e^x + C. \end{aligned}$$

$$\text{в) } \int (x^2 + 1) \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = (x^2 + 1) dx, \quad v = \frac{x^3}{3} + x \end{array} \right| = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x -$$

$$- \int \frac{\frac{x^3}{3} + x}{x} dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x - \frac{x^3}{9} - x + C.$$

ЗАВДАННЯ

4.1. Знайти інтеграли:

1) $\int (1 + x + x^2 - x^3) dx;$

2) $\int (3x^2 + 5x^3 - 2x^5 - x^6) dx;$

3) $\int (2 + x + x^{-1} - x^{-2}) dx;$

4) $\int (2x^{-1} + 3x^{-2} - 4x^{-5}) dx;$

5) $\int (2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[4]{x}) dx;$

6) $\int \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}} \right) dx;$

7) $\int \left(3 + x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}} - x^4 \right) dx;$

8) $\int \left(7 - x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{2}{5}} \right) dx;$

9) $\int \frac{x^2 - 3x + 4}{x^3} dx;$

10) $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2} dx;$

11) $\int (\sqrt{x} - 1)^3 dx;$

12) $\int \frac{(x + \sqrt{x})^2}{x^3} dx;$

13) $\int \frac{dx}{x^2 - 9};$

14) $\int \frac{dx}{x^2 + 9};$

$$\begin{array}{ll}
15) \int \frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}; & 16) \int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}; \\
17) \int \left(\frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \right) dx; & 18) \int \left(\frac{2}{x^2-25} + \frac{3}{\sqrt{25-x^2}} \right) dx; \\
19) \int \left(\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} + \frac{2}{\sqrt{4+25x^2}} \right) dx; & 20) \int \left(\frac{5}{\sqrt{9+4x^2}} + \frac{3}{\sqrt{25-4x^2}} \right) dx; \\
21) \int \operatorname{tg}^2 x dx; & 22) \int \operatorname{ctg}^2 x dx; \\
23) \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x} dx; & 24) \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx; \\
25) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx; & 26) \int \cos^2 \frac{x}{2} dx; \\
27) \int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx; & 28) \int \frac{3+2\cos^3 x}{\cos^2 x} dx; \\
29) \int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx; & 30) \int (2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{ctg}^2 x) dx; \\
31) \int \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx; & 32) \int \left(2e^{\frac{x}{2}} + 3e^{-\frac{x}{2}} \right)^2 dx.
\end{array}$$

4.2. Знайти інтеграли:

$$\begin{array}{llll}
1) \int \sin(3x+4)dx; & 2) \int \cos(2x-3)dx; & 3) \int \frac{dx}{\cos^2 3x}; & 4) \int \frac{dx}{\sin^2 5x}; \\
5) \int \operatorname{tg} 5x dx; & 6) \int \operatorname{ctg} 4x dx; & 7) \int e^{2x-3} dx; & 8) \int 2^{3x+1} dx; \\
9) \int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx; & 10) \int \frac{2x+1}{x^2+x+5} dx; & 11) \int \frac{x dx}{x^2+1}; & 12) \int \frac{x^2 dx}{x^3-1}; \\
13) \int \frac{dx}{1-2x}; & 14) \int \frac{dx}{3x+2}; & 15) \int x \sin x^2 dx & 16) \int x^2 \cos x^3 dx; \\
17) \int x^2 \operatorname{tg}(x^3+1) dx; & 18) \int x \operatorname{ctg}(x^2-1) dx; & 19) \int x^3 e^{-x^4} dx; \\
20) \int x e^{x^2+2} dx; & 21) \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx; & 22) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx; \\
23) \int \sin x \cdot e^{\cos x} dx; & 24) \int \cos 2x \cdot e^{-\sin 2x} dx; & 25) \int \sqrt{3x+1} dx;
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
26) \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}; & \quad 27) \int (2x+1)^{10} dx; & \quad 28) \int \frac{dx}{(3x+2)^4}; & \quad 29) \int \frac{e^x dx}{e^{2x}-9}; \\
30) \int (e^{2x} + 3e^x) dx; & \quad 31) \int (2\sin x + 3)^2 \cos x dx; & \quad 32) \int (\cos x - 2)^3 \sin x dx.
\end{aligned}$$

4.3. Знайти інтеграли:

$$\begin{aligned}
1) \int x \cos x dx; & \quad 2) \int (2x+1) \sin x dx; & \quad 3) \int (x+1)e^x dx; & \quad 4) \int x e^{-2x} dx; \\
5) \int \frac{x dx}{\cos^2 x}; & \quad 6) \int \frac{x dx}{\sin^2 x}; & \quad 7) \int x^2 \sin x dx; & \quad 8) \int (x^2 + x + 1) \cos x dx; \\
9) \int (x^3 + 2x^2 - x + 1) \ln x dx; & \quad 10) \int (x+3)^2 \ln 2x dx; \\
11) \int x \operatorname{arctg} x dx; & \quad 12) \int \operatorname{arctg} x dx.
\end{aligned}$$

4.2. Визначений інтеграл

Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$, який довільним чином розбитий на n часткових інтервалів точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — довжина часткового інтервалу $[x_{i-1}, x_i]$, а c_i — довільна точка цього інтервалу, то сума $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$ називається **інтегральною сумою** для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ (в межах від a до b) називається границя інтегральної суми за умови, що довжина найбільшого з часткових інтервалів ($\max_i \Delta x_i$) прямує до нуля, якщо ця границя існує і не залежить від способу розбиття відрізку $[a, b]$ на часткові інтервали та від вибору точок c_i .

Для визначеного інтеграла використовується позначення $\int_a^b f(x) dx$, яке читається: інтеграл від a до b від еф від ікс де ікс. Таким чином,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

Якщо існує $\int_a^b f(x)dx$, то про функцію $f(x)$ говорять, що вона **інтегровна на відрізку** $[a, b]$. Числа a і b називаються відповідно **нижньою** і **верхньою межами інтегрування**.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку (достатня умова існування визначеного інтеграла).

Якщо $f(x) > 0$ на $[a, b]$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрично є площею **криволінійної трапеції** – фігури, обмеженою лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (див. рис. 4.1).

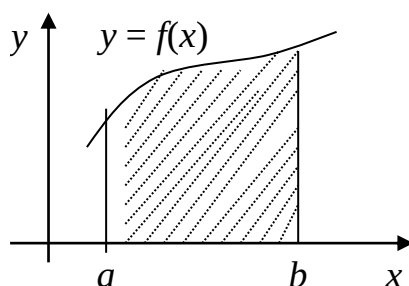


Рис. 4. 1.

Основні властивості визначеного інтегралу

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, де $c \in [a, b]$.
4. $\int_a^b \{f_1(x) \pm f_2(x)\}dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.
5. $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$, де c – стала.
6. $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, якщо $m \leq f(x) \leq M$ при $x \in [a, b]$.

Правила обчислення визначеного інтегралу

1. Формула Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – яка-небудь первісна функції $f(x)$.

2. Інтегрування частинами: $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$.

3. Заміна змінної:

$$\text{а) } \int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

де $x = \varphi(t)$ – функція, неперервна разом зі своєю похідною на відрізку $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

$$\text{б) } \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt, \text{ де } t = \varphi(x).$$

Приклад 4. Знайти інтеграли:

$$1) \int_1^2 \left(3x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{x} \right) dx; \quad 2) \int_0^3 x e^x dx; \quad 3) \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

1) згідно з формулою Ньютона – Лейбніца, отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(3x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{x} \right) dx &= \left(x^3 + x^2 + x + 5\ln|x| \right) \Big|_1^2 = 2^3 + 2^2 + 2 + 5\ln 2 - \\ &- (1^3 + 1^2 + 1 + 5\ln 1) = 8 + 4 + 2 + 5\ln 2 - 3 = 11 + 5\ln 2; \end{aligned}$$

2) скористаємося методом інтегрування частинами, поклавши $u = x$,

$$\begin{aligned} dv = e^x dx. \quad \text{Тоді: } \int_0^3 x e^x dx &= \left| \begin{matrix} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{matrix} \right| = x e^x \Big|_0^3 - \int_0^3 e^x dx = 3e^3 - \\ - e^x \Big|_0^3 &= 3e^3 - (e^3 - e^0) = 2e^3 + 1; \end{aligned}$$

3) нехай $\ln x = t$. Тоді $\frac{dx}{x} = dt$; якщо $x = 1$, то $t = 0$; якщо $x = e$, то $t = 1$.

$$\text{Отже, } \int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx = \left| \begin{matrix} \ln x = t, x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ \frac{dx}{x} = dt, x = e \Rightarrow t = 1 \end{matrix} \right| = \int_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

ЗАВДАННЯ

4.4. Знайти інтеграли:

- 1) $\int_0^1 (2x^2 + 3x - 2)dx$; 2) $\int_1^4 \left(x^2 + \sqrt{x} + \frac{2}{x}\right)dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x + 3 \cos x)dx$;
- 4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x - \cos x)dx$; 5) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4}$; 6) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 4}$; 7) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3}}$;
- 8) $\int_0^3 \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} dx$; 9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos x dx$; 10) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \cdot \sin x^2 dx$;
- 11) $\int_{-1}^0 \frac{x dx}{1+x^4}$; 12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot e^{\sin x} dx$; 13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$;
- 14) $\int_2^3 x^2 e^x dx$; 15) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$; 16) $\int_1^3 x \sqrt{x^2 - 1} dx$;
- 17) $\int_1^e (x^2 + x + 1) \ln x dx$; 18) $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x - 1}$.

4.3. Обчислення площ плоских фігур

Площа криволінійної трапеції, обмеженою кривою $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), прямими $x = a$ та $x = b$ та віссю Ox , обчислюється за формулою $S = \int_a^b f(x) dx$.

Якщо $f(x) \leq 0$, то $S = -\int_a^b f(x) dx$.

Площа фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \geq f_2(x)$) та прямими $x = a$ і $x = b$, знаходиться за формулою $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$.

Приклад 5. Знайти площі фігур, обмежених лініями:

- 1) параболою $y = 2x - x^2$ та віссю Ox ;
- 2) параболою $y = -x^2$ та прямою $x + y + 2 = 0$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

1) фігура, обмежена лініями $y = 2x - x^2$ та $y = 0$, зображена на рис. 4.2.

Тому:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ (кв. од.)};$$

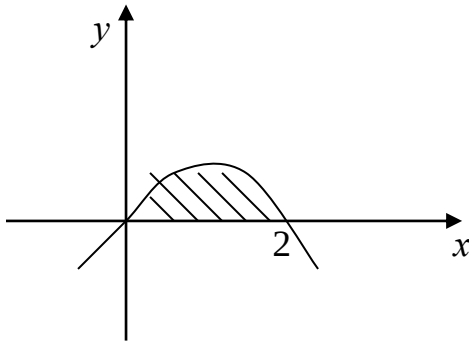


Рис. 4.2.

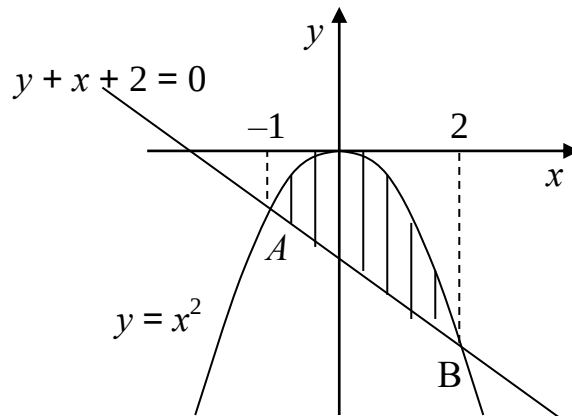


Рис. 4.3.

2) фігуру, обмежену зазначеними лініями, зображено на рис. 4.3.

Координати точок перетину ліній знаходимо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1, -1) \\ B(2, -4) \end{cases}.$$

Оскільки що в нашому випадку $f_1(x) = -x^2$ і $f_2(x) = -x - 2$, отримуємо:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 [-x^2 - (-x - 2)] dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-1}^2 = \\ &= \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = 4,5 \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ

4.5. Обчислити площі фігур, що обмежені лініями:

1) $y = x^2$, $y = 5x - 4$;

2) $xy = 1$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$;

3) $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$;

4) $y = x^3$, $y = x^2$;

5) $y = \ln x$, $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.

4.4. Невласні інтеграли

Невласними інтегралами називаються: 1) інтеграли з нескінченними межами; 2) інтеграли від необмежених функцій.

Невласний інтеграл від функції $f(x)$ у межах від a до $+\infty$ визначається рівністю
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо ця границя існує і скінченна, то невластний інтеграл називається збіжним; якщо ж границя не існує або дорівнює нескінченності – розбіжним.

$$\text{Аналогічно } \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

Якщо функція $f(x)$ не обмежена на інтервалі $(a, b]$ або $[a, b)$, але обмежена та інтегровна на будь-якому інтервалі $[a + \alpha, b]$ або $[a, b - \alpha]$ відповідно, то за

означенням вважають
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{a+\alpha}^b f(x)dx \quad \text{чи,} \quad \text{відповідно,}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_a^{b-\alpha} f(x)dx.$$
 Якщо ці границі існують, то невластні інтеграли

називаються **збіжними**, інакше – **розбіжними**. Якщо функція $f(x)$ не обмежена на $[a, c)$ та $(c, b]$, де $a < c < b$, але обмежена та інтегровна на будь-яких інтервалах $[a, c - \alpha]$ та $[c + \beta, b]$, то у цьому випадку вважають

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta \rightarrow +0} \int_{c+\beta}^b f(x)dx.$$

Невластний інтеграл
$$\int_a^b f(x)dx, \quad \text{при } f(c) = \infty, \quad c \in (a, b)$$
 називається

збіжним, якщо існують обидві границі у правій частині рівності, і **розбіжним**, якщо не існує хоча б одна з них.

Приклад 6. Обчислити невластні інтеграли чи встановити їх розбіжність:

$$1) \int_0^{+\infty} \sin x dx; \quad 2) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx; \quad 3) \int_0^1 \frac{dx}{x}; \quad 4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) згідно з означенням маємо:

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\cos x|_0^b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\cos b + \cos 0) =$$

$$= 1 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b.$$

Оскільки $\lim_{b \rightarrow +\infty} \cos b$ не існує, то цей невластний інтеграл розбігається;

$$2) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b} + e^0) =$$

$$= 1 - \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-b} = 1.$$

Отже, $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$, тобто невластний інтеграл збігається;

3) підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x}$ у точці $x = 0$ не обмежена ($x = 0$ є точкою розриву другого роду).

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(\ln|x| \Big|_{\alpha}^1 \right) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} (\ln 1 - \ln \alpha) = - \lim_{\alpha \rightarrow +0} \ln \alpha = \infty,$$

тобто невластний інтеграл розбігається;

4) аналогічно попередньому:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \left(2\sqrt{x} \Big|_{\alpha}^1 \right) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} (2 - 2\sqrt{\alpha}) = 2.$$

Отже, невластний інтеграл збігається.

ЗАВДАННЯ

4.6. Обчислити невластні інтеграли або встановити їх розбіжність:

$$\begin{array}{llll} 1) \int_0^{+\infty} \cos x dx; & 2) \int_{-\infty}^{\pi} \sin 2x dx; & 3) \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx; & 4) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}; \\ 5) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}; & 6) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}. & & \end{array}$$

5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальним називається рівняння, що пов'язує незалежні змінні, їх функцію та похідні (або диференціали) цієї функції. Якщо незалежна змінна одна, то рівняння називається **звичайним**, якщо незалежних змінних декілька, то рівняння називається диференціальним рівнянням **у частинних похідних**.

Найвищий порядок похідної (чи диференціала), що входить у рівняння, називається **порядком** диференціального рівняння.

Розв'язком диференціального рівняння називається така диференційовна функція, яка при підстановці в рівняння обертає його в тотожність.

Звичайні диференціальні рівняння першого порядку мають вигляд $F(x, y, y') = 0$ або $y' = f(x, y)$. **Загальним розв'язком** цього рівняння називається така функція $y = \varphi(x, C)$, яка є розв'язком даного рівняння при будь-яких значеннях довільної сталої C . Будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$, який можна отримати із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при конкретному значенні $C = C_0$, називається **частинним розв'язком**. Задача, в якій треба знайти частинний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, називається **задачею Коші**.

Найпростіші звичайні диференціальні рівняння першого порядку мають вигляд $f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$ або $y' = f(x)\varphi(y)$ і називаються **диференціальними рівняннями з відокремлюваними або подільними змінними**. Таке рівняння зводиться до виду $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0$ (це називається поділом змінних), після чого, інтегруючи, отримують співвідношення $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C$, яке визначає (в неявній формі) розв'язок вихідного рівняння. Розв'язок диференціального рівняння, виражений в неявній формі, називають **інтегралом** цього рівняння.

Якщо рівняння задано як $y' = f(x)\varphi(y)$, то спочатку замінюють похідну на відношення диференціалів $y' = \frac{dy}{dx}$, потім поділяють змінні :

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \varphi(y) \Rightarrow \frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx \text{ і почленно інтегрують: } \int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Рівняння виду $y' + P(x)y = Q(x)$ називається **лінійним диференціальним рівнянням першого порядку** (y та y' входять у перших степенях, не перемножуючись між собою). Розв'язок такого рівняння може бути знайдено у такий спосіб. За допомогою підстановки $y = uv$, де u та v – дві невідомі диференційовані функції, вихідне рівняння перетворюють до виду:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \text{ або } u'v + u[v' + P(x)v] = Q(x).$$

Користуючись тим, що одна з невідомих функцій (наприклад v) може бути обрана абсолютно довільно, за v приймають будь-який частинний розв'язок рівняння $v' + P(x)v = 0$. Тоді попереднє рівняння набуває вигляду $u'v = Q(x)$. Кожне з останніх двох рівнянь є рівнянням з відокремлюваними

змінними. Розв'язавши ці рівняння, загальний розв'язок вихідного рівняння знаходять множенням u на v : $y = v(u + c)$.

Диференціальні рівняння другого порядку мають вигляд $F(x, y, y', y'') = 0$. У рівнянні обов'язково має бути друга похідна y'' , тоді як x , y та y' можуть бути відсутніми. Загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = y(x, C_1, C_2)$, а загальний інтеграл – $Q(x, y, C_1, C_2) = 0$ (C_1 та C_2 – довільні сталі). Для визначення частинного розв'язку (задача Коші) задаються початкові умови як $y(x_0) = y_0$. $y'(x_0) = y'_0$.

При цьому значення постійних C_1 та C_2 знаходяться із системи рівнянь:

$$\begin{cases} y(x_0, C_1, C_2) = y_0 \\ y'(x_0, C_1, C_2) = y'_0 \end{cases}$$

Рівняння виду $y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = f(x)$, де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ і $f(x)$ задані функції або постійні, називається лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння називається **неоднорідним**, якщо $f(x) = 0$ – **однорідним**.

Лінійним однорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння виду $y'' + py' + qy = 0$, де коефіцієнти p і q – будь-які дійсні числа. Загальний розв'язок такого рівняння будується залежно від характеру коренів k_1 і k_2 **характеристичного рівняння** $k^2 + pk + q = 0$:

- 1) якщо k_1 та k_2 дійсні і різні ($k_1 \neq k_2$), то $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;
- 2) якщо k_1 та k_2 дійсні і рівні ($k_1 = k_2$), то $y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}$;
- 3) якщо k_1 та k_2 комплексні, тобто: $k_1 = a + bi$, $k_2 = a - bi$ ($i = \sqrt{-1}$), то $y = (C_1 \sin bx + C_2 \cos bx) e^{ax}$, де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Це рівняння із відокремлюваними змінними. Замінюємо $y' = \frac{dy}{dx}$ та поділяємо змінні, в результаті отримуємо рівняння $\operatorname{ctg} y dy = \operatorname{tg} x dx$. Інтегруючи, будемо мати $\int \operatorname{ctg} y dy = \int \operatorname{tg} x dx$, або $\ln |\sin y| = -\ln |\cos x| + \ln C$ (тут для зручності довільна стала записана у вигляді $\ln C$). Звідси знаходимо $\sin y = \frac{C}{\cos x}$ або $\sin y \cos x = C$ (загальний інтеграл).

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $(1 + x^2) dy + y dx = 0$, що задовольняє початковій умові $y(0) = 1$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Перетворимо рівняння (поділимо змінні):
 $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$. Інтегруючи, отримаємо $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2}$ чи $\ln|y| = -\arctg x + C$.
 Для знаходження постійної C використовуємо початкову умову $y(0) = 1$:
 $\ln 1 = -\arctg 0 + C$, тобто $C = 0$. Отже, $\ln|y| = -\arctg x$, звідки отримуємо
 шуканий частинний розв'язок $y = e^{-\arctg x}$.

Приклад 3. Розв'язати диференціальне рівняння $y' - \frac{2y}{x} = x$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Це лінійне рівняння. Представивши $y = uv$,
 одержуємо: $u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = x$ або $u'v + u\left[v' - \frac{2v}{x}\right] = x$. Вибираємо v так,
 щоб $v' - \frac{2v}{x} = 0$. Звідси $\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}$ або $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$. Інтегруючи, одержуємо:
 $\ln|v| = 2\ln|x|$ (довільну постійну візьмемо рівною нулю, оскільки достатньо
 знайти будь-який частинний розв'язок), звідки $v = x^2$. Для визначення u
 отримуємо рівняння: $u'x^2 = x$ або $u' = \frac{1}{x}$, звідки знаходимо $u = \ln|x| + C$.
 Перемножуючи знайдені u і v , одержуємо загальний розв'язок
 $y = (\ln|x| + C)x^2$. Довільну постійну зручно представити у вигляді $\ln C$. Тоді
 загальний розв'язок можна записати у вигляді $y = x^2 \ln(Cx)$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння:

$$1) y'' + 2y' - 3y = 0; \quad 2) y'' + 4y' + 4y = 0; \quad 3) y'' - 2y' + 10y = 0.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1) Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі
 сталими коефіцієнтами. Коренями його характеристичного рівняння
 $k^2 + 2k - 3 = 0$ будуть: $k_1 = 1$, $k_2 = -3$. Оскільки $k_1 \neq k_2$, то загальний
 розв'язок $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$.

2) В даному випадку корені характеристичного рівняння $k^2 + 4k + 4 = 0$
 рівні: $k_1 = k_2 = -2$. Отже, загальний розв'язок $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$.

3) Корені характеристичного рівняння $k^2 - 2k + 10 = 0$ комплексні:
 $k_{1,2} = 1 \pm 3i$. Тому загальний розв'язок $y = (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)e^x$.

Приклад 5. Знайти розв'язок рівняння $y'' - y' - 2y = 0$, що задовольняє
 початковим умовам $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ Характеристичне рівняння $k^2 - k - 2 = 0$ має корені
 $k_1 = 2$ і $k_2 = -1$. Отже, загальний розв'язок $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. Підставляючи

початкові умови в загальний розв'язок і його похідну ($y' = 2C_1e^{2x} - C_2e^{-x}$), одержимо систему рівнянь відносно C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - C_2 = 3 \end{cases}, \text{ звідки } \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases}.$$

Отже, розв'язком, який задовольняє вказаним початковим умовам, буде $y = e^{2x} - e^{-x}$.

ЗАВДАННЯ

5.1. Розв'язати рівняння:

- 1) $xy' - y = 0$; 2) $xy' + y = 0$; 3) $yy' + x = 0$;
4) $x^2y' + y = 0$; 5) $y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x$; 6) $y' = e^{x+y}$.

5.2. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь, що задовольняють початковим умовам:

- 1) $2y'\sqrt{x} = y$, $y(4) = 1$; 2) $x^2y' + y^2 = 0$, $y(-1) = 1$;
3) $dy + y \operatorname{tg} x dx = 0$, $y(\pi) = 2$; 4) $y' = 2^{x-y}$, $y(-3) = -5$.

5.3. Розв'язати рівняння:

- 1) $y' + y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$; 2) $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$;
3) $y' - \frac{3y}{x} = x$; 4) $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$;
5) $xy' - y = x^2 \cos x$; 6) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

5.4. Розв'язати рівняння:

- 1) $y'' - 4y' + 3y = 0$; 2) $y'' + 5y' - 6y = 0$;
3) $y'' + 6y' + 9y = 0$; 4) $y'' + 2y' + y = 0$;
5) $y'' + 4y' + 13y = 0$; 6) $y'' - 4y' + 5y = 0$.

5.5. Знайти розв'язки рівнянь, що задовольняють початковим умовам:

- 1) $y'' - 2y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
2) $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
3) $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
4) $y'' + 9y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;
5) $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$.

6. РЯДИ

6.1. Числові ряди

Нехай $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – нескінченна числова послідовність. Вираз $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \equiv u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ називається **числовим рядом**, числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – **членами ряду**, u_n – **загальним членом ряду**. Суму перших n членів ряду позначають S_n і називають n -ю **частковою сумою ряду**: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Ряд називається **збіжним**, якщо його n -а часткова сума S_n при необмеженому зростанні n наближається до скінченної границі, тобто якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Число S називають **сумою ряду**. Якщо ж n -а часткова сума S_n при $n \rightarrow \infty$ не має скінченної границі, то ряд називають **розбіжним**.

Ряд $a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$ ($|q| < 1$), складений з членів нескінченно спадної геометричної прогресії, є збіжним, його сума $S = \frac{a}{1-q}$.

Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, який називається гармонійним, розбігається.

Основні властивості збіжних рядів:

1. Якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то збігається і ряд $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$, який одержується з початкового ряду шляхом відкидання перших m членів (останній ряд називають m -м **залишком** початкового ряду); навпаки, із збіжності залишку ряду витікає збіжність даного ряду.

2. Якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і сума його дорівнює S , то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$, причому сума останнього ряду дорівнює cS (c – будь-яке дійсне число).

3. Якщо збігаються ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, а S_1 і S_2 відповідно їх суми, то збігаються і ряди $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$, причому їх суми дорівнюють $S_1 \pm S_2$ відповідно.

4. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, тобто при $n \rightarrow \infty$ границя загального члена збіжного ряду дорівнює нулю (**необхідна ознака збіжності ряду**). Таким чином, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбігається.

Якщо всі члени ряду додатні (або від'ємні), то такий ряд називається **знакосталим**.

Достатні ознаки збіжності знакосталих рядів.

1. **Ознака порівняння.** Нехай задані два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причому, кожен член ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ не більше за відповідний член ряду $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, тобто $0 < u_n \leq v_n$ ($n=1, 2, \dots$). Тоді, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ розбігається, то розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Ця ознака залишається в силі, якщо умови $u_n \leq v_n$ виконуються не для всіх n , а лише починаючи з деякого номера $n = N$.

2. **Ознака Даламбера.** Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n > 0, n=1, 2, \dots$) існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то цей ряд збігається при $l < 1$ і розбігається при $l > 1$.

3. **Радикальна ознака Коші.** Якщо для ряду ($u_n > 0, n=1, 2, \dots$) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то цей ряд збігається при $l < 1$ і розбігається при $l > 1$.

4. **Інтегральна ознака Коші.** Якщо $f(x)$ при $x \geq 1$ – неперервна, додатна і монотонно спадна функція, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, де $u_n = f(n)$, збігається, якщо збігається невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$, і розбігається, якщо цей інтеграл розбігається.

Ряди, члени яких мають знаки, що перемежаються, тобто ряди вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$, де $u_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), називаються **знакопереміжними**.

5. **Достатня ознака збіжності знакопереміжного ряду (ознака Лейбніца).** Знакопереміжний ряд збігається, якщо абсолютні величини його

членів монотонно спадають, а загальний член ряду прямує до нуля, тобто, якщо виконуються наступні дві умови:

$$1) u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots \quad \text{та} \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Величина n -го залишку R_n знакопереміжного ряду оцінюється за допомогою нерівності $|R_n| < u_{n+1}$.

Ряд з довільним чергуванням знаків своїх членів називається **знакозмінним**.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

В цьому випадку початковий ряд називається **абсолютно збіжним**.

Збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається **умовно збіжним**, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбігається.

Приклад 1. Написати перші чотири члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Якщо $n = 1$, то $u_1 = \frac{1}{3}$; якщо $n = 2$, то $u_2 = \frac{2}{5}$; якщо $n = 3$, то $u_3 = \frac{3}{7}$; якщо $n = 4$, то $u_4 = \frac{4}{9}$.

Ряд можна записати у вигляді $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \dots$

Приклад 2. Знайти спільний член ряду $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \dots$

РОЗВ'ЯЗАННЯ Чисельники утворюють арифметичну прогресію $1, 3, 5, 7, \dots$, n -й член якої знаходимо за формулою $a_n = a_1 + d(n-1)$ У нашому випадку $a_1 = 1$, $d = 2$, тому $a_n = 2n - 1$. Знаменники утворюють геометричну прогресію $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$, n -й член цієї прогресії $b_n = 2^n$. Отже, загальний член ряду $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1};$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+10};$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1};$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!} \quad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n);$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

1) Даний ряд складається з членів нескінченно спадної $\left(q = \frac{1}{3} < 1\right)$ геометричної прогресії і тому збігається. Знайдемо його суму. В нашому випадку $a = \frac{2}{5}$, $q = \frac{1}{3}$ (q – знаменник прогресії). Отже,

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{5}.$$

2) Даний ряд можна одержати із гармонійного ряду (який розбігається) шляхом відкидання перших десяти членів. Отже, він розбігається.

3) Члени даного ряду менші за відповідні члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, який збігається як нескінченно спадна геометрична прогресія. Отже, збігається і даний ряд.

4) Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$, то ряд розбігається (не виконується необхідна ознака збіжності).

5) Застосуємо ознаку Даламбера. Оскільки $u_n = \frac{10^n}{n!}$, $u_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!}$,
 $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10}{n+1}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10}{n+1} = 0$. Оскільки $l = 0 < 1$, то ряд збігається.

6) Тут зручно застосувати радикальну ознаку Коші. Оскільки $\sqrt[n]{u_n} = \frac{n}{2n+1}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, то даний ряд збігається.

7) Маємо: $u_n = \frac{1}{n^2}$, $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$, $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Оскільки $l = 1$, то за допомогою ознаки Даламбера не вдається розв'язати питання про збіжність ряду.

Застосуємо інтегральну ознаку Коші: $u_n = \frac{1}{n^2}$; отже, $f(x) = \frac{1}{x^2}$,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1.$$

Невласний інтеграл збігається, тому збігається і даний ряд.

8) Даний ряд знакопереміжний. Застосуємо ознаку Лейбніца. Оскільки $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots$, то перша умова ознаки Лейбніца виконується. Далі, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, то виконується і друга умова. Отже, ряд збігається. Беручи до уваги, що в даному випадку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ співпадає з гармонійним рядом (який розбігається), робимо висновок, що початковий ряд збігається умовно.

ЗАВДАННЯ

6.1. Написати перші п'ять членів ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2^{n+1}}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10^n + n}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

6.2. Знайти загальний член ряду:

$$\begin{aligned} 1) \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \left(\frac{4}{9}\right)^4 + \dots; & \quad 2) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots; \\ 3) \frac{1}{2 \ln 3} + \frac{2}{3 \ln 4} + \frac{3}{4 \ln 5} + \dots; & \quad 4) \frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{3}{8} - \frac{4}{17} + \dots \end{aligned}$$

6.3. Дослідити на збіжність ряди:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+1}; & \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{5n+1}; & \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}; \\ 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}; & \quad 5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n + 3}; & \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)3^n}; \\ 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; & \quad 8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{3^n}; & \quad 9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{10n}; \\ 10) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n; & \quad 11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}; & \quad 12) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}. \end{aligned}$$

6.2. Степеневі ряди

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \equiv u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$, члени якого – функції від x , називається **функціональним**. Сукупність значень x , при яких функції

$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x) \dots$ – визначені і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається, називають **областю збіжності** функціонального ряду.

Функціональний ряд виду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$, де

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – дійсні числа, називається **степеневим** рядом. Будь-який степеневий ряд збігається (і причому абсолютно) на деякому інтервалі $(-R; R)$. На кінцях інтервалу збіжності (у точках $x = \pm R$) степеневий ряд може як збігатися (абсолютно або умовно), так і розбігатися. Поза інтервалом $[-R; R]$ ряд розбігається. Число R називається **радіусом збіжності** степеневого ряду. В окремих випадках радіус збіжності ряду може дорівнювати нулю або нескінченності. Якщо $R = 0$, то степеневий ряд збігається лише при $x = 0$; якщо ж $R = \infty$, то ряд збігається абсолютно на всій числовій осі $(-\infty < x < \infty)$.

Для пошуку радіуса збіжності степеневого ряду можна скористатися одним з наступних способів:

1) якщо серед коефіцієнтів $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ немає рівних нулю, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|;$$

2) якщо серед коефіцієнтів ряду є рівні нулю, то радіус збіжності ряду можна знаходити за формулою $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, в якій використовуються лише

значення $a_n \neq 0$ (ця формула придатна і в першому випадку).

Функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

називається рядом за степенями $(x-a)$. Такий ряд збігається абсолютно на інтервалі $(a-R; a+R)$ і розбігається поза відрізком $[a-R; a+R]$. На кінцях інтервалу (у точках $x = a \pm R$) ряд може як збігатися, так і розбігатися. Число R також називається радіусом збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ і знаходиться

вказаними вище способами.

Дослідити збіжність степеневого ряду означає, що необхідно:

- 1) знайти радіус збіжності ряду;
- 2) дослідити збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності;
- 3) сформулювати результат досліджень.

Приклад 4. Дослідити збіжність степеневих рядів:

$$1) x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n + \dots;$$

$$2) 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots;$$

$$3) 1 + \frac{x-1}{2} + \frac{2}{2^2}(x-1)^2 + \frac{3}{2^3}(x-1)^3 + \dots + \frac{n}{2^n}(x-1)^n + \dots.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

1) В даному випадку $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Знайдемо радіус збіжності

ряду: $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$. Отже, на інтервалі $(-1, 1)$ ряд збігається

абсолютно. Досліджуємо збіжність ряду на кінцях інтервалу, тобто при $x = \pm 1$.

Якщо $x = 1$, то степеневий ряд перетворюється на гармонійний

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, який, як відомо, розбігається. При $x = -1$ одержуємо ряд

$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{n} + \dots$, який є знакопереміжним і збігається, оскільки

задовольняє умовам ознаки Лейбніца. Отже, ряд збігається на інтервалі $[-1, 1)$, причому, абсолютно при $x \in (-1, 1)$ і умовно при $x = -1$;

$$2) \text{ Тут } a_n = \frac{1}{n!}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}; R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Отже, ряд збігається при будь-якому значенні x (на всій числовій осі).

$$3) \text{ Тут } a_n = \frac{n}{2^n}, a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2.$$

Отже, ряд збігається абсолютно на інтервалі $(-1, 3)$.

Досліджуємо збіжність ряду на кінцях інтервалу. Якщо $x = 3$, то одержуємо ряд $1 + 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$, який розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду ($\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$): $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$;

якщо $x = -1$, одержуємо ряд $1 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots$, який також розбігається (не виконується необхідна умова збіжності). Отже, ряд абсолютно збігається на інтервалі $(-1, 3)$ і розбігається при будь-яких інших значеннях x .

ЗАВДАННЯ

6.4. Дослідити збіжність степеневих рядів:

$$1) 1 + \frac{x}{2 \cdot 3} + \frac{x^2}{3 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{4 \cdot 3^3} + \dots + \frac{x^n}{(n+1) \cdot 3^n} + \dots;$$

$$2) 1 + x + (2x)^2 + (3x)^3 + \dots + (nx)^n + \dots;$$

$$3) 3x + \frac{3^2 \cdot x^2}{2!} + \frac{3^3 \cdot x^3}{3!} + \dots + \frac{3^n \cdot x^n}{n!} + \dots;$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n};$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n} \right)^n;$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n};$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!};$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-3}{2} \right)^n.$$

6.3. Розкладання функцій у степеневі ряди

Якщо функція $f(x)$ диференційована $n + 1$ раз в деякому околі точки $x = x_0$, то в цьому околі вона може бути представлена у вигляді :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x).$$

Таке представлення функції називається **формулою Тейлора**, а $R_n(x)$ – **залишковим членом** формули Тейлора. Залишковий член формули Тейлора може бути записаний таким чином:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \text{ де } C - \text{деяка точка, що лежить між точками}$$

x_0 і x .

При $x_0 = 0$ маємо **формулу Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x);$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!} x^{n+1}, C \in (0, x).$$

Формули Маклорена для деяких функцій:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x);$$

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x);$$

$$R_{2n}(x) = (-1)^n \frac{\cos C}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x);$$

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} \frac{\cos C}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2}.$$

Будь-яка нескінченно диференційовна на інтервалі (a, b) функція може бути розкладена на цьому інтервалі в **ряд Тейлора**, що збігається до неї:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots,$$

якщо на цьому інтервалі виконується умова:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = 0,$$

де $R_n(x)$ – залишковий член формули Тейлора (або залишок ряду), а C – деяка точка інтервалу (a, b) .

При $x_0 = 0$ маємо **ряд Маклорена** :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Наведемо розкладання в ряд Маклорена деяких функцій:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, x \in (-\infty, \infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, x \in (-\infty, \infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, x \in (-\infty, \infty);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, x \in (-1, 1];$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, x \in [-1, 1].$$

Приклад 5. Представити функцію $f(x) = \sqrt[3]{x}$ у вигляді многочлена четвертого степеня відносно $x - 1$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Обчислимо значення функції та її похідних до четвертого порядку включно при $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1, f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}, f'(1) = \frac{1}{3}, f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-5/3}, f''(1) = -\frac{2}{9},$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27} x^{-8/3}, \quad f'''(1) = \frac{10}{27}, \quad f^{iv}(x) = -\frac{80}{81} x^{-11/3}, \quad f^{iv}(1) = -\frac{80}{81}.$$

Отже, за формулою Тейлора отримаємо:

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27 \cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{80}{81 \cdot 4!}(x-1)^4 + R_4(x),$$

$$\text{де } R_4(x) = \frac{f^{(5)}(C)}{5!}(x-1)^5 = \frac{880}{243 \cdot 5!} C^{-14/3}(x-1)^5, \quad C \in (1, x).$$

Приклад 6. Розкласти в ряд за степенями x функцію $f(x)$:

$$1) \quad f(x) = 2^x, \quad 2) \quad f(x) = e^{-x^2}.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ:

1) знайдемо значення функції та її похідних при $x = 0$:

$$f(0) = 1, \quad f'(x) = 2^x \ln 2, \quad f'(0) = \ln 2, \quad f''(x) = 2^x \ln^2 2, \quad f''(0) = \ln^2 2, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2, \quad f^{(n)}(0) = \ln^n 2.$$

Оскільки $0 < \ln 2 < 1$, то при фіксованому x має місце нерівність $f^{(n)}(x) < 2^x$ для будь-якого n . Отже, функція 2^x може бути представлена рядом Маклорена:

$$2^x = 1 + x \ln 2 + \frac{1}{2!} x^2 \ln^2 2 + \frac{1}{3!} x^3 \ln^3 2 + \dots, \quad x \in (-\infty, \infty);$$

2) у розкладанні $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots$, $x \in (-\infty, \infty)$ зробимо заміну x на $-x^2$, отримаємо:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2!} x^4 - \frac{1}{3!} x^6 + \frac{1}{4!} x^8 - \frac{1}{5!} x^{10} \dots, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int_0^a e^{-x^2} dx$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Відомо, що первісна від e^{-x^2} не є елементарною функцією. Тому для знаходження вказаного інтеграла розкладемо в ряд підінтегральну функцію:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2!} x^4 - \frac{1}{3!} x^6 + \frac{1}{4!} x^8 - \frac{1}{5!} x^{10} \dots$$

Проінтегруємо обидві частини цієї рівності від 0 до a .

$$\text{Отримаємо: } \int_0^a e^{-x^2} dx = \int_0^a \left(1 - x^2 + \frac{1}{2!} x^4 - \frac{1}{3!} x^6 \dots \right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots \right) \Big|_0^a = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{2! \cdot 5} - \frac{a^7}{3! \cdot 7} + \dots$$

За допомогою цієї рівності можна обчислити зазначений інтеграл з будь-якою точністю за будь-якого значення a .

ЗАВДАННЯ

6.5. Подати функцію $f(x)$ у вигляді многочлена п'ятого степеня відносно x :

1) $f(x) = \sqrt{x-1}$; 2) $f(x) = 3^x$.

6.6. Розкласти в ряд за степенями x функції:

1) $\sin 2x$; 2) e^{3x} ; 3) $\frac{1}{1-x}$; 4) $\arctg x^2$.

6.7. Розкласти в ряд за степенями $x-1$ функції:

1) $\ln x$; 2) $\frac{1}{x}$; 3) x^5 ; 4) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6x - 1$.

ДОДАТКИ

Деякі сталі

$$\pi = 3,14159;$$

$$\pi^2 = 9,8696;$$

$$\sqrt{\pi} = 1,77245;$$

$$\frac{1}{\pi} = 0,31831;$$

$$e = 2,71828;$$

$$e^2 = 7,3891;$$

$$\sqrt{e} = 1,64872;$$

$$\frac{1}{e} = 0,36788;$$

$$\ln \pi = 1,14473;$$

$$\sqrt{2} = 1,41421;$$

$$\sqrt{3} = 1,73205.$$

Основні формули алгебри

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c};$$

$$a^b : a^c = a^{b-c};$$

$$(a^b)^c = a^{bc}; \quad \sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}; \quad a^{-b} = \frac{1}{a^b}.$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a-b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b});$$

$$a-b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2});$$

$$a+b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}).$$

Корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Розкладання квадратного тричлена на множники:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1 та x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Арифметична прогресія

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (\text{Визначення арифметичної прогресії}),$$

$$a_n = a_1 + d(n-1) \quad (\text{Формула } n - \text{го члена}),$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \quad (\text{Формула суми перших } n \text{ членів}).$$

Геометрична прогресія

$$b_{n+1} = b_n q, \quad b_1 \neq 0, q \neq 0 \quad (\text{визначення геометричної прогресії}),$$

$$b_n = b_1 q^{n-1} \quad (\text{Формула } n\text{-го члена}),$$

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (\text{Формула суми перших } n \text{ членів}),$$

$$S = \frac{b_1}{1 - q} \quad (\text{формула суми нескінченної геометричної прогресії при } |q| < 1).$$

Логарифми

$$a^{\log_a b} = b \quad (0 < a \neq 1, b > 0); \quad \log_a a = 1; \quad \log_a 1 = 0;$$

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c; \quad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c;$$

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b;$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (0 < c \neq 1) \quad (\text{формула переходу до нової основи}).$$

Основні тригонометричні формули

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Знаки тригонометричних функцій за чвертями

Функція Чверть	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

Деякі значення тригонометричних функцій

Функція Аргумент	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
0	0	1	0	–
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0
π	0	–1	0	–

Формули зведення

Функція Аргумент	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$
$2\pi + \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

Основні формули диференціального числення

$$\text{Похідна: } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Основні правила диференціювання

Якщо c – стала, а $u(x)$ і $v(x)$ – диференційовні функції, то:

$$1) \quad c' = 0; \quad 2) \quad (u \pm v)' = u' \pm v'; \quad 3) \quad (cu)' = cu';$$

$$4) \quad (uv)' = u'v + uv'; \quad 5) \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$6) \quad (f(u(x)))' = f'_u \cdot u'_x.$$

Основні формули диференціювання (u – функція від x)

$$1) \quad (u^a)' = au^{a-1} \cdot u'; \quad \text{зокрема: } (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}; \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

$$2) \quad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'; \quad \text{зокрема: } (e^u)' = e^u u';$$

$$3) \quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}; \quad \text{зокрема: } (\ln u)' = \frac{u'}{u};$$

$$4) \quad (\sin u)' = \cos u \cdot u'; \quad 5) \quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'; \quad 6) \quad (\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u};$$

$$7) \quad (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}; \quad 8) \quad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$9) \quad (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}; \quad 10) \quad (\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2};$$

$$11) \quad (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

Основні формули інтегрального числення

Невизначений інтеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad F'(x) = f(x).$$

Властивості невизначеного інтеграла (правила інтегрування)

$$1. \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \quad 2. \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. $\int dF(x) = F(x) + C$. 4. $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$.
5. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.
6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Таблиця основних інтегралів

- | | |
|--|---|
| 1. $\int dx = x + C$. | 2. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (якщо $\alpha \neq -1$). |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$. | 4. $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln \varphi(x) + C$. |
| 5. $\int e^x dx = e^x + C$. | 6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$. |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + C$. | 8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$. |
| 9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$. | 10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$. |
| 11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$. | 12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$. |
| 13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$. | |
| 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}$. | |
| 15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$. | |
| 16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}$. | |
| 17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$. | |
| 18. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$. | |

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Барковський, В. В., Барковська, Н. В. (2020). *Вища математика для економістів*. Київ: Центр навчальної літератури, 448 с.
2. Валєєв, К. Г., Джалладова, І. А. та Дегтяр, С. В. (2021). *Вища математика для економістів*. Київ: Знання, 287 с.
3. Васильченко, І. П. *Вища математика для економістів*. (2022). Київ: Знання, 341 с.
4. Зайцев Є. П. (2021). *Вища математика*. Київ: Алерта, 608 с.
5. Клепко, В. Ю., Голець, В. Л. (2019). *Вища математика в прикладах і задачах*. Київ: Центр навчальної літератури, 594 с.
6. Литвин, І. І., Конончук, О. М. та Железняк, Г. О. (2019). *Вища математика*. Київ: Центр навчальної літератури, 368 с.
7. Макаренко, В. О. (2022). *Вища математика для економістів*. Київ: Знання, 517 с.
8. Турчанінова, Л. І., Доля, О. В. (2020). *Вища математика в прикладах і задачах*. Київ: Ліра-К, 348 с.
9. Фортуна, В. В., Бескровний, О. І. (2022). *Вища та прикладна математика*. Львів: Магнолія-2006, 647 с.
10. Чеберяк О. Г., Кузубов, В. В. та Свистун, Л. О. (2021). *Математика для економістів. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння*. 2-ге вид. Київ: Самміт-книга, 287 с.

ЗМІСТ

Вступ	3
1. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ	4
1.1. Дійсні числа та їх основні властивості	4
1.2. Функціональна залежність	8
1.3. Границя числової послідовності (змінної величини)	11
1.4. Границя функції	16
1.5. Неперервність функції	25
2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.....	28
2.1. Похідна та диференціал	28
2.2. Правило Лопітала	36
2.3. Зростання та спадання функції. Екстремум	39
2.4. Опуклість функції. Точки перегину кривої	44
2.5. Асимптоти	45
2.6. Побудова графіків функцій	46
3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ .	50
3.1. Функції багатьох змінних	50
3.2. Похідні та диференціали функції багатьох змінних	52
3.3. Екстремум функції багатьох змінних	59
3.4. Емпіричні формули	68
4. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ	72
4.1. Невизначений інтеграл	72
4.2. Визначений інтеграл	78
4.3. Обчислення площ плоских фігур	81
4.4. Невласні інтеграли	83
5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ	84
6. РЯДИ	89
6.1. Числові ряди	89
6.2. Степеневі ряди	93
6.3. Розкладання функцій у степеневі ряди	96
ДОДАТКИ	100
Список літератури	106
Зміст	107

Навчальне видання

МИХАЙЛЕНКО Віталій Григорович
СВІЩОВА Євгенія Віталіївна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

ПРАКТИКУМ

В авторській редакції
Комп'ютерний набір і верстка *Є. В. Свіщова*

Підписано до друку . Формат 60 × 84/16.
Папір офсетний. Гарнітура "Таймс".
умов. друк. арк. 7,67. Обл.-вид. арк. 6,82.
Тираж 50 ін. Зам №

План 2025/26 навч. р., поз. №1 у переліку робіт кафедри .

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво №1153 від 16.12.2002.

Надруковано у видавництві Народної української академії

Україна, 61000, Харків, МСП, вул.. Майка Йогансена, 27