

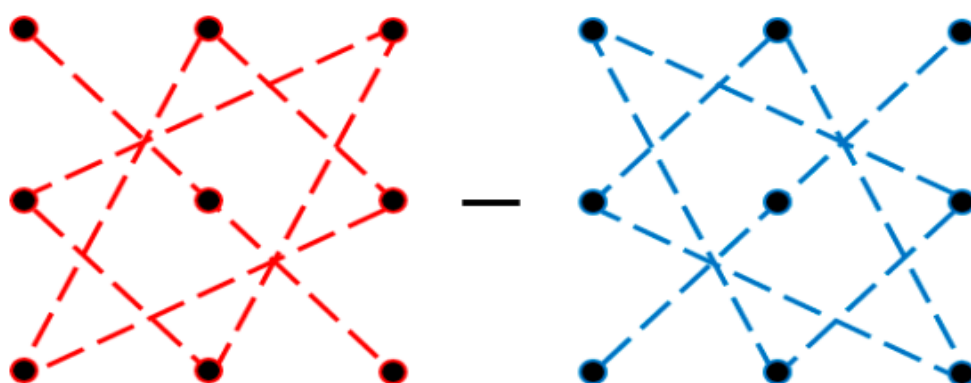


НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

В. Г. Михайленко, Є. В. Свіщова

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

П Р А К Т И К У М



Видавництво НУА

НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

В. Г. Михайленко, Є. В. Свіщова

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

ПРАКТИКУМ

Харків
Видавництво НУА
2025

УДК 512.64(075.8+0.76)
М69

*Затверджено на засіданні
кафедри інформаційних технологій та математики
Протокол №6 від 03.03.2025*

Рецензент канд. фіз.-мат. наук *О. Г. Ніколаєва*
(ХНУ ім. В. Н. Каразіна)

Пропонований навчально-методичний посібник, містить завдання, що належать до розділу лінійна алгебра. На початку кожного розділу подано необхідні короткі теоретичні відомості (означення, формули тощо). Більшість завдань супроводжуються вказівками щодо їх розв'язання. У багатьох випадках детально розбираються типові приклади. В кінці розміщені варіанти індивідуальних завдань.

Михайленко, Віталій Григорович.

М69

Лінійна алгебра : практикум / В. Г. Михайленко, Є. В. Свіщова ;
Нар. укр. акад. ; каф. інформ. технологій та математики. – Харків:
Вид-во НУА, 2025. – 98 с.

УДК 512.64(075.8+076)

©Народна українська академія, 2025

ВСТУП

У сучасному світі, де економіка та соціальні процеси тісно переплетені з інформаційними технологіями, аналітикою та прогнозуванням, вища математика посідає ключове місце в підготовці фахівців економічного та соціологічного профілю. Це не лише мова формул і обчислень – це універсальний інструмент для розуміння, аналізу та моделювання складних систем, з якими майбутнім економістам і соціологам доведеться працювати на практиці.

Математичні методи дозволяють:

- будувати моделі економічних процесів і приймати обґрунтовані управлінські рішення;
- аналізувати статистичні дані та робити прогнози на основі емпіричних досліджень;
- оцінювати ефективність соціальних програм і вивчати динаміку змін у суспільстві;
- формалізувати та оптимізувати процеси, що впливають на національну і глобальну економіку.

Математика є універсальною мовою, яка дозволяє ефективно взаємодіяти з фахівцями інших галузей – програмістами, інженерами, аналітиками. Це особливо важливо в умовах міждисциплінарних команд і сучасного ринку праці.

Опанування вищої математики також сприяє розвитку логічного мислення, вміння структурувати інформацію, аргументувати свої висновки та знаходити оптимальні рішення в нестандартних ситуаціях. Саме ці якості цінуються в сучасному динамічному професійному середовищі.

Навчальний посібник охоплює такі розділи вищої математики як векторна алгебра, аналітична геометрія та матрична алгебра. На початку кожного параграфа наводяться відомості з теорії (формули, означення та інші короткі пояснення), які необхідні для розв’язання задач, після чого наводяться докладні розв’язання типових задач. Наприкінці кожного параграфа пропонуються задачі для самостійного розв’язання.

Така побудова навчально-методичного посібника дозволяє використовувати його як для роботи під керівництвом викладача, так і для самостійного вивчення зазначених розділів курсів «Вища математика» та «Математика для соціологів».

Студенти отримають більшу користь, якщо працюватимуть над посібником активно. Це означає, що перш, ніж розпочати розв’язання задач, слід ґрунтовно вивчити теоретичний матеріал, що належить до відповідного параграфу. Хочеться звернути увагу на навчальний посібник [1], який містить необхідні теоретичні відомості.

I. ВЕКТОРИ ТА ДІЇ НАД НИМИ

1. Лінійні дії над векторами

1. n -вимірним вектором $\vec{a}$ називається впорядкований набір з n дійсних чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, які називаються координатами вектора $\vec{a}$.

$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – координатна форма запису вектора $\vec{a}$.

Іноді вектори записуються як упорядковані стовпці (вектор-стовпці):

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Вектор, всі координати якого дорівнюють нулю, називається нульовим вектором: $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$. При записі нульового вектора часто стрілка опускається. Записи $\vec{a} = \vec{0}$ і $\vec{a} = 0$ – еквівалентні.

Вектори зручно представляти (особливо у дво- та тривимірних просторах) у вигляді напрямлених відрізків. Якщо $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – початок, а $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – кінець вектора $\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n)$.

2. Вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ дорівнює вектору $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, якщо $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$. Останнє часто коротко записують так:

$$a_i = b_i, \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

3. Добуток вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ на скаляр (число) $k \in \mathbb{R}$ є вектор $k\vec{a} = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$. Вектори $\vec{a}$ та $k\vec{a}$, якщо $k \neq 0$, називаються колінеарними. Вектор $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a} = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$ називається протилежним вектору $\vec{a}$.

4. Умова колінеарності векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

5. Сумою векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ є вектор $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$; різницею векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є вектор $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \dots, a_n - b_n)$.

6. Лінійною комбінацією векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називається вектор $k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \dots + k_m\vec{a}_m$; при цьому числа $k_1, k_2, \dots, k_m$ називаються коефіцієнтами лінійної комбінації.

7. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називаються лінійно залежними, якщо хоча б один з них є лінійною комбінацією інших або, що те саме, якщо існують числа $k_1, k_2, \dots, k_m$, серед яких хоча б одне не дорівнює нулю, такі, що

$$k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \dots + k_m \vec{a}_m = 0.$$

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ називаються **лінійно незалежними**, якщо рівність $k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \dots + k_m \vec{a}_m = 0$ можливе тільки при $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ або, що те саме, якщо жоден із векторів не є лінійною комбінацією інших.

8. Якщо $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$ – кінці відрізка AB , а точка $M(x, y, z)$ ділить цей відрізок у відношенні $\frac{AM}{MB} = \lambda$, то координати цієї точки:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Якщо $M(x, y, z)$ – середина відрізка AB , то $\lambda = 1$ і

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Приклад 1. Записати в координатній формі вектор $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(2, 1, -3)$, $B(5, -2, 4)$.

Розв'язання

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 2, -2 - 1, 4 - (-3)) = (3, -3, 7).$$

Приклад 2. Чи колінеарні вектори $\vec{a} = (4, -1, 3)$ і $\vec{b} = (8, -2, -6)$?

Розв'язання

$$\text{Оскільки } \frac{a_1}{b_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_2}{b_2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}, \quad \text{то } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}.$$

Отже, вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не колінеарні.

Приклад 3. Дано точки $A(2, -1, 4)$, $B(x, 2, 1)$, $C(3, y, -1)$ і $D(-1, 3, -2)$. За яких значень x і y вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ будуть колінеарними?

Розв'язання

$\overrightarrow{AB} = (x - 2, 3, -3)$, $\overrightarrow{CD} = (-4, 3 - y, -1)$. Ці вектори будуть колінеарними за умови, що $\frac{x - 2}{-4} = \frac{3}{3 - y} = \frac{-3}{-1}$. Отже, повинні виконуватись рівності:

$$\begin{cases} \frac{x - 2}{-4} = 3, \\ \frac{3}{3 - y} = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = -12, \\ 3 - y = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -10, \\ y = 2. \end{cases}$$

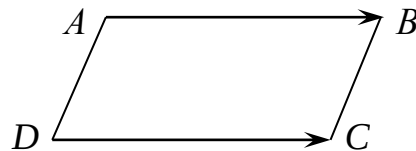
Приклад 4. $A(3, -1, 2)$, $B(-2, 3, 4)$ та $C(1, 2, -3)$ – три послідовні вершини паралелограма $ABCD$. Знайти координати вершини D .

Розв'язання

Позначимо координати вершини D через x, y та z . Розглянемо вектори $\overrightarrow{AB} = (-5, 4, 2)$ та $\overrightarrow{DC} = (1 - x, 2 - y, -3 - z)$.

Оскільки вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{DC}$ рівні, то

$$\begin{cases} -5 = 1 - x, \\ 4 = 2 - y, \\ 2 = -3 - z; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6, \\ y = -2, \\ z = -5; \end{cases} \Rightarrow D(6, -2, -5).$$



Приклад 5. Дано вектори $\vec{a} = (2, 3, -4, 1)$ та $\vec{b} = (-1, 2, 2, -3)$.

Знайти вектор $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Розв'язання

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (4, 6, -8, 2) + (3, -6, -6, 9) = (7, 0, -14, 11).$$

Приклад 6. Показати, що вектори $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 0, 0)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 3, 0)$ та $\vec{a}_4 = (1, 2, 3, 4)$ лінійно незалежні.

Розв'язання

Складемо лінійну комбінацію векторів та прирівняємо її нулю:

$$\begin{aligned} k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + k_3 \vec{a}_3 + k_4 \vec{a}_4 &= \\ (k_1, 0, 0, 0) + (k_2, 2k_2, 0, 0) + (k_3, 2k_3, 3k_3, 0) + (k_4, 2k_4, 3k_4, 4k_4) &= \\ = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4, 2k_2 + 2k_3 + 2k_4, 3k_3 + 3k_4, 4k_4) &= 0, \\ \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0, \\ 2k_2 + 2k_3 + 2k_4 = 0, \\ 3k_3 + 3k_4 = 0, \\ 4k_4 = 0; \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 0, \\ k_2 = 0, \\ k_3 = 0, \\ k_4 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Оскільки лінійна комбінація цих векторів перетворюється на нуль лише за умови $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ – лінійно незалежні.

Приклад 7. Дано точки $A(2, -3, 1)$ та $B(12, 7, 11)$. Знайти точку $M(x, y, z)$, що ділить відрізок AB у відношенні $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$.

Розв'язання

У нашому випадку $\lambda = \frac{2}{3}$. Тому:

$$x = \frac{2 + \frac{2}{3} \cdot 12}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{30}{3}}{\frac{5}{3}} = 6; \quad y = \frac{-3 + \frac{2}{3} \cdot 7}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1; \quad z = \frac{2 + \frac{2}{3} \cdot 11}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{25}{3}}{\frac{5}{3}} = 5.$$

Отже, $M(6, 1, 5)$.

Приклад 8. Підприємство випускає чотири види продукції. Виробничі потужності підприємства дозволяють випускати за добу 300 од. продукції першого виду, 460 од. продукції другого, 540 од. третього та 260 од. четвертого виду. Після проведеної модернізації виробництва виробничі потужності підприємства збільшились на 20%. Скільки одиниць кожного виду продукції може випускати підприємство після реконструкції?

Розв'язання

Запишемо об'єм добового випуску (до реконструкції) всіх видів продукції як вектора $\vec{a} = (300, 460, 540, 260)$. Оскільки після реконструкції виробничі потужності підприємства збільшились на 20%, то підприємство збільшило добовий випуск продукції у 1,2 рази. Отже, обсяг випуску кожного виду продукції може бути отриманий як

$$1,2 \cdot \vec{a} = 1,2 \cdot (300, 460, 540, 260) = (360, 552, 648, 312).$$

Таким чином, після реконструкції підприємство може випускати 360 од. продукції першого виду, 552 од. – другого, 648 од. – третього та 312 од. четвертого виду.

2. Скалярний добуток векторів

1. Скалярним добутком векторів $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ та $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ називається число, що позначається $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $(\vec{a}, \vec{b})$, що дорівнює сумі добутків однойменних координат:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n.$$

Скалярний добуток векторів має такі властивості:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a});$$

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c});$$

$$(k_1 \vec{a}, k_2 \vec{b}) = k_1 k_2 (\vec{a}, \vec{b}).$$

2. Довжиною вектора $\vec{a}$ називається число, яке позначається a або $|\vec{a}|$, що дорівнює: $a = |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$.

3. Відстань між точками $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ та $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ визначається як довжина вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}.$$

4. Кутом між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається кут φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$), косинус якого визначається рівністю: $\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{a \cdot b}$.

5. Для скалярного добутку векторів справедлива рівність:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = a \cdot b \cdot \cos \varphi.$$

6. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються ортогональними (перпендикулярними), якщо $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Приклад 9. Обчислити скалярний добуток векторів $\vec{a} = (2, -1, 0, 3, -5)$ та $\vec{b} = (1, 2, 4, -3, 2)$.

Розв'язання

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-3) + (-5) \cdot 2 = 2 - 2 - 9 - 10 = -19.$$

Приклад 10. Обчислити скалярний добуток $(\vec{a}, \vec{b})$, якщо $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $m = 1$, $n = 2$, $\vec{m} \wedge \vec{n} = \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання

Використавши властивості скалярного добутку, отримуємо:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (2\vec{m} - 3\vec{n}, \vec{m} + 2\vec{n}) = (2\vec{m}, \vec{m}) + (2\vec{m}, 2\vec{n}) + (-3\vec{n}, \vec{m}) + (-3\vec{n}, 2\vec{n}) = \\ &= 2 \cdot (\vec{m}, \vec{m}) + 4 \cdot (\vec{m}, \vec{n}) - 3 \cdot (\vec{n}, \vec{m}) - 6 \cdot (\vec{n}, \vec{n}) = 2m^2 + (\vec{m}, \vec{n}) - 6n^2 = \\ &= 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} - 6 \cdot 2^2 = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 24 = -21. \end{aligned}$$

Приклад 11. Знайти довжину вектора $\vec{a} = (3, 2, 1, -1, -1)$.

Розв'язання

$$a = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Приклад 12. Знайти довжину вектора $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$, якщо $m = 2$, $n = 3$, $\vec{m} \wedge \vec{n} = \frac{2\pi}{3}$.

Розв'язання

$$\text{Обчислимо } (\vec{a}, \vec{a}) = a^2: \quad (\vec{a}, \vec{a}) = (3\vec{m} - \vec{n}, 3\vec{m} - \vec{n}) = (3\vec{m}, 3\vec{m}) +$$

$$+ (3\vec{m}, -\vec{n}) + (-\vec{n}, 3\vec{m}) + (-\vec{n}, -\vec{n}) = 9 \cdot (\vec{m}, \vec{m}) - 3 \cdot (\vec{m}, \vec{n}) - 3 \cdot (\vec{n}, \vec{m}) + (\vec{n}, \vec{n}) =$$

$$= 9m^2 - 6 \cdot (\vec{m}, \vec{n}) + n^2 = 9 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + 3^2 = 36 - 36 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9 = 63.$$

$$\text{Отже, } a = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{63}.$$

Приклад 13. Чи є серед векторів $\vec{a}_1 = (2, -1, 3, 0, 2)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 2, 4, -1)$ та $\vec{a}_3 = (0, 2, -1, 1, 4)$ ортогональні?

Розв'язання

Обчислимо скалярні добутки цих векторів:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 2 - 1 + 6 + 0 - 2 = 5 \neq 0;$$

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_3) = 0 - 2 - 3 + 0 + 8 = 3 \neq 0;$$

$$(\vec{a}_2, \vec{a}_3) = 0 + 2 - 2 + 4 - 4 = 0.$$

Отже, вектори $\vec{a}_2$ та $\vec{a}_3$ ортогональні.

Приклад 14. Знайти кут між векторами $\vec{a} = (2, -1, 2)$ та $\vec{b} = (2, 4, 4)$.

Розв'язання

Знайдемо косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{a \cdot b} = \frac{2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 4}{\sqrt{4 + 1 + 4} \cdot \sqrt{4 + 16 + 16}} = \frac{4 - 4 + 8}{3 \cdot 6} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Отже, } \varphi = \arccos \frac{4}{9}.$$

Приклад 15. Знайти довжини сторін трикутника ABC і кут $\angle BAC$, якщо координати його вершин: $A(3, -5, 2)$, $B(4, -6, 2)$, $C(4, -7, 4)$.

Розв'язання

Розглянемо вектори:

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 3, -6 - (-5), 2 - 2) = (1, -1, 0),$$

$$\overrightarrow{AC} = (4 - 3, -7 - (-5), 4 - 2) = (1, -2, 2),$$

$$\overrightarrow{BC} = (4 - 4, -7 - (-6), 4 - 2) = (0, -1, 2).$$

Знаходимо довжини сторін трикутника:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad AC = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3,$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Кут $\angle BAC = \varphi$ утворений векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Тому:

$$\cos \varphi = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{AB \cdot AC} = \frac{1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\varphi = \angle BAC = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

3. Векторний добуток векторів (в $\mathbb{R}^3$)

1. Векторним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$, який:

- а) перпендикулярний кожному з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$;
- б) напрямлений так, що якщо дивитися з його кінця, то поворот першого вектора (тобто вектора $\vec{a}$) до другого (тобто вектора $\vec{b}$) на менший кут φ проходить проти годинникової стрілки;
- в) довжина вектора $\vec{c}$ дорівнює добутку довжин векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ на синус кута між ними, тобто $c = |[\vec{a}, \vec{b}]| = a \cdot b \cdot \sin \varphi$.

Для векторного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ використовується також позначення $\vec{a} \times \vec{b}$.

2. Основні властивості векторного добутку векторів:

- а) $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$,
- б) $[k_1 \vec{a}, k_2 \vec{b}] = k_1 k_2 [\vec{a}, \vec{b}]$,
- в) $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$,
- г) якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні, то $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$. Зокрема, $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$.

3. Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ задані в координатній формі: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Для обчислення векторного добутку векторів зручно користуватися наступною схемою:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

4. Площа паралелограма $S_{\text{парал.}}$, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, дорівнює довжині вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$:

$$S_{\text{парал.}} = |[\vec{a}, \vec{b}]|.$$

5. Площа трикутника $S_{\text{трикут.}}$, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$S_{\text{трикут.}} = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}]|.$$

Приклад 16. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a} = (2, -1, 3)$ та $\vec{b} = (3, 2, -4)$.

Розв'язання

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= ((-1) \cdot (-4) - 3 \cdot 2, 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-4), 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 3) = (4 - 6, 9 + 8, 4 + 3) = (-2, 17, 7).$$

Приклад 17. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a} = 2\vec{m} + 5\vec{n}$ та $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$.

Розв'язання

Використавши властивості векторного добутку векторів отримуємо:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [2\vec{m} + 5\vec{n}, 3\vec{m} - \vec{n}] = [2\vec{m}, 3\vec{m}] + [2\vec{m}, -\vec{n}] + [5\vec{n}, 3\vec{m}] + [5\vec{n}, -\vec{n}].$$

Оскільки $[2\vec{m}, 3\vec{m}] = 0$ та $[5\vec{n}, -\vec{n}] = 0$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -2 \cdot [\vec{m}, \vec{n}] + 15 \cdot [\vec{n}, \vec{m}] = 2 \cdot [\vec{n}, \vec{m}] + 15 \cdot [\vec{n}, \vec{m}] = 17 \cdot [\vec{n}, \vec{m}].$$

Приклад 18. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (-3, 2, 5)$ та $\vec{b} = (1, 3, -2)$.

Розв'язання

Спочатку обчислимо векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-4 - 15, 5 - 6, -9 - 2) = (-19, -1, -11).$$

$$S_{\text{парал.}} = |[\vec{a}, \vec{b}]| = \sqrt{(-19)^2 + (-1)^2 + (-11)^2} = \sqrt{361 + 1 + 121} = \sqrt{483}.$$

Приклад 19. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ та $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, якщо $m = 1$, $n = 2$, $\vec{m} \wedge \vec{n} = \frac{\pi}{6}$.

Розв'язання

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [3\vec{m} + \vec{n}, 2\vec{m} - \vec{n}] = 6[\vec{m}, \vec{m}] - 3[\vec{m}, \vec{n}] + 2[\vec{n}, \vec{m}] - [\vec{n}, \vec{n}].$$

Оскільки $6[\vec{m}, \vec{m}] = 0$ та $[\vec{n}, \vec{n}] = 0$, то $[\vec{a}, \vec{b}] = 3[\vec{n}, \vec{m}] + 2[\vec{n}, \vec{m}] = 5[\vec{n}, \vec{m}]$.

$$S_{\text{трикут.}} = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}]| = \frac{1}{2} |5[\vec{n}, \vec{m}]| = \frac{5}{2} |[\vec{n}, \vec{m}]| = \frac{5}{2} \cdot n \cdot m \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Приклад 20. Знайти площу трикутника ABC , якщо відомі координати його вершин: $A(1, -1, 2)$, $B(-3, 2, -1)$, $C(4, 2, 1)$.

Розв'язання

Можна вважати, що трикутник ABC побудований на векторах $\vec{AB} = (-4, 3, -3)$ і $\vec{AC} = (3, 3, -1)$. Обчислимо векторний добуток цих векторів:

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-3 + 9, -9 - 4, -12 - 9) = (6, -13, -21).$$

Тепер знайдемо площу трикутника ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + (-13)^2 + (-21)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 169 + 441} = \sqrt{646}.$$

4. Мішаний добуток векторів (в $\mathbb{R}^3$)

1. Мішаним добутком векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називається число $\vec{c}$, що позначається $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ і визначається формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

2. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$, визначається формулою:

$$V_{\text{пар.}} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

3. Об'єм піраміди $V_{\text{пир.}}$, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$:

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

4. Умова компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0.$$

Вектори називаються **компланарними**, якщо вони лежать в одній площині.

Приклад 21. Обчислити мішаний добуток векторів $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, 4, -2)$ та $\vec{c} = (-3, 2, 5)$.

Розв'язання

Спочатку обчислимо векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (2 - 12, 3 + 4, 8 + 1) = (-10, 7, 9).$$

Тепер обчислимо мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = ([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (-10) \cdot (-3) + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 5 = 30 + 14 + 45 = 89.$$

Приклад 22. $A(3, -2, 5)$, $B(1, 3, -2)$, $C(0, 1, 1)$ та $D(-4, 0, -3)$ – вершини піраміди $ABCD$. Знайти її об'єм.

Розв'язання

Можна вважати, що піраміда $ABCD$ побудована на векторах $\vec{AB} = (-2, 5, -7)$, $\vec{AD} = (-7, 2, -8)$ і $\vec{AC} = (-3, 3, -4)$. Обчислимо векторний добуток векторів $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$:

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 5 & -7 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = (-20 + 21, 21 - 8, -6 + 15) = (1, 13, 9),$$

а потім мішаний добуток векторів $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ і $\vec{AD}$:

$$\vec{AB}\vec{AC}\vec{AD} = ([\vec{AB}, \vec{AC}], \vec{AD}) = 1 \cdot (-7) + 13 \cdot 2 + 9 \cdot (-8) = -7 + 26 - 72 = -53.$$

Тепер знайдемо об'єм піраміди $ABCD$:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |\vec{AB}\vec{AC}\vec{AD}| = \frac{1}{6} \cdot |-53| = \frac{53}{6} = 8\frac{5}{6}.$$

Приклад 23. Чи лежать точки $A(3, -1, 2)$, $B(-2, 2, 5)$, $C(1, 4, 2)$ та $D(0, 1, -2)$ в одній площині?

Розв'язання

Якщо точки A , B , C і D лежать в одній площині, то вектори $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ та $\vec{AD}$ компланарні. У цьому випадку мішаний добуток векторів має дорівнювати нулю. Обчислимо мішаний добуток векторів $\vec{AB} = (-5, 3, 3)$, $\vec{AC} = (-2, 5, 0)$ та $\vec{AD} = (-3, 2, -4)$:

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 3 & 3 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-15, -6, -19),$$

$$\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = (-15, -6, -19) \cdot (-3, 2, -4) = 45 - 12 + 76 = 109 \neq 0.$$

Таким чином, вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$ не компланарні і, отже, точки A , B , C і D не лежать в одній площині.

ЗАВДАННЯ

1.1. Знайти вектор $k\vec{a}$:

- | | |
|--|--|
| а) $k = 2$, $\vec{a} = (2, -1, 3, 0, 4)$; | г) $k = 0,5$, $\vec{a} = (2, 3, 4, 0, -1)$; |
| б) $k = -3$, $\vec{a} = (-3, 0, 2, -1, 5)$; | д) $k = 2,5$, $\vec{a} = (1,5; 2,3; -0,4; -1,2)$; |
| в) $k = -1,5$, $\vec{a} = (4, 1, 0, -2, 3)$; | е) $k = -1,3$, $\vec{a} = (2,1; -1,2; -0,3; 3,4)$. |

1.2. Знайти вектор $\vec{c} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$:

- а) $k_1 = 2$, $k_2 = -3$, $\vec{a} = (-1, 2, 0, 3, 5)$, $\vec{b} = (2, -1, -2, 4, -3)$;
 б) $k_1 = -1$, $k_2 = 2$, $\vec{a} = (5, -1, 2, -4, 3)$, $\vec{b} = (2, 0, 3, -2, 5)$;
 в) $k_1 = -1,5$, $k_2 = 2,3$, $\vec{a} = (2, 0, -1, -2, 4)$, $\vec{b} = (1, -2, 0, 3, -4)$;
 г) $k_1 = 0,3$, $k_2 = -2,2$, $\vec{a} = (3,1; -1,2; 0; 2,5)$, $\vec{b} = (0,4; -1,2; -0,5; 3,1)$.

1.3. Чи колінеарні вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$?

- а) $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-2, -4, 6)$;
 б) $\vec{a} = (2, 0, -1)$, $\vec{b} = (-4, 0, 2)$;
 в) $\vec{a} = (0, 2, -1, 3)$, $\vec{b} = (0, -6, 3, -9)$;
 г) $\vec{a} = (1, -2, 3, 2)$, $\vec{b} = (4, -8, 12, 8)$.

1.4. За яких значень y та z вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{CD}$ будуть колінеарними?

- а) $A(1, 3, 2)$, $B(2, 1, -1)$, $C(3, 2, -2)$, $D(-1, y, z)$;
 б) $A(2, y, z)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(1, -2, 1)$, $D(0, 2, -1)$;
 в) $A(-1, 2, z)$, $B(1, y, 1)$, $C(0, 2, 3)$, $D(5, -2, 1)$;
 г) $A(4, 3, 1)$, $B(0, 0, 2)$, $C(3, y, 2)$, $D(-1, 2, z)$.

1.5. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$. Знайти координати його четвертої вершини:

- а) $A(2, -1, 3)$, $B(0, 2, 5)$, $C(3, 1, 2)$;

б) $B(-1, -2, 1), C(4, 1, -2), D(5, 4, 2);$

в) $A(3, 1, 1), C(2, 3, -4), D(-1, 1, 5);$

г) $A(4, 2, 0), B(3, 0, -4), D(2, -2, 1).$

1.6. Знайти координати середин сторін трикутника ABC :

а) $A(2, 1, 1), B(0, 3, 5), C(4, -1, 3);$

б) $A(1, 2, 3), B(7, 4, -1), C(3, -8, 5).$

1.7. На відрізку AB знайти точку C , що ділить відрізок AB у відношенні $\frac{AC}{CB} = \lambda$:

а) $A(2, -1, 0), B(5, 2, 3), \lambda = \frac{1}{2};$ б) $A(1, 2, -3), B(6, 7, 2), \lambda = \frac{3}{2}.$

1.8. Показати, що вектори $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$ лінійно незалежні:

а) $\vec{a} = (1, 0, 0), \vec{b} = (0, 1, 0), \vec{c} = (0, 0, 1);$

б) $\vec{a} = (1, 0, 0), \vec{b} = (1, 1, 0), \vec{c} = (1, 1, 1);$

в) $\vec{a} = (1, 0, -1, 0), \vec{b} = (0, 1, 0, 2), \vec{c} = (1, 2, 3, 4);$

г) $\vec{a} = (2, -2, 1, -1), \vec{b} = (1, 0, 2, 0), \vec{c} = (0, 2, -2, 0).$

1.9. Обчислити скалярні добутки векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = (2, -5, 4), \vec{b} = (3, 1, 5);$

б) $\vec{a} = (0, 2, -3), \vec{b} = (-1, 2, -2);$

в) $\vec{a} = (-1, 2, 1, 0), \vec{b} = (2, 3, -1, 4);$

г) $\vec{a} = (3, -1, 4, 3), \vec{b} = (-1, 3, -3, 2);$

д) $\vec{a} = (2, 0, -1, 3, 5), \vec{b} = (1, 5, 4, 2, 3);$

е) $\vec{a} = (1, 2, 0, 3, -1), \vec{b} = (0, 2, 1, -2, 3).$

1.10. Обчислити скалярні добутки векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}, \vec{b} = 3\vec{m} - 2\vec{n}, m = 1, n = 2, \vec{m} \wedge \vec{n} = \frac{\pi}{3};$

$$\text{б) } \vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}, \vec{b} = \vec{m} - \vec{n}, m = \sqrt{2}, n = 1, \vec{m} \wedge \vec{n} = \frac{\pi}{4};$$

$$\text{в) } \vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}, \vec{b} = 5\vec{m} + 3\vec{n}, m = 2, n = \sqrt{3}, \vec{m} \wedge \vec{n} = \frac{\pi}{6};$$

$$\text{г) } \vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}, \vec{b} = \vec{m} + \vec{n}, m = 1, n = 3, \vec{m} \wedge \vec{n} = \frac{2\pi}{3}.$$

1.11. Чи є серед векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ та $\vec{a}_4$ ортогональні?

$$\text{а) } \vec{a}_1 = (2, -1, 3, 0), \vec{a}_2 = (-1, 1, -1, -2), \vec{a}_3 = (1, -1, -1, 3), \vec{a}_4 = (2, 1, 1, 0);$$

$$\text{б) } \vec{a}_1 = (2, 2, 1, 0), \vec{a}_2 = (1, -1, 2, 1), \vec{a}_3 = (0, 1, -1, 1), \vec{a}_4 = (2, -1, -2, 3);$$

$$\text{в) } \vec{a}_1 = (2, 2, 1, 0, 3, -1), \vec{a}_2 = (-1, 0, 2, 1, -1, 2), \vec{a}_3 = (2, 3, 1, 2, 2, -4), \\ \vec{a}_4 = (3, 2, -1, 1, 0, 2).$$

1.12. Знайти довжини векторів:

$$\text{а) } \vec{a} = (-4, 2, -2, 1);$$

$$\text{б) } \vec{a} = (4, 3, -3, 1);$$

$$\text{в) } \vec{a} = (3, -1, 1, -1, 2);$$

$$\text{г) } \vec{a} = (-1, 1, 2, -3, 3, -6);$$

$$\text{д) } \vec{a} = (-1, 3, -1, -3, 0, 3, 5).$$

1.13. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\text{а) } \vec{a} = (0, 1, -1, 0, 1, 1), \vec{b} = (1, 3, 1, 1, 2, 0);$$

$$\text{б) } \vec{a} = (3, 2, 1, 1, 1, 0), \vec{b} = (2, 1, -1, 1, 0, -1).$$

1.14. Знайти довжини сторін і кут A трикутника ABC :

$$\text{а) } A(3, 1, 2), B(5, -1, 3), C(3, 0, 3);$$

$$\text{б) } A(-1, 2, -2), B(1, 2, 0), C(-1, 1, -1);$$

$$\text{в) } A(2, 2, -1), B(2, 5, -1), C(6, 2, -1);$$

$$\text{г) } A(0, 1, 2), B(2, -1, 3), C(0, 2, 1).$$

1.15. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точок A та B :

$$\text{а) } A(1, -2, 1), B(2, 1, 5);$$

$$\text{б) } A(3, -1, 4), B(1, 3, -2).$$

1.16. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\text{а) } \vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (-2, 1, 4);$$

$$\text{б) } \vec{a} = (2, -3, 1), \vec{b} = (0, 2, -3);$$

$$\text{в) } \vec{a} = (1, -1, 2), \vec{b} = (-3, 3, -6);$$

$$\text{г) } \vec{a} = (2, 0, -3), \vec{b} = (-4, 0, 6).$$

1.17. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

- а) $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$; б) $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 5\vec{n}$;
в) $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$; г) $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n}$.

1.18. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

- а) $\vec{a} = (1, 2, -4)$, $\vec{b} = (3, 0, 1)$; б) $\vec{a} = (1, -3, 1)$, $\vec{b} = (2, -1, 3)$;
в) $\vec{a} = (2, -3, 5)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$; г) $\vec{a} = (3, -1, 5)$, $\vec{b} = (2, -1, 3)$.

1.19. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

- а) $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, $m = 1$, $n = 1$ $\vec{m} \wedge \vec{n} = \frac{\pi}{6}$;
б) $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$, $m = 1$, $n = 2$, $\vec{m} \wedge \vec{n} = \frac{\pi}{4}$;
в) $\vec{a} = 5\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $m = 2$, $n = 1$, $\vec{m} \wedge \vec{n} = \frac{\pi}{3}$;
г) $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, $m = 3$, $n = 2$, $\vec{m} \wedge \vec{n} = \frac{\pi}{6}$.

1.20. Знайти площу трикутника ABC , якщо координати його вершин:

- а) $A(3, 4, -1)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(2, 0, -5)$;
б) $A(-1, 2, 3)$, $B(2, 1, 5)$, $C(-7, 3, 4)$;
в) $A(-1, 0, -1)$, $B(0, 2, -3)$, $C(4, 4, 1)$;
г) $A(-3, 5, -4)$, $B(2, 0, 3)$, $C(3, 4, -1)$.

1.21. Знайти об'єм піраміди, якщо координати її вершин:

- а) $A(3, -1, 2)$, $B(2, 2, 0)$, $C(-2, 3, 4)$, $D(1, 1, 8)$;
б) $A(4, 5, 2)$, $B(3, 0, 1)$, $C(-1, 4, 2)$, $D(5, 7, 8)$;
в) $A(1, 3, 5)$, $B(0, 2, 0)$, $C(5, 7, 9)$, $D(0, 4, 6)$;
г) $A(3, 1, -2)$, $B(-4, 0, 3)$, $C(1, 5, -1)$, $D(1, -1, 1)$.

1.22. Чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

- а) $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (3, 4, 2)$, $\vec{c} = (1, 2, 3)$;

б) $\vec{a} = (4, -2, 6)$, $\vec{b} = (1, 4, 2)$, $\vec{c} = (1, 4, 2)$;

в) $\vec{a} = (1, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, $\vec{c} = (4, 1, 2)$;

г) $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 3, 1)$, $\vec{c} = (3, 1, -1)$.

1.23. При якому значенні x вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ будуть компланарними:

а) $\vec{a} = (x, 1, 2)$, $\vec{b} = (2, -5, 4)$, $\vec{c} = (3, 2, -3)$;

б) $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (3, x, 0)$, $\vec{c} = (1, -1, 2)$;

в) $\vec{a} = (0, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, $\vec{c} = (2, x, 3)$.

1.24. Чи лежать точки A , B , C та D в одній площині?

а) $A(1, 1, 2)$, $B(3, -2, 4)$, $C(-5, 2, 4)$, $D(3, 3, -1)$;

б) $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$, $D(2, 0, 1)$;

в) $A(2, 7, -3)$, $B(1, 0, 3)$, $C(-3, -4, 5)$, $D(-2, 3, -4)$.

1.25. При якому значенні α точки A , B , C та D лежать в одній площині?

а) $A(\alpha, 1, -2)$, $B(-3, 4, 1)$, $C(1, 5, 2)$, $D(2, 2, -5)$;

б) $A(-1, 1, 2)$, $B(1, \alpha, -1)$, $C(0, 3, 1)$, $D(2, 4, -2)$;

в) $A(2, 1, 3)$, $B(5, 3, 2)$, $C(6, 0, \alpha)$, $D(3, -2, 0)$;

г) $A(-1, 2, 3)$, $B(3, 1, 2)$, $C(1, 5, -2)$, $D(2, \alpha, 0)$.

II. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

1. Аналітична геометрія на площині

1. Рівняння лінії.

1) $y = f(x)$ – рівняння лінії у явному вигляді (формі).

2) $g(x, y) = 0$ – рівняння лінії у неявному вигляді (формі).

3) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ – рівняння лінії у параметричному вигляді (формі).

4) Координати точок перетину ліній $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ знаходяться з рівнянь $f_1(x) = f_2(x)$ і $y = f_1(x)$.

5) Координати точок перетину ліній $g_1(x, y) = 0$ і $g_2(x, y) = 0$ знаходяться як розв'язання системи рівнянь
$$\begin{cases} g_1(x, y) = 0, \\ g_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Якщо ця система рівнянь не має дійсних розв'язків – лінії не перетинаються.

2. Пряма.

1) $ax + by + c = 0$ – загальне рівняння прямої.

2) Рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$:

а) $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$, якщо $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$;

б) $x = x_1$, якщо $x_1 = x_2$;

с) $y = y_1$, якщо $y_1 = y_2$.

3) $y = kx + b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k ($k = \operatorname{tg} \varphi$, де φ – кут нахилу прямої до осі Ox).

4) $y - y_0 = k_0(x - x_0)$ – рівняння прямої, що проходить через дану точку $A(x_0, y_0)$ в даному напрямку $k_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$.

5) $y - y_0 = k(x - x_0)$ – рівняння пучка прямих з центром в точці $A(x_0, y_0)$, k – будь-яке.

6) $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \rho = 0$ – нормальне рівняння прямої (ρ – відстань від початку координат до прямої, α – кут, утворений перпендикуляром, опущеним з початку координат на пряму, і додатним напрямом осі Ox).

7) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – рівняння прямої у відрізках на осях ($|a|$ і $|b|$ – довжини відрізків, що відсікаються прямою на осях Ox і Oy відповідно).

8) $|x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - \rho| = d(A)$ – відстань точки $A(x_0, y_0)$ від прямої $x \cos \alpha + y \sin \alpha - \rho = 0$.

9) $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = d(A)$ – відстань точки $A(x_0, y_0)$ від прямої $ax + by + c = 0$.

10) Тангенс кута θ між прямими $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ визначається рівністю: $\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

11) $k_1 = k_2$ – умова паралельності прямих $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$.

12) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ – умова паралельності прямих $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ та $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

13) $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ – умова перпендикулярності прямих $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$.

14) $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ – умова перпендикулярності прямих $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ та $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

15) $ax + by + c \geq 0$, $ax + by + c \leq 0$ – півплощини, породжені прямою $ax + by + c = 0$ (півплощини, на які пряма $ax + by + c = 0$ ділить (розбиває) координатну площину xOy).

3. Криві другого порядку.

1) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ – рівняння кола радіуса r із центром у точці $C(a, b)$.

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – канонічне рівняння еліпса (a і b – півосі еліпса).

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – канонічне рівняння гіперболи (a і b – півосі гіперболи).

4) $y = \pm \frac{b}{a}x$ – асимптоти гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

5) $y^2 = 2px$ – канонічне рівняння параболи, вісь якої збігається з віссю Ox (p – параметр параболи).

6) $x^2 = 2py$ – канонічне рівняння параболи, вісь якої збігається з віссю Oy .

Приклад 1. Написати рівняння прямої, що проходить через точки A та B :

а) $A(1, -1), B(-1, 2)$, б) $A(2, 2), B(2, -3)$, в) $A(2, 3), B(-1, 3)$.

Розв'язання

а) Так як $x_1 = 1 \neq x_2 = -1$ та $y_1 = -1 \neq y_2 = 2$ то рівняння шуканої прямої:

$$\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y+1}{2+1} \Rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{3} \Rightarrow 3(x-1) = -2(y+1) \Rightarrow 3x + 2y - 1 = 0.$$

б) Тут $x_1 = x_2 = 2$. Отже, рівняння прямої: $x - 2 = 0$.

в) Тут $y_1 = y_2 = 3$. Значить, $y - 3 = 0$ – рівняння шуканої прямої.

Приклад 2. Знайти точку перетину прямих $3x - y - 1 = 0$ і $x + 3y - 7 = 0$.

Розв'язання

Для знаходження координат точки перетину даних прямих необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - y - 1 = 0, \\ x + 3y - 7 = 0; \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 1, \\ x + 3y - 7 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 1, \\ x + 3(3x - 1) - 7 = 0; \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 1, \\ 10x - 10 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 1. \end{cases} \quad \text{Точка перетину прямих } A(1, 2). \end{aligned}$$

Приклад 3. Чи є серед прямих: $3x - 5y + 2 = 0$, $5x - 3y + 1 = 0$,

$3x + 5y - 1 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, $2x + y + 3 = 0$, $2x + 4y - 5 = 0$ паралельні або перпендикулярні?

Розв'язання

Знайдемо кутові коефіцієнти даних прямих:

$$k_1 = \frac{3}{5}, k_2 = \frac{5}{3}, k_3 = -\frac{3}{5}, k_4 = -\frac{1}{2}, k_5 = -2, k_6 = -\frac{1}{2}.$$

Оскільки $k_4 = k_6 = -\frac{1}{2}$, то прямі $x + 2y - 3 = 0$ і $2x + 4y - 5 = 0$ паралельні. Зважаючи на те, що $k_2 = \frac{-1}{k_3} = \frac{5}{3}$, робимо висновок, що прямі: $5x - 3y + 1 = 0$ і $3x + 5y - 1 = 0$ – перпендикулярні.

Приклад 4. Знайти кут між прямими $x - 2y - 4 = 0$ та $3x - y + 5 = 0$.

Розв'язання

Знайдемо тангенс кута θ між цими прямими, взявши до уваги, що $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = 3$:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1. \quad \text{Отже, } \theta = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 5. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2, -3)$ паралельно до прямої $3x + 4y - 5 = 0$.

Розв'язання

Кутовий коефіцієнт заданої прямої: $k = -\frac{3}{4}$. З умови паралельності прямих випливає, що кутовий коефіцієнт шуканої прямої $k_0 = -\frac{3}{4}$. Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дану точку в даному напрямку, взявши до уваги, що $x_0 = 2$, $y_0 = -3$, $k_0 = -\frac{3}{4}$, отримуємо:

$$y + 3 = -\frac{3}{4}(x - 2) \Rightarrow 4(y + 3) = -3(x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y + 12 = -3x + 6 \Rightarrow 3x + 4y + 6 = 0.$$

Рівняння шуканої прямої: $3x + 4y + 6 = 0$.

Приклад 6. $A(3, -1)$, $B(2, 1)$, $C(0, -4)$ – вершини трикутника ABC . Написати рівняння висоти BD .

Розв'язання

Висота BD перпендикулярна до сторони AC , тому $k_{BD} = \frac{-1}{k_{AC}}$

(k_{BD} та k_{AC} – кутові коефіцієнти прямих BD та AC відповідно). Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки, напишемо рівняння сторони AC :

$$\frac{x-3}{0-3} = \frac{y+1}{-4+1} \Rightarrow \frac{x-3}{-3} = \frac{y+1}{-3} \Rightarrow x-3 = y+1 \Rightarrow y = x-4.$$

Отже, $k_{AC} = 1$ і $k_{BD} = \frac{-1}{k_{AC}} = -1$.

Для написання рівняння висоти BD скористаємось рівнянням прямої, що проходить через дану точку в даному напрямку, взявши до уваги, що $x_0 = 2, y_0 = 1, k_0 = -1$:

$$y-1 = -1(x-2) \Rightarrow x+y-3=0.$$

Отже, рівняння висоти BD : $x+y-3=0$.

Приклад 7. Знайти відстань точки $A(2, 1)$ від прямої $3x+4y-15=0$.

Розв'язання

Використавши формулу $d(A) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ для знаходження відстані

$d(A)$ від точки $A(x_0, y_0)$ до прямої $ax+by+c=0$ отримуємо:

$$d(A) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 15|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1.$$

Приклад 8. Знайти відстань від точки $A(-4, -2)$ до прямої, що проходить через точки $B(-2, -6)$ і $C(1, -2)$.

Розв'язання

Напишемо рівняння прямої, що проходить через точки B та C :

$$\frac{x+2}{1+2} = \frac{y+6}{-2+6} \Rightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y+6}{4} \Rightarrow 4x+8=3y+18 \Rightarrow 4x-3y-10=0.$$

Тепер знайдемо відстань від точки A до цієї прямої:

$$d(A) = \frac{|4 \cdot (-4) - 3 \cdot (-2) - 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-16 + 6 - 10|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|-20|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4.$$

Приклад 9. Побудувати півплощину $2x + 3y - 6 \leq 0$.

Розв'язання

Пряма $2x + 3y - 6 = 0$ перетинає осі координат у точках $A(3, 0)$ та $B(0, 2)$ $\left(\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ y & 2 & 0 \end{array}\right)$. Побудуємо цю пряму (рис. 1). Пряма розбила координатну площину xOy на дві півплощини. Для того щоб визначити, точки якої з отриманих півплощин задовольняють умову $2x + 3y - 6 \leq 0$, візьмемо «пробну» точку $O(0, 0)$ (можна брати будь-яку точку, що не лежить на прямій. Найзручніше брати початок координат $O(0, 0)$). Підставляючи координати «пробної» точки $(0, 0)$ в ліву частину нерівності, отримуємо: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$.

Отже, початок координат $(0, 0)$ належить заданій півплощині. Значить, півплощиною

$$2x + 3y - 6 \leq 0$$

є нижня півплощина (на рис. 1 півплощина позначена штрихуванням).

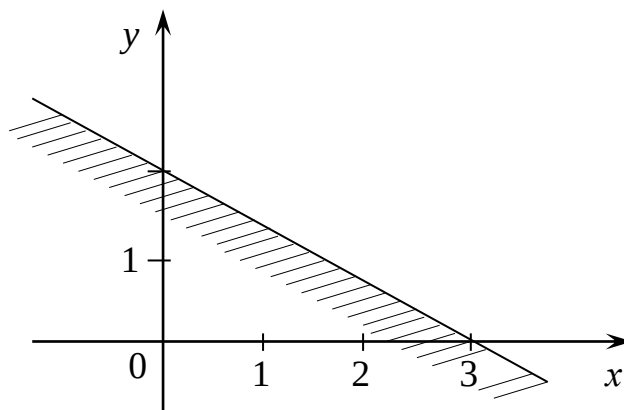


Рис. 1

Приклад 10. Побудувати

множину точок, координати яких задовольняють умови:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 \geq 0, \\ 5x + 4y - 20 \leq 0, \\ 2x - y + 2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Оскільки кожна нерівність визначає півплощину, то множина точок, координати яких задовольняють одночасно всі нерівності, є перетином цих півплощин. Будуємо прямі (1): $2x + 3y - 6 = 0$, (2): $5x + 4y - 20 = 0$ та (3): $2x - y + 2 = 0$ і стрілкою вказуємо, яка саме півплощина визначається відповідною нерівністю.

Перетин півплощин на рис. 2 позначено штрихуванням.

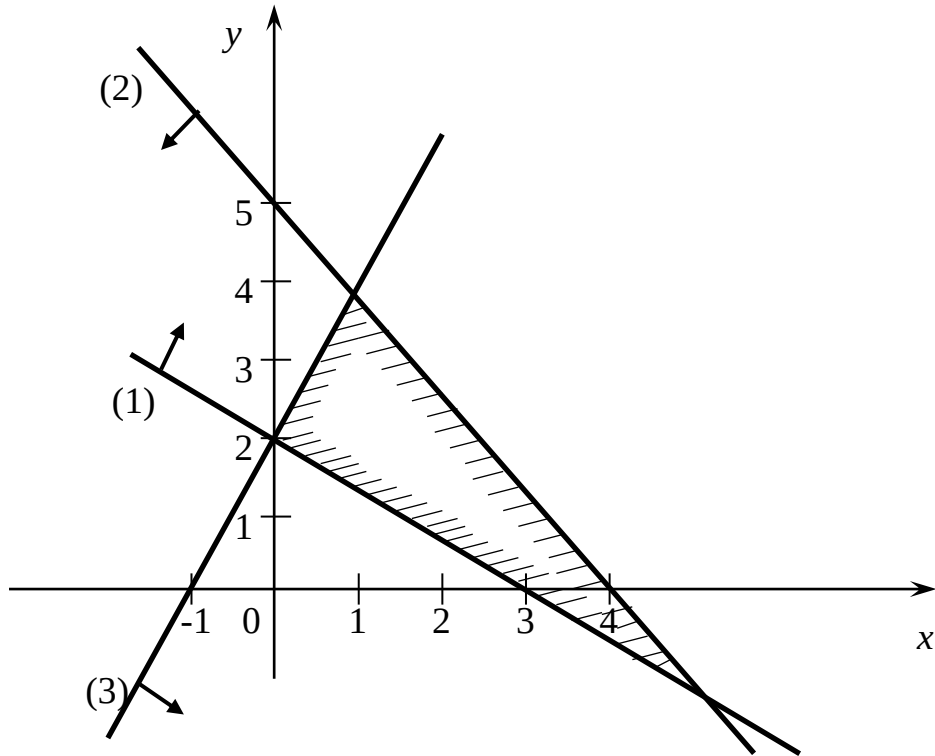


Рис. 2

Приклад 11. Написати рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB , якщо $A(-1, 1)$, $B(5, -7)$.

Розв'язання

Нехай точка $C(x, y)$ – центр кола. Оскільки AB є діаметром кола, то точка C (центр кола) ділить відрізок AB навпіл. Тому координати точки $C(x, y)$ будуть такими: $x = \frac{-1+5}{2} = 2$, $y = \frac{1-7}{2} = -3$, тобто $C(2, -3)$. Відрізок AC є радіусом шуканого кола. Тому

$$r = AC = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Отже, рівняння шуканого кола:

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25.$$

ЗАВДАННЯ

2.1. Написати рівняння прямої, що проходить через точки A та B :

- а) $A(1, -1)$, $B(2, -2)$; б) $A(3, 0)$, $B(0, 3)$; в) $A(-1, 2)$, $B(-3, -4)$;
г) $A(5, -1)$, $B(-2, 4)$; д) $A(1, 3)$, $B(1, 5)$; е) $A(2, -4)$, $B(5, -4)$.

2.2. Знайти координати точок перетину прямих:

- а) $3x - 2y - 6 = 0$, $x - 5y + 11 = 0$; б) $2x + 3y - 8 = 0$, $4x - y - 2 = 0$;
в) $3x - 2y - 1 = 0$, $x + 3y - 4 = 0$; г) $x + 2y + 3 = 0$, $3x + 4y - 12 = 0$.

2.3. Знайти координати вершин трикутника ABC , якщо рівняння його сторін:

- а) $AB: x + 2y - 5 = 0$, $BC: 2x + y - 4 = 0$, $AC: 8x + 7y - 4 = 0$;
б) $AB: 3x - y - 3 = 0$, $BC: x - y - 1 = 0$, $AC: x + y - 5 = 0$;
в) $AB: 3x + 4y - 11 = 0$, $BC: x + 7y + 2 = 0$, $AC: 5x + y + 10 = 0$;
г) $AB: 2x - 3y + 5 = 0$, $BC: x + y - 10 = 0$, $AC: 2x + 7y - 25 = 0$.

2.4. Чи є серед даних прямих паралельні або перпендикулярні?

- а) $2x + 3y - 1 = 0$, $2x - 3y + 1 = 0$, $3x + 2y + 4 = 0$, $4x + 6y + 5 = 0$;
б) $3x + 4y + 5 = 0$, $4x + 3y - 2 = 0$, $4x - 3y + 2 = 0$, $x + 0,75y + 1 = 0$;
в) $x - 2y + 3 = 0$, $3x + 6y - 7 = 0$, $3x - 6y + 5 = 0$, $2x + y - 1 = 0$;
г) $2x - y + 5 = 0$, $x - 0,5y + 2 = 0$, $2x + 4y - 5 = 0$, $4x - 2y - 3 = 0$.

2.5. Побудувати прямі:

- а) $2x + 3y - 6 = 0$; б) $3x - 2y - 6 = 0$; в) $x - 2y + 5 = 0$;
г) $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 1$; д) $2x + 4 = 0$; е) $3y + 4 = 0$.

2.6. Знайти кут між прямими:

- а) $2x - y + 3 = 0$, $2x + y - 3 = 0$; б) $2x - y - 5 = 0$, $y = \frac{1}{3}x$;
в) $x - 3y - 6 = 0$, $4x + 3y - 24 = 0$; г) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 2 = 0$, $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} + 1 = 0$.

2.7. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(x_0, y_0)$ паралельно до даної прямої:

- а) $A(1, -2)$, $2x + 3y - 2 = 0$; б) $A(5, 1)$, $4x - 5y + 3 = 0$;

в) $A(-2, 3), \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + 1 = 0;$

г) $A(4, -2), \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{4} - 2 = 0.$

2.8. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(x_0, y_0)$ перпендикулярно до даної прямої:

а) $A(2, 1), \quad x + 2y - 1 = 0;$

б) $A(3, -5), \quad 3x - y + 2 = 0;$

в) $A(-1, 1), \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + 4 = 0;$

г) $A(-2, -1), \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{2} - 1 = 0.$

2.9. Написати рівняння прямих, що проходять через точку перетину прямих (1) та (2) паралельно та перпендикулярно до прямої (3):

а) (1): $2x + y - 3 = 0,$ (2): $x - 2y + 1 = 0,$ (3): $x + y + 5 = 0;$

б) (1): $x - y + 2 = 0,$ (2): $x + 3y - 2 = 0,$ (3): $2x + y - 1 = 0;$

в) (1): $3x + 4y + 1 = 0,$ (2): $x - 3y - 4 = 0,$ (3): $2x + 3y - 5 = 0;$

г) (1): $2x - y - 4 = 0,$ (2): $x - y - 3 = 0,$ (3): $3x - 4y + 2 = 0.$

2.10. У трикутнику ABC відомі координати вершин A, B, C . Написати рівняння висоти AD , опущеної з вершини A на сторону BC :

а) $A(3, -5), B(-2, 1), C(4, 3);$

б) $A(-2, -1), B(-1, 2), C(1, 4);$

в) $A(2, 3), B(6, -4), C(-2, 1);$

г) $A(-1, 5), B(5, 4), C(3, -2).$

2.11. Використавши дані задачі 2.10., написати рівняння медіани AE трикутника ABC .

2.12. Написати рівняння дотичної до кола $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 8$ у точці $A(3, -2)$.

2.13. Знайти відстань від точки A до заданої прямої:

а) $A(1, -2); \quad 3x + 4y - 15 = 0;$

б) $A(4, -3); \quad 4x - 3y + 25 = 0;$

в) $A(-2, 1); \quad 2x + 5y - 1 = 0;$

г) $A(2, 3); \quad 8x - 6y + 10 = 0;$

д) $A(-3, 2); \quad x - 2y + 7 = 0;$

е) $A(-1, 2); \quad 9x + 12y - 35 = 0.$

2.14. Знайти відстань від точки C до прямої, що проходить через точки A і B :

а) $A(1, 5), B(-3, 2), C(-1, -3);$

б) $A(-2, 1), B(4, 9), C(1, -2);$

в) $A(3, -2), B(0, 2), C(-5, 1);$

г) $A(2, 2), B(-2, -2), C(-5, 4).$

2.15. Знайти довжини висот паралелограма $ABCD$, якщо відомі рівняння його сторін:

а) $AB: 3x + 4y - 11 = 0$, $BC: 4x + 3y - 10 = 0$,

$CD: 3x + 4y + 14 = 0$, $AD: 8x + 6y - 25 = 0$;

б) $AB: 8x - 6y + 2 = 0$, $BC: 3x + 4y - 18 = 0$,

$CD: 4x - 3y + 11 = 0$, $AD: 6x + 8y - 6 = 0$.

2.16. Побудувати множину точок, координати яких задовольняють умову:

а) $2x - 5y + 10 \geq 0$; б) $3x - 2y + 12 \geq 0$; в) $3x + 4y - 12 \leq 0$;

г) $2x - 3y - 6 \leq 0$; д) $2x + 3y \geq 0$; е) $5x - 2y \leq 0$.

2.17. Побудувати множину точок, координати яких задовольняють умови:

а) $\begin{cases} 2x - y + 4 \geq 0, \\ 3x + 2y - 6 \leq 0; \end{cases}$	б) $\begin{cases} x - 2y + 4 \leq 0, \\ 2x - 3y - 6 \geq 0; \end{cases}$	в) $\begin{cases} x + 3y + 6 \geq 0, \\ 3x - y - 3 \leq 0; \end{cases}$
г) $\begin{cases} -5x + 3y - 15 \geq 0, \\ 3x + 5y - 15 \geq 0, \\ y \leq 6; \end{cases}$	д) $\begin{cases} x - 2y + 4 \leq 0, \\ 2x + y - 4 \geq 0, \\ x - y - 4 \leq 0; \end{cases}$	е) $\begin{cases} x + y - 3 \leq 0, \\ 3x + 2y - 6 \geq 0, \\ 2x - y - 4 \leq 0; \end{cases}$
ж) $\begin{cases} x - 2y + 4 \geq 0, \\ x + y - 4 \leq 0, \\ 4x + 3y - 24 \leq 0, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0; \end{cases}$	з) $\begin{cases} x - 2y + 4 \geq 0, \\ x + y - 5 \leq 0, \\ x - y - 3 \leq 0, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0; \end{cases}$	и) $\begin{cases} x - y + 3 \geq 0, \\ x - 4y + 20 \geq 0, \\ 5x - 4y - 20 \geq 0, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \end{cases}$

2. Аналітична геометрія у просторі

1. Рівняння поверхні та лінії.

1) $z = f(x, y)$ – рівняння поверхні в явному виді (формі).

2) $g(x, y, z) = 0$ – рівняння поверхні в неявному виді (формі).

3) $\begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ – рівняння лінії, яка утворена перетином поверхонь

$$g_1(x, y, z) = 0 \text{ і } g_2(x, y, z) = 0.$$

4) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ – параметричні рівняння лінії.

2. Площина.

1) $ax + by + cz + d = 0$ – загальне рівняння площини, $\vec{n} = (a, b, c)$ – вектор нормалі до площини.

2) $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ – рівняння площини, що проходить через точку $A(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = (a, b, c)$ – вектор нормалі.

3) Кутом між площинами $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ та

$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ називається кут φ , утворений векторами нормалей $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ та $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ до цих площин:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{n_1 \cdot n_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

4) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ – умова паралельності площин $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ та $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

5) $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$ – умова перпендикулярності площин

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ та $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Ця умова може бути записана у більш компактному вигляді: $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$, де $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$ – вектори нормалей до відповідних площин.

6) Відстань від точки $A(x_0, y_0, z_0)$ до площини $ax + by + cz + d = 0$:

$$d(A) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Приклад 12. Чи є серед площин (1): $x + 2y - 3z + 4 = 0$,
(2): $2x - 3y + z - 5 = 0$, (3): $2x + 4y - 6z + 1 = 0$, (4): $x + y + z - 3 = 0$
паралельні або перпендикулярні?

Розв'язання

Легко бачити, що умови паралельності виконуються лише для (1) та (3) площин: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6}$. Отже, площини (1) та (3) – паралельні.

Перевіримо наявність перпендикулярних площин. Взявши до уваги, що $\vec{n}_1 = (1, 2, -3)$, $\vec{n}_2 = (2, -3, 1)$, $\vec{n}_3 = (2, 4, -6)$, $\vec{n}_4 = (1, 1, 1)$ і

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + (-3) \cdot 1 = 2 - 6 - 3 = -7 \neq 0,$$

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_3) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot (-6) = 2 + 8 + 18 = 28 \neq 0,$$

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_4) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = 1 + 2 - 3 = 0,$$

$$(\vec{n}_2, \vec{n}_3) = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot (-6) = 4 - 12 - 6 = -14 \neq 0,$$

$$(\vec{n}_2, \vec{n}_4) = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2 - 3 + 1 = 0,$$

$$(\vec{n}_3, \vec{n}_4) = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + (-6) \cdot 1 = 2 + 4 - 6 = 0,$$

робимо висновок, що перпендикулярними будуть площини: (1) та (4); (2) та (4); (3) та (4).

Приклад 13. Знайти кут між площинами $x + 2y - 2z + 5 = 0$ та $x + y - 9 = 0$.

Розв'язання

Оскільки $\vec{n}_1 = (1, 2, -2)$, $\vec{n}_2 = (1, 1, 0)$,

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 1 + 2 = 3, \quad n_1 = \sqrt{1 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3, \quad n_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \text{ то}$$

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{n_1 \cdot n_2} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, кут між площинами $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

Приклад 14. Написати рівняння площини, яка проходить через точку $A(-1, 3, 5)$ паралельно до площини $3x + 2y - z - 5 = 0$.

Розв'язання

Вектор нормалі заданої площини $\vec{n} = (3, 2, -1)$, очевидно, буде вектором нормалі і шуканої площини. Тому, використовуючи рівняння площини, що проходить через цю точку, отримуємо:

$$3(x + 1) + 2(y - 3) - 1(z - 5) = 0 \Rightarrow 3x + 3 + 2y - 6 - z + 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 2y - z + 2 = 0 - \text{рівняння шуканої площини.}$$

Приклад 15. Написати рівняння площини, що проходить через точки $A(2, -1, 3)$, $B(4, 1, -2)$ та $C(0, 4, 1)$.

Розв'язання

Розглянемо вектори $\vec{AB} = (4 - 2, 1 - (-1), -2 - 3) = (2, 2, -5)$ та $\vec{AC} = (0 - 2, 4 - (-1), 1 - 3) = (-2, 5, -2)$. Очевидно, ці вектори лежать у потрібній площині. Оскільки вектор $[\vec{AB}, \vec{AC}]$ перпендикулярний векторам $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$, він перпендикулярний і до шуканої площини, отже, є вектором нормалі цієї площини, тобто.

$$\begin{aligned} \vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] &= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= (-4 + 25, 10 + 4, 10 + 4) = (21, 14, 14). \end{aligned}$$

Тепер скористаємось рівнянням площини, що проходить через дану точку (оскільки кожна з точок A , B та C належить шуканій площині, то для написання рівняння можна брати будь-яку з них. Візьмемо, наприклад, точку A):

$$21(x - 2) + 14(y + 1) + 14(z - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(x - 2) + 2(y + 1) + 2(z - 3) = 0 \Rightarrow 3x - 6 + 2y + 2 + 2z - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 2y + 2z - 10 = 0 - \text{рівняння шуканої площини.}$$

Приклад 16. Знайти відстань від точки $A(1, 3, -4)$ до площини $x + 2y - 2z - 21 = 0$.

Розв'язання

Використовуючи формулу відстані від точки до площини, отримуємо:

$$d(A) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot (-4) - 21|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 + 6 + 8 - 21|}{\sqrt{9}} = \frac{|-6|}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

3. Пряма.

1) $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \end{cases}$ – загальні рівняння прямої.

2) $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ – канонічні рівняння прямої, $\vec{s} = (l, m, n)$ – напрямний вектор прямої, $A(x_0, y_0, z_0)$ – точка, через яку проходить пряма.

3) $\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \\ z = nt + z_0, \end{cases}$ – параметричні рівняння прямої, $\vec{s} = (l, m, n)$ – напрямний

вектор прямої, $A(x_0, y_0, z_0)$ – точка, через яку проходить пряма.

4) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$.

5) Кут між двома прямими називається кут φ , утворений напрямними векторами $\vec{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ та $\vec{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ цих прямих:

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{s_1 \cdot s_2} = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

6) $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ – умова паралельності двох прямих, напрямними векторами яких є вектори $\vec{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ та $\vec{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$.

7) $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ – умова перпендикулярності двох прямих, напрямні вектори яких $\vec{s}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ та $\vec{s}_2 = (l_2, m_2, n_2)$.

8) $\vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{A_1A_2} = 0$ – умова перетину прямих ($\vec{s}_1$ та $\vec{s}_2$ – напрямні вектори цих прямих, A_1 та A_2 – будь-які точки, що лежать відповідно на першій та другій прямих).

Приклад 17. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2, -1, 4)$ паралельно вектору $\vec{s} = (3, 2, -5)$.

Розв'язання

Використавши канонічні рівняння прямої, отримуємо

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-5}.$$

Приклад 18. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-3, 1, 2)$ паралельно до прямої:

$$\text{а) } \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{-3}; \quad \text{б) } \begin{cases} x = 3t + 2, \\ y = 4t - 1, \\ z = -t + 3; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0, \\ 3x - y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

а) Напрямний вектор заданої прямої $\vec{s} = (2, 5, -3)$, очевидно, є напрямним вектором шуканої прямої. Тому: $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-2}{-3}$.

б) Напрямний вектор заданої прямої $\vec{s} = (3, 4, -1)$. Отже, рівняння шуканої прямої $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$.

в) Напрямним вектором прямої буде вектор $\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, де $\vec{n}_1 = (1, 2, -1)$ та $\vec{n}_2 = (3, -1, 2)$ – вектори нормалей до площин $x + 2y - z + 4 = 0$ та

$3x - y + 2z - 7 = 0$ відповідно, що утворює задану пряму. Маємо:

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4 - 1, -3 - 2, -1 - 6) = (3, -5, -7).$$

Тому, рівняння шуканої прямої такі: $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-2}{-7}$.

Приклад 19. Написати рівняння прямої, що проходить через точки $A(2, 3, -5)$ та $B(-3, 1, 4)$.

Розв'язання

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через дві точки, отримуємо: $\frac{x-2}{-3-2} = \frac{y-3}{1-3} = \frac{z+5}{4+5} \Rightarrow \frac{x-2}{-5} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{9}$.

Приклад 20. Написати канонічні рівняння прямої

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - 3y + 4z + 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо напрямний вектор даної прямої

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (8 - 9, -6 - 4, -3 - 4) = (-1, -10, -7).$$

Щоб написати канонічні рівняння прямої, необхідно ще знайти якусь точку на цій прямій. Як таку точку $A(x_0, y_0, z_0)$ візьмемо, наприклад ту, у якої $z_0 = 0$, тобто $A(x_0, y_0, 0)$. Тоді її координати x_0 та y_0 зобов'язані задовольняти рівняння:

$$\begin{cases} x_0 + 2y_0 - 5 = 0, \\ 2x_0 - 3y_0 + 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 5 - 2y_0, \\ 2x_0 - 3y_0 + 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 5 - 2y_0, \\ 2(5 - 2y_0) - 3y_0 + 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 5 - 2y_0, \\ 10 - 4y_0 - 3y_0 + 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 5 - 2y_0, \\ -7y_0 = -14. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1, \\ y_0 = 2. \end{cases}$$

Отже, точка $A(1, 2, 0)$ належить заданій прямій. Тепер напишемо канонічні рівняння цієї прямої:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-10} = \frac{z}{-7} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{10} = \frac{z}{7}.$$

Приклад 21. Написати параметричні рівняння прямої

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-1}{4}.$$

Розв'язання

Позначивши кожне із співвідношень через t , отримуємо:

$$\begin{cases} \frac{x+3}{2} = t, \\ \frac{y+5}{3} = t, \\ \frac{z-1}{4} = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3 = 2t, \\ y+5 = 3t, \\ z-1 = 4t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t - 3, \\ y = 3t - 5, \\ z = 4t + 1. \end{cases}$$

Приклад 22. Знайти кут між прямими: а) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-4}{2}$ та

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-5}{3}; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - y + z - 5 = 0, \\ 3x + 2y - z + 4 = 0, \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0, \\ 2x - y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання

а) Оскільки $\vec{s}_1 = (1, -2, 2)$ та $\vec{s}_2 = (4, 0, 3)$, то

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{16+9}} = \frac{4+6}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}, \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{2}{3}.$$

б) Спочатку знайдемо напрямні вектори заданих прямих:

$$\vec{s}_1 = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1 - 2, 3 + 2, 4 + 3) = (-1, 5, 7).$$

$$\vec{s}_2 = [\vec{n}_3, \vec{n}_4] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-2 + 3, 6 + 1, -1 - 4) = (1, 7, -5).$$

Тепер знайдемо косинус кута між заданими прямими:

$$\cos \varphi = \frac{-1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 - 7 \cdot 5}{\sqrt{1 + 25 + 49} \cdot \sqrt{1 + 49 + 25}} = \frac{-1 + 35 - 35}{\sqrt{75} \cdot \sqrt{75}} = \frac{-1}{75} = 0,0133.$$

Отже, $\varphi = \arccos(-0,0133) = \pi - \arccos 0,0133$.

Приклад 23. Чи є серед прямих $\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{3}$,

$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{-1}$ та $\frac{x+4}{-2} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-2}{1}$ такі, що перетинаються?

Розв'язання

Перевіримо, чи перетинаються перша та друга прямі. Оскільки

$$\vec{s}_1 = (1, -2, 3), \vec{s}_2 = (2, 1, -1), A_1(-2, -3, 1), A_2(1, -2, 2), \text{ то: } \overrightarrow{A_1A_2} = (3, 1, 1),$$

$$[\vec{s}_1, \vec{s}_2] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 7, 5) \text{ та } \vec{s}_1 \vec{s}_2 \overrightarrow{A_1A_2} = -3 + 7 + 5 = 9 \neq 0.$$

Отже, перша та друга прямі не перетинаються.

Перевіримо, чи перетинаються перша та третя прямі. В даному випадку

$$\vec{s}_1 = (1, -2, 3), \vec{s}_3 = (-2, -1, 1), A_1(-2, -3, 1), A_3(-4, -4, 2), \text{ то } \overrightarrow{A_1A_3} = (-2, -1, 1),$$

$$[\vec{s}_1, \vec{s}_3] = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1, -7, -5), \vec{s}_1 \vec{s}_3 \overrightarrow{A_1A_3} = -2 + 7 - 5 = 0.$$

Отже, перша та третя прямі перетинаються.

Друга та третя прямі не перетинаються, оскільки вони паралельні (їх напрямні вектори $\vec{s}_2 = (2, 1, -1)$ та $\vec{s}_3 = (-2, -1, 1)$ колінеарні: $\vec{s}_2 = -\vec{s}_3$).

4. Пряма та площина.

1) Кутом між прямою $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ та площиною

$ax + by + cz + d = 0$ називається кут φ , утворений напрямним вектором прямої $\vec{s} = (l, m, n)$ та його проекцією на площину:

$$\sin \varphi = \frac{a \cdot l + b \cdot m + c \cdot n}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

2) $\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$ – умова перпендикулярності прямої та площини.

3) $a \cdot l + b \cdot m + c \cdot n = 0$ – умова паралельності прямої та площини.

Приклад 24. Знайти точку перетину прямої та площини:

а) $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -t + 2, \end{cases}$ та $2x + 3y - 4z - 5 = 0$;

б) $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{1}$ та $x - 2y + 3z - 2 = 0$.

Розв'язання

а) Для знаходження точки перетину прямої та площини необхідно розв'язати систему рівнянь, складену з рівнянь прямої та площини:

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -t + 2, \\ 2x + 3y - 4z - 5 = 0. \end{cases}$$

Отримана система розв'язується дуже легко. Підставляємо у рівняння площини рівняння прямої, отримуємо:

$$2(2t + 1) + 3(3t - 2) - 4(-t + 2) - 5 = 0, \Rightarrow 17t - 17 = 0, \Rightarrow t = 1.$$

Отже, координати точки перетину такі: $x = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $y = 3 \cdot 1 - 2 = 1$, $z = -1 + 2 = 1$, тобто точкою перетину даної прямої та площини буде точка $A(3, 1, 1)$.

б) Спочатку перейдемо від канонічних до параметричних рівнянь прямої:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{1} = t, \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{3} = t, \\ \frac{y+1}{2} = t, \\ \frac{z-3}{1} = t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 2t - 1, \\ z = t + 3. \end{cases}$$

Далі аналогічно до завдання а):

$$(3t + 1) - 2(2t - 1) + 3(t + 3) - 2 = 0, \Rightarrow 2t + 10 = 0, \Rightarrow t = -5.$$

Отже, координати точки перетину такі: $x = 3 \cdot (-5) + 1 = -14$, $y = 2 \cdot (-5) - 1 = -11$, $z = -5 + 3 = -2$, тобто $A(-14, -11, -2)$ – точка перетину прямої та площини.

Приклад 25. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(-3, 5, 2)$ на площину $2x + 6y - z + 3 = 0$.

Розв'язання

Оскільки пряма має бути перпендикулярна до площини, то вектор нормалі площини $\vec{n} = (2, 6, -1)$ буде і напрямним вектором цієї прямої. Тому

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-2}{-1} \text{ – канонічні рівняння шуканої прямої.}$$

Приклад 26. Знайти проєкцію точки $A(1, -1, 6)$ на площину $x + 2y - 3z - 9 = 0$.

Розв'язання

Проєкцією точки на площину є точка перетину перпендикуляра, опущеного з точки на задану площину. Рівняння перпендикуляра (див. приклад 25): $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-6}{-3}$. Тепер знайдемо точку перетину цього перпендикуляра із заданою площиною (див. приклад 24б). Переходимо до параметричних рівнянь перпендикуляра:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-6}{-3} = t, \Rightarrow \begin{cases} x = t + 1, \\ y = 2t - 1, \\ z = -3t + 6, \end{cases}$$

і знаходимо координати точки перетину перпендикуляра із заданою площиною, тобто координати проєкції точки A на площину:

$$(t + 1) + 2(2t - 1) - 3(-3t + 6) - 9 = 0, \Rightarrow 14t - 28 = 0, \Rightarrow t = 2.$$

$$x = 2 + 1 = 3, \quad y = 2 \cdot 2 - 1 = 3, \quad z = -3 \cdot 2 + 6 = 0.$$

Отже, проєкцією точки A на задану площину буде точка $(3, 3, 0)$.

Приклад 27. Знайти проєкцію точки $A(3, -2, -2)$ на пряму

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{3}.$$

Розв'язання

Нескладно побачити, що проєкцією точки A на пряму буде точка перетину цієї прямої з площиною, яка проходить через точку перпендикулярно до заданої прямої. Напишемо рівняння цієї площини:

$$2(x-3) - 1(y+2) + 3(z+2) = 0, \Rightarrow 2x - y + 3z - 2 = 0.$$

Тепер знайдемо точку перетину цієї площини із заданою прямою:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 2 = 0, \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-4}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z - 2 = 0, \\ x = 2t + 1, \\ y = -t - 2, \\ z = 3t + 4, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(2t+1) - (-t-2) + 3(3t+4) - 2 = 0, \Rightarrow 14t + 14 = 0, \Rightarrow t = -1.$$

Отже, $x = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$, $y = -(-1) - 2 = -1$, $z = 3 \cdot (-1) + 4 = 1$, тобто проєкцією точки A на задану пряму буде точка $B(-1, -1, 1)$.

Приклад 28. Знайти кут між прямою $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{-2}$ та площиною $x - y - 4z + 5 = 0$.

Розв'язання

Напрямний вектор прямої $\vec{s} = (2, 1, -2)$, вектор нормалі до площини $\vec{n} = (1, -1, -4)$. Тому

$$\sin \varphi = \frac{1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-4)}{\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+1+16}} = \frac{2-1+8}{3\sqrt{18}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, кут між прямою та площиною $\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$.

ЗАВДАННЯ

2.18. Написати рівняння площини, що проходить через точку A перпендикулярно до вектора $\vec{n}$:

а) $A(2, -1, 4)$, $\vec{n} = (1, 3, -2)$;

б) $A(0, 2, -3)$, $\vec{n} = (3, -2, 1)$;

в) $A(-1, 2, 5)$, $\vec{n} = (2, 0, -1)$;

г) $A(0, 5, 0)$, $\vec{n} = (-1, 1, 2)$.

2.19. Чи є серед площин паралельні або перпендикулярні?

а) $x + y + z - 3 = 0$, $x - 2y + z - 5 = 0$, $x + y + 2z - 1 = 0$,

$2x - 4y + 2z + 3 = 0$;

б) $x + 2y - 3z + 5 = 0$, $2x + 4y + 6z - 3 = 0$, $-3x - 6y + 9z + 1 = 0$,

$x + y + z - 2 = 0$;

в) $2x - y + z - 3 = 0$, $2x + y - 3z + 7 = 0$, $4x + 2y - 6z - 1 = 0$,

$x + 3y + z + 2 = 0$;

г) $x - 3y + 2z - 1 = 0$, $2x - 6y + 4z + 1 = 0$, $x + y + z - 3 = 0$,

$x - y - 2z + 5 = 0$.

2.20. Написати рівняння площини, що проходить через дану точку паралельно даній площині:

а) $A(2, 3, -4)$, $3x - y + z - 1 = 0$;

б) $A(-1, 5, -3)$, $x - 2y + 3z + 5 = 0$;

в) $A(3, -2, 6)$, $2x + z - 4 = 0$;

г) $A(1, -1, -5)$, $3x + 5 = 0$.

2.21. Знайти кут між площинами:

а) $x + 2y + 2z - 3 = 0$, $2x - y + 2z + 5 = 0$;

б) $2x + y - \sqrt{5}z - 7 = 0$, $x + 3y - 2 = 0$;

в) $x + 20y + 7z - 12 = 0$; $x - 4y - 8z + 12 = 0$;

г) $4x - 8y + z - 1 = 0$, $6x + 2y - z + 4 = 0$.

2.22. Знайти відстань від точки до площини:

а) $A(1, 2, -2)$, $2x - 2y + z - 9 = 0$;

б) $A(2, -1, 3)$, $3x - 4y + 5 = 0$;

в) $A(1, 3, -1)$, $11x + 2y - 10z - 15 = 0$;

г) $A(3, 4, -2)$, $4x + 3 = 0$.

2.23. Написати рівняння площини, що проходить через точки A , B та C :

а) $A(1, 3, -2)$, $B(3, -1, 4)$, $C(0, 2, -5)$;

б) $A(3, 5, -1)$, $B(2, -4, 3)$, $C(1, 1, 1)$;

в) $A(3, 1, -4)$, $B(-2, -4, 1)$, $C(1, 5, 0)$;

г) $A(0, 1, -1)$, $B(1, -1, 2)$, $C(3, 1, 0)$.

2.24. Написати канонічні та параметричні рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно вектору $\vec{s}$:

а) $A(3, -1, 2)$, $\vec{s} = (1, 2, 5)$;

б) $A(0, 2, -4)$, $\vec{s} = (3, -1, 2)$;

в) $A(3, 8, -6)$, $\vec{s} = (1, 0, 0)$;

г) $A(1, -3, 5)$, $\vec{s} = (0, 2, 3)$.

2.25. Написати рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до заданої прямої:

а) $A(5, -1, 6)$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$;

б) $A(3, 0, 4)$, $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+4}{2}$;

в) $A(0, 2, -5)$, $\begin{cases} 3x + 2y - z - 1 = 0, \\ -x + 3y + 2z - 3 = 0; \end{cases}$

г) $A(4, 2, -1)$, $\begin{cases} 2x - 3y + z - 5 = 0, \\ x + 2y - 3z + 7 = 0; \end{cases}$

д) $A(1, -3, 2)$, $\begin{cases} x = t + 1, \\ y = 2t - 3, \\ z = 4t + 2; \end{cases}$

е) $A(4, 2, -3)$, $\begin{cases} x = -2t + 5, \\ y = t + 4, \\ z = 3t + 1. \end{cases}$

2.26. Написати рівняння прямої, що проходить через точки A та B :

а) $A(2, -5, 6)$, $B(3, 4, -1)$;

б) $A(-1, 5, 8)$, $B(2, -6, 7)$;

в) $A(1, 2, -4)$, $B(3, 5, -4)$;

г) $A(3, 0, 1)$, $B(3, 0, 2)$.

2.27. Написати канонічні рівняння прямої:

а) $\begin{cases} 2x - y + 3z - 8 = 0, \\ -x + y + 2z + 1 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 3y - z + 4 = 0, \\ 2x - y - z + 1 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x - 6y + z - 1 = 0, \\ x - 2y + 5 = 0. \end{cases}$

2.28. Написати параметричні рівняння прямої:

а) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{3}$;

б) $\frac{x}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+5}{2}$;

в) $\frac{x+3}{-2} = \frac{y-4}{7} = \frac{z-5}{0}$;

$$\text{г)} \begin{cases} 2x + y + z - 5 = 0, \\ x - 2y + 3z + 4 = 0; \end{cases} \quad \text{д)} \begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0, \\ x + y - 2z + 3 = 0; \end{cases} \quad \text{е)} \begin{cases} x - y + 3z - 6 = 0, \\ 2x + y - z + 3 = 0. \end{cases}$$

2.29. Знайти кут між прямими:

$$\text{а)} \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+3}{-1} \quad \text{та} \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-5}{11};$$

$$\text{б)} \frac{x-5}{0} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-4} \quad \text{та} \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z+2}{2};$$

$$\text{в)} \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{-1} \quad \text{та} \quad \begin{cases} 2x + y - z - 10 = 0, \\ x - 2y + z - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\text{г)} \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - 3y + z - 5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{д)} \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -2t + 3, \\ z = -t - 1, \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x = -t, \\ y = 2t + 5, \\ z = 2t - 3. \end{cases}$$

2.30. Чи перетинаються прямі?

$$\text{а)} \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-1} \quad \text{та} \quad \frac{x+2}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{3};$$

$$\text{б)} \frac{x-3}{0} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-10}{2} \quad \text{та} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+14}{3};$$

$$\text{в)} \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t - 1, \\ z = t + 3, \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x = -t + 4, \\ y = 3t - 1, \\ z = 2t; \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} x = -3t + 2, \\ y = t - 1, \\ z = 5, \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x = -3t, \\ y = t + 3, \\ z = -t - 1. \end{cases}$$

2.31. Знайти точку перетину прямої та площини:

$$\text{а)} \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t - 3, \\ z = -t + 2, \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x = -t + 3, \\ y = 3t - 2, \\ z = 1, \end{cases} \\ 2x - y + z - 1 = 0; \quad x + 2y - 3z - 1 = 0;$$

$$\text{в)} \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{2}, \quad \text{г)} \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+5}{1}, \\ x - 3y + 2z - 3 = 0; \quad 3x + 4y + z - 3 = 0;$$

$$\text{д)} \begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ x - y + z - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{е)} \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0, \\ x - y + 2z - 5 = 0, \end{cases}$$

$$2x - y + z - 2 = 0;$$

$$2x + y - z - 1 = 0.$$

2.32. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з точки A на задану площину:

а) $A(3, 2, 4), \quad x - y + 2z - 5 = 0;$

б) $A(0, 2, 5), \quad 3x + y + 2z - 5 = 0;$

в) $A(2, -1, 6), \quad 2x + y + 4 = 0;$

г) $A(-1, 1, 1), \quad y - z - 2 = 0.$

2.33. Знайти проєкцію точки A на пряму:

а) $A(1, 2, -1), \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{2};$

б) $A(2, -1, 0), \quad \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2};$

в) $A(1, -1, 2), \quad \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t - 3, \\ z = -t + 2; \end{cases}$

г) $A(2, -2, 4), \quad \begin{cases} x = t - 1, \\ y = 2t + 3, \\ z = 3t - 2. \end{cases}$

2.34. Знайти кут між прямою та площиною:

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{0},$

б) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+4}{1},$

$$x + 2y - z + 4 = 0;$$

$$4x + 3z - 2 = 0;$$

в) $\begin{cases} x = t + 2, \\ y = 2t - 3, \\ z = -2t + 1, \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = 2, \\ z = 4t + 3, \end{cases}$

$$2x - y + 2z - 3 = 0;$$

$$x + 2y - 2z + 5 = 0.$$

III. МАТРИЧНА АЛГЕБРА

1. Матриці та дії над ними

1. Матриці.

Довільну систему m чисел, записаних у вигляді прямокутної таблиці, що містить рядків m і n стовпців, називають **матрицею** розмірності (розміру) m на n . Числа, з яких складено матрицю, називаються її елементами. Матриці зазвичай позначаються великими літерами $A, B, C, \dots$, а їхні елементи – малими: $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \dots$. Перший індекс елемента матриці вказує номер рядка, де знаходиться даний елемент, другий індекс – номер стовпця. Так, елемент a_{ij} розташований на перетині i -го рядка і j -го стовпця матриці A . Матриця A розмірності m на n записується так:

$$A = A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Такий запис матриці A називається розгорнутим.

Скорочені форми запису:

$$A = (a_{ij}); \quad A = [a_{ij}]; \quad A_{mn} = (a_{ij})_{mn}; \quad A_{mn} = [a_{ij}]_{mn}.$$

Якщо у матриці A_{mn} число рядків не дорівнює числу стовпців, тобто $m \neq n$, то матрицю A називають **прямокутною**; якщо ж $m = n$, то **квадратною** матрицею n -го порядку.

Матриця, що складається з одного рядка (стовпця) називається **матрицею-рядком** (**матрицею-стовпцем**) або **вектор-рядком** (**вектор-стовпцем**).

Якщо всі елементи матриці A дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$ для всіх $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, то матриця називається **нульовою**.

Елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратної матриці n -го порядку називаються **діагональними**, а вся їхня сукупність – **головною діагоналлю** або просто **діагоналлю** матриці A .

Якщо у квадратної матриці A всі недіагональні елементи дорівнюють нулю, тобто $a_{ij} = 0$ для всіх $i \neq j$, то матриця називається **діагональною**.

Якщо у діагональній матриці $a_{ii} = 1$ для всіх $i = \overline{1, n}$, то матриця називається **одиначною** матрицею порядку n . Одиначні матриці позначають

буквою E (або E_n). Так, $E = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця третього порядку.

Якщо всі елементи квадратної матриці, розташовані вище (нижче) діагоналі, дорівнюють нулю, то матриця називається **трикутною** або **нижньотрикутною** (**верхньотрикутною**).

Так, матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ є трикутними, причому:

A – нижньотрикутна, B – верхньотрикутна.

Якщо у матриці A поміняти місцями рядки і стовпці, то отримана матриця називається **транспонованою** матрицею (відносно матриці A) і позначається одним із наступних символів: A^T , A^* , A' .

Наприклад: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^T = A^* = A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Дії над матрицями.

1) Матриці A і B називають **рівними** і пишуть $A = B$, якщо:

а) ці матриці однієї розмірності: $A = A_{mn}$, $B = B_{mn}$;

б) $a_{ij} = b_{ij}$ для всіх $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

2) Для матриць однакової розмірності визначена операція (дія) **додавання**: $A = A_{mn} = (a_{ij})_{mn}$, $B = B_{mn} = (b_{ij})_{mn}$;

$$A + B = A_{mn} + B_{mn} = (a_{ij} + b_{ij})_{mn}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Різниця матриць $A = A_{mn}$ та $B = B_{mn}$ визначається так:

$$A - B = A_{mn} - B_{mn} = (a_{ij} - b_{ij})_{mn}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

3. **Добутком** матриці A **на число** α або числа α на матрицю A називають матрицю, що позначається αA , елементи якої знаходяться множенням всіх елементів матриці A на число α :

$$A \cdot \alpha = \alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij}), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

4. Якщо число стовпців матриці $A = A_{mk}$ дорівнює кількості рядків матриці $B = B_{kn}$, то тоді (і тільки тоді!) визначається **добуток матриці A_{mk} на матрицю B_{kn}** :

$$A_{mk} \cdot B_{kn} = C_{mn} = (c_{ij})_{mn}.$$

Елемент c_{ij} матриці $C = AB$ обчислюється як скалярний добуток i -го рядка матриці A на j -й стовпець матриці B :

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ik} \cdot b_{kj} = \sum_{s=1}^k a_{is} \cdot b_{sj}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Якщо A і B – квадратні матриці одного порядку, то в цьому випадку мають сенс добутки AB і BA . Необхідно пам'ятати, що у загальному випадку $AB \neq BA$. Якщо ж $AB = BA$, то такі квадратні матриці називають **перестановочними** чи **коммутативними**.

Матриці A та E одного порядку – комутативні, причому $AE = EA = A$.

Якщо матриці A та B одного порядку і $A \cdot B = E$, то матриця називається **оберненою матрицею** матриці A і позначається A^{-1} . Мають місце рівності:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E; \quad (A^{-1})^{-1} = A.$$

5. Для операцій (дій) додавання та множення матриць справедливі такі властивості:

$$(A_{mn} + B_{mn}) + C_{mn} = A_{mn} + (B_{mn} + C_{mn}) = A_{mn} + B_{mn} + C_{mn},$$

$$(A_{mk} \cdot B_{ks}) \cdot C_{sn} = A_{mk} \cdot (B_{ks} \cdot C_{sn}) = A_{mk} \cdot B_{ks} \cdot C_{sn},$$

$$(A_{mk} + B_{mk}) \cdot C_{kn} = A_{mk} \cdot C_{kn} + B_{mk} \cdot C_{kn},$$

$$A_{mk} \cdot (B_{kn} + C_{kn}) = A_{mk} \cdot B_{kn} + A_{mk} \cdot C_{kn}.$$

6. Якщо A – квадратна матриця n -го порядку, $X \neq 0$ – n -вимірний вектор-стовпець (матриця-стовпець), λ – деяке число і $AX = \lambda X$, то X називається **власним вектором**, а λ – **власним значенням** (числом) матриці A .

3. Технологічна матриця.

Припустимо, що деяке підприємство з t видів ресурсів (сировини) виготовляє n видів продукції. Позначимо через a_{ij} норму витрати i -го виду ресурсу виробництва одиниці j -го виду продукції і розглянемо матрицю $A = (a_{ij})$, що називається **технологічною матрицею**.

Кожен рядок цієї матриці описує витрату відповідного ресурсу на виробництво однієї одиниці кожного виду продукції.

Кожен стовпець цієї матриці описує витрати всіх видів ресурсів на виробництво однієї одиниці відповідного виду продукції, тобто j -тий стовпець матриці A описує j -ту технологію переробки ресурсів.

Якщо потрібно виробити x_1 одиниць продукції першого виду, x_2 од. другого, ..., x_n од. n -го виду продукції, то використовуючи технологічну матрицю легко підрахувати витрати всіх видів ресурсів для виконання цього плану. Для цього потрібно записати цей план у вигляді вектора-стовпця

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ та обчислити вектор-стовпець } AX. \text{ Кожна координата цього вектора-}$$

стовпця вказує витрату відповідного виду ресурсу.

Якщо підприємство має b_i одиниць i -го ресурсу ($i = \overline{1, m}$), то для того, щоб план X був здійсненним (допустимим), необхідно, щоб виконувалася наступна

$$\text{нерівність } AX \leq B, \text{ де } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Якщо ця векторна нерівність не виконується, це означає, що план X може бути здійсненним при наявних запасах ресурсів.

Приклад 1. Знайти суму матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1+2 & -2+2 & 0-1 \\ 3+0 & 1+3 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайти матрицю $C = 2A + 3B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

$$C = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 18 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3. Обчислити добуток матриць $A \cdot B \cdot C$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Обчислимо спочатку $A \cdot B$:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тепер обчислимо $A \cdot B \cdot C$:

$$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 + 6 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Підприємство виробляє чотири види продукції, використовуючи три види ресурсів. Відома технологічна матриця

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Які об'єми ресурсів повинно мати в розпорядженні підприємство, щоб бути в змозі виготовити 100 од. продукції першого виду, 210 од. – другого, 130 од. – третього та 90 од. – четвертого?

Розв'язання

Запишемо план випуску продукції у вигляді вектора-стовпця $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 210 \\ 130 \\ 90 \end{pmatrix}$

та обчислимо необхідні обсяги ресурсів:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 210 \\ 130 \\ 90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 + 840 + 130 + 450 \\ 0 + 420 + 390 + 90 \\ 100 + 210 + 260 + 270 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1620 \\ 900 \\ 840 \end{pmatrix}.$$

Для виконання плану X підприємству необхідні: 1620 од. ресурсів першого виду, 900 од. – другого та 840 од. – третього. Отже, для того, щоб план X був здійсненним, підприємство повинне мати у розпорядженні не менш ніж: 1620 од. ресурсів першого виду, 900 од. – другого та 840 од. – третього.

Приклад 5. Використовуючи умови попереднього прикладу, визначити фінансові витрати виконання зазначеного плану, якщо вартість однієї одиниці ресурсів першого виду – 20 грош. од., другого виду – 40 грош. од., третього – 50 грош. од.

Розв'язання

Легко бачити, що витрати на виконання плану можуть бути знайдені як добуток $C \cdot A \cdot X$, де $C = (20 \ 40 \ 50)$. Тому,

$$\begin{aligned} C \cdot A \cdot X &= C \cdot (A \cdot X) = (20 \ 40 \ 50) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 210 \\ 130 \\ 90 \end{pmatrix} = \\ &= (20 \ 40 \ 50) \cdot \begin{pmatrix} 1620 \\ 900 \\ 840 \end{pmatrix} = 32 \ 400 + 36 \ 000 + 42 \ 000 = 110 \ 400 \text{ (грош. од.)}. \end{aligned}$$

Приклад 6. Перевірити, чи є серед векторів $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ власні вектори матриці } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda_1 X_1,$$

$$AX_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \lambda_2 X_2,$$

$$AX_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \cdot X_3.$$

Власним вектором матриці є лише вектор X_3 (власне число λ , що відповідає даному вектору, дорівнює 4).

ЗАВДАННЯ

3.1. Знайти суму матриць A та B :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 4 \\ 8 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 1+t^2 & -2t \\ 1+t^3 & 3(t^2-t) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2t & 1+t^2 \\ 3(t^2+t) & 1-t^3 \end{pmatrix}$$

3.2. Знайти матрицю $C = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 2, \quad \beta = -3.$$

$$\text{б)} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -2, \quad \beta = 5.$$

$$\text{в)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0,4, \quad \beta = 0,7.$$

$$\text{г)} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 8 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -12 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & -9 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 0,3, \quad \beta = 0,8.$$

3.3. Обчислити добуток AB і там, де це можливо, BA :

$$\text{а)} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{д)} \quad A = (2 \quad -3 \quad 1 \quad 4), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{е)} \quad A = (1 \quad 3 \quad 2), \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.4. Знайти всі можливі добутки матриць A , B та C :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.5. З'ясувати, які з векторів X_1 , X_2 , X_3 є власними векторами матриці A :

$$\text{а) } X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.6. Підприємство виробляє три види продукції, використовуючи два види ресурсів. Відома технологічна матриця A . Визначити об'єми ресурсів, необхідних для виробництва X_1 од. продукції першого виду, X_2 од. другого та X_3 од. третього.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 12 & 21 & 8 \\ 7 & 13 & 23 \end{pmatrix}; \quad X_1 = 230, \quad X_2 = 180, \quad X_3 = 120;$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 32 & 41 & 18 \\ 23 & 19 & 35 \end{pmatrix}; \quad X_1 = 125, \quad X_2 = 210, \quad X_3 = 160.$$

3.7. Підприємство виробляє чотири види продукції, використовуючи при цьому три види сировини. Відома технологічна матриця A і ціни однієї одиниці сировини кожного виду: y_1 , y_2 , y_3 . Підприємство планує виготовити X_1 од. продукції першого виду, X_2 од. – другого, X_3 од. – третього і X_4 од. – четвертого. Визначити фінансові витрати підприємства на придбання сировини, необхідної для виконання плану.

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 11 & 21 & 7 & 5 \\ 15 & 12 & 20 & 9 \\ 7 & 13 & 10 & 12 \end{pmatrix}; \quad y_1 = 16 \text{ грош. од.}, \quad y_2 = 30 \text{ грош. од.},$$

$$y_3 = 22 \text{ грош. од.}, \quad X_1 = 200 \text{ од.}, \quad X_2 = 100 \text{ од.}, \quad X_3 = 150 \text{ од.}, \quad X_4 = 220 \text{ од.};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 21 & 17 \\ 12 & 14 & 16 & 21 \\ 20 & 15 & 7 & 9 \end{pmatrix}; \quad y_1 = 20 \text{ грош. од.}, \quad y_2 = 25 \text{ грош. од.},$$

$$y_3 = 18 \text{ грош. од.}, \quad X_1 = 250 \text{ од.}, \quad X_2 = 180 \text{ од.}, \quad X_3 = 300 \text{ од.}, \quad X_4 = 50 \text{ од.}$$

2. Визначники та їх властивості

1. Визначники.

Кожній квадратній матриці A у відповідність ставиться деяке число, яке позначається $|A|$ або $\det A$, що називається **визначником** цієї матриці.

$$\text{Визначник матриці другого порядку: } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\text{Визначник матриці третього порядку: } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Визначником матриці n -го порядку (визначником n -го порядку) є число $|A|$, що дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого рядка або стовпця матриці A на відповідні їм алгебраїчні доповнення:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} матриці n -го порядку називається мінор M_{ij} , взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці n -го порядку називається визначник $(n-1)$ -го порядку, що знаходиться із визначника $|A|$ матриці A шляхом викреслювання i -го рядка й j -го стовпця.

2. Основні властивості визначника:

1) якщо у визначника є «нульовий» рядок чи стовпець, то такий визначник дорівнює нулю;

2) величина визначника не змінюється при транспонуванні, тобто визначник транспонованої матриці A^T дорівнює визначнику матриці A :

$$|A^T| = |A|;$$

3) при перестановці місцями будь-яких двох рядків (стовпців) визначник змінює знак;

4) загальний множник елементів будь-якого рядка (стовпця) можна виносити за знак визначника;

5) визначник, що має два однакові або пропорційні рядки (стовпці), дорівнює нулю;

6) якщо один із рядків (стовпців) визначника є лінійною комбінацією інших її рядків (стовпців), то такий визначник дорівнює нулю;

7) величина визначника не зміниться, якщо до всіх елементів якогось рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на будь-яке число;

8) сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

3. Обернена матриця.

Якщо визначник квадратної матриці A відмінний від нуля ($|A| \neq 0$), то у такої матриці існує обернена матриця A^{-1} , яка може бути знайдена таким чином:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A .

Зауваження. Наведену вище формулу, як правило, використовують для знаходження оберненої матриці для матриць 2-го й 3-го порядків. Для матриць більш високих порядків цією формулою не користуються, тому що її застосування стає дуже трудомістким.

4. Розв’язання систем рівнянь за формулами Крамера та за допомогою оберненої матриці.

Розв'язання системи n рівнянь із n невідомими

[illegible]

у разі, коли визначник $|A|$ матриці системи $A = (a_{ij})$ відмінний від нуля ($|A| \neq 0$), може бути отримано:

а) за формулами Крамера: $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n},$

де $\Delta = |A|$, а Δ_j – визначники, що отримуються з визначника $|A|$ заміною j -го

стовпця на стовпець правих частин $A_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$;

б) за допомогою оберненої матриці: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}A_0.$

5. Власні значення матриці.

Якщо A – квадратна матриця, то рівняння $|A - \lambda E| = 0$ називається **характеристичним рівнянням** матриці A , а його корені (розв’язки) λ_i – **власними значеннями матриці A** .

6. Мінори k -го порядку. Ранг матриці.

Мінором k -го порядку матриці A_{mn} називається визначник M_k k -го порядку, складений з елементів цієї матриці, розташованих на перетині довільним чином обраних k рядків і k стовпців.

Рангом матриці називається число, що дорівнює порядку найвищого відмінного від нуля мінору k -го порядку цієї матриці. Для рангу матриці A використовується одне з наступних позначень: r , $r(A)$, $\text{rang } A$.

$$r(A_{mn}) \leq \min(m, n).$$

Якщо ранг матриці дорівнює r , то це означає, що серед мінорів r -го порядку матриці є хоча б один відмінний від нуля, а всі мінори більш високих порядків або не існують, або дорівнюють нулю. При цьому будь-який мінор r -го порядку, якщо він відмінний від нуля, називається **базисним мінором**.

Рядки й стовпці матриці, з елементів яких складається базисний мінор, називаються **базисними рядками** й **базисними стовпцями**. Базисні рядки (стовпці) матриці є лінійно незалежними рядками (стовпцями).

Будь-який рядок (стовпець) матриці може бути представлений у вигляді лінійної комбінації базисних рядків (стовпців) (теорема про базисний мінор).

Приклад 7. Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-1) \cdot 3 = 10 + 3 = 13;$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot (-1) - (-1) \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot (-2) -$$

$$-2 \cdot 2 \cdot 1 = 0 + 18 - 4 - 0 + 24 - 4 = 34;$$

$$\text{в) } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}. \quad \text{Використовуємо властивості визначника та}$$

перетворюємо вихідний визначник так, щоб у другому стовпці всі елементи, крім 1, стали нулями. З цією метою до четвертого рядка додамо другий, попередньо помноживши його на (-2) (величина визначника при цьому не зміниться), і розкладемо визначник за елементами другого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \\
+ 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \\
= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 8 + 0 - 8 + 2 - 0 = -12.$$

Використаний прийом називають обчисленням визначника **методом зниження порядку**.

Цим методом обчислюються визначники, якщо їх порядок $n \geq 4$.

Приклад 8. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Спочатку перевіримо, чи існує для даної матриці обернена:

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - 9 - 2 - 0 = -10 \neq 0.$$

Отже, у цієї матриці існує обернена. Знайдемо її. Шукаємо алгебраїчні доповнення елементів вихідної матриці:

$$\begin{aligned}
A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5; & A_{21} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5; & A_{31} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \\
A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; & A_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4; & A_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; \\
A_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3; & A_{23} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1; & A_{33} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3.
\end{aligned}$$

Тепер запишемо обернену матрицю: $A^{-1} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$

Перевірка: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$

$$= -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, обернену матрицю знайдено правильно.

Приклад 9. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -2, \end{cases}$$

а) за правилом Крамера; б) за допомогою оберненої матриці.

Розв'язання

а) Визначник матриці системи:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

(Цей визначник був обчислений у прикладі 8).

Отже, можна використати формули Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 8 - 12 + 18 - 8 - 0 = -10 \Rightarrow x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10}{-10} = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 0 + 0 - 12 - 4 - 0 = -20 \Rightarrow x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-20}{-10} = 2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 8 + 0 - 0 - 4 - 0 = 10 \Rightarrow x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{10}{-10} = -1.$$

Розв'язок системи рівнянь: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Перевірка. Підставимо знайдений розв'язок в усі рівняння системи:

$$-1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -1 + 4 - 3 = 0,$$

$$0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 6 - 2 = 4,$$

$$1 - 2 - 1 = -2.$$

б) Запишемо систему у матричній формі ($AX = A_0$):

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця $A^{-1} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ є оберненою до матриці

системи $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (див. приклад 8), то $X = A^{-1} \cdot A_0 =$

$$= -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -5 & -5 \\ 2 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 - 5 \cdot 4 - 5 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 0 - 4 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) \\ -3 \cdot 0 + 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$.

Приклад 10. Знайти власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Складемо характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 7.$$

Отже, власні значення матриці -1 та 7 .

ЗАВДАННЯ

3.8. Обчислити визначники:

$$\begin{array}{llll}
 \text{а)} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}; & \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & \sin \alpha \\ \sin \alpha & 1 \end{vmatrix}; & \text{в)} \begin{vmatrix} 125 & 50 \\ 50 & 100 \end{vmatrix}; & \text{г)} \begin{vmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \\
 \\
 \text{д)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; & \text{е)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}; & \text{ж)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & -7 & -1 & 9 \end{vmatrix}; \\
 \\
 \text{з)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}; & \text{і)} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.
 \end{array}$$

3.9. Знайти матрицю, обернену до матриці A :

$$\text{а)} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \text{ б)} A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \text{ в)} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \text{ г)} A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.10. Розв'язати системи рівнянь: а) за правилом Крамера;

б) за допомогою оберненої матриці:

$$\begin{array}{lll}
 \text{а)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 1; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 7; \end{cases} & \text{в)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5; \end{cases} \\
 \\
 \text{г)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -3; \end{cases} & \text{д)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}
 \end{array}$$

3.11. Знайти власні значення матриці A :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

1. Основні поняття.

1) Система m лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими (m та n – будь-які цілі додатні числа), має вигляд:

[illegible]

Така форма запису СЛАР називається *розгорнутою*.

2) *Матрична форма* запису СЛАР:

$$AX = A_0,$$

де A – матриця системи, X – матриця-стовпець (n -вимірний вектор-стовпець),

A_0 – матриця-стовпець (m -вимірний вектор-стовпець) правих частин системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

3) **Розширеною** матрицею системи називається матриця $\bar{A}$, яка отримується з матриці A додаванням стовпця A_0 . При записі $\bar{A}$ стовпець A_0 зазвичай відокремлюють вертикальною рисою:

$$\overline{A} = (A|A_0) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_m \end{array} \right).$$

4) **Векторна форма** запису СЛАР:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = A_0 \quad \text{або коротко} \quad \sum_{j=1}^n A_j x_j = A_0,$$

де A_j ($j = \overline{1, n}$) – m -вимірні вектори-стовпці матриці A :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

5) **Розв'язком СЛАР** називається набір значень невідомих $x_1, x_2, \dots, x_n$ (n -вимірний вектор-стовпець X), який після підстановки його в рівняння системи, перетворює їх (всі) у тотожності.

СЛАР, що має хоча б один розв'язок, називається **сумісною**, у противному випадку – **несумісною**. Сумісну систему, що має тільки один (єдиний) розв'язок, називають **визначеною**, у противному випадку (тобто, якщо розв'язків більше одного) – **невизначеною**.

6) Системи $AX = A_0$ та $BX = B_0$ називаються **еквівалентними**, якщо будь-який розв'язок однієї з них є розв'язком і іншої.

7) Якщо $m = n$ і $|A| \neq 0$, то система $AX = A_0$ є визначеною і її розв'язок може бути отримано:

а) за формулами Крамера: $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = \overline{1, n}$;

б) за допомогою оберненої матриці: $X = A^{-1}A_0$.

8) У загальному випадку ($m < n$, $m = n$, $m > n$) система $AX = A_0$ сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг матриці системи $r = r(A)$ дорівнює рангу розширеної матриці системи $\bar{r} = r(\bar{A})$, тобто $r = \bar{r}$ (теорема Кронекера-Капеллі) і її розв'язок може бути отримано за допомогою метода повного виключення (метод Жордана – Гаусса).

Якщо $r = \bar{r} = n$, то система $AX = A_0$ – визначена; якщо $r = \bar{r} < n$ – невизначена (якщо $r \neq \bar{r}$ – система несумісна).

9) **Базисними невідомими** називаються невідомі, що відповідають базисним стовпцям матриці системи, тобто стовпцям, з елементів яких складений базисний мінор. Інші невідомі називаються вільними.

При розв'язанні СЛАР методом повного виключення базисними невідомими вибирають провідні невідомі.

10) **Загальним розв'язком** $X_{\text{заг}}$ системи $AX = A_0$ називається такий розв'язок, у якому базисні невідомі виражені через вільні.

11) Якщо у загальному розв'язку $X_{\text{заг}}$ вільним невідомим дати які-небудь числові значення, то отриманий розв'язок називається **частинним розв'язком**.

Якщо всім вільним невідомим надати рівні нулю значення, то такий частинний розв'язок називається **базисним розв'язком**.

12) Система рівнянь $AX = 0$, тобто, якщо $A_0 = 0$, називається **однорідною**; якщо $A_0 \neq 0$ – **неоднорідною**. Однорідна система рівнянь завжди сумісна, тому що для такої системи завжди $r = \bar{r}$. Якщо $r = n$, то однорідна система є визначеною і її єдиний розв'язок $X = 0$. Якщо $r < n$, то у однорідній системі є ненульові розв'язки.

2. Метод повного виключення (метод Жордана-Гаусса).

Основою методу повного виключення є еквівалентні (елементарні) перетворення рівнянь (матриць):

1) множення (ділення) обох частин рівнянь (рядків розширеної матриці системи) на будь-яке, не рівне нулю, число;

2) додавання до одного рівняння системи (рядку розширеної матриці) будь-якого іншого її рівняння (рядка), помноженого на будь-яке число.

Кожне з таких перетворень, а також будь-яка їхня послідовність приводять до нової системи (матриці), що еквівалентна вихідній.

Метод складається із скінченного числа однотипних кроків, кожний з яких полягає в наступному: вибирається деяке рівняння системи, що називається провідним рівнянням і деяка невідома, яка називається провідною невідомою. Провідним рівнянням можна вибирати будь-яке рівняння системи, що не було провідним на попередніх кроках, провідною невідомою – будь-яку невідому, що входить в провідне рівняння з коефіцієнтом, відмінним від нуля. Коефіцієнт при провідній невідомій у провідному рівнянні називається провідним коефіцієнтом (елементом). Після цього за допомогою елементарних перетворень провідну невідому виключають із всіх рівнянь системи (крім провідного). Якщо при цьому хоча б одне з рівнянь системи перетвориться в рівняння виду

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = a \quad (a \neq 0),$$

то це означає, що система несумісна (обчислення припиняються).

Якщо ж якісь із рівнянь системи перетворюються в рівняння виду

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0,$$

то такі рівняння видаляють із системи й переходять до наступного кроку.

Системи, отримані після кожного кроку, еквівалентні вихідній.

У випадку сумісної системи, перетворення продовжують доти, поки не отримують систему, еквівалентну вихідній, у якій всі рівняння вже були провідними. Обираємо базисними невідомими провідні невідомі, а вільними – всі інші невідомі. З останньої системи записуємо загальний розв’язок (якщо система невизначена) або єдиний розв’язок (якщо система визначена).

Через те, що всі перетворення, яким піддавалося будь-яке рівняння системи при розв’язанні її методом повного виключення, проводяться тільки над коефіцієнтами цього рівняння і його правою частиною, то це дозволяє проводити всі перетворення (обчислення) не з рівняннями системи, а з рядками розширеної матриці системи. Для контролю обчислень додають до розширеної матриці ще один стовпець Σ – стовпець контрольних сум. У цьому стовпці записуються суми елементів кожного з рядків розширеної матриці.

Всі дані записуються у вигляді таблиці, що зазвичай називають «нульовою»:

A				A_0	Σ
a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}	a_1	$\Sigma_1 = a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} + a_1$
a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}	a_2	$\Sigma_2 = a_{21} + a_{22} + \dots + a_{2n} + a_2$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}	a_m	$\Sigma_m = a_{m1} + a_{m2} + \dots + a_{mn} + a_m$

Слід пам’ятати:

1) на кожному кроці провідний елемент вибирається з елементів таблиці (матриці), розташованих до першої риски;

2) перетворення виконуються над всім рядком (включно з елементами контрольного стовпця Σ);

3) на кожному кроці сума елементів будь-якого рядка, розташованих до подвійної риски, повинна збігатися з відповідним числом контрольного стовпця (числом, що знаходиться за подвійною рисою);

4) якщо в якомусь рядку сума елементів до подвійної риски не збігається із числом, що перебуває за подвійною рисою, то в даному рядку допущена

помилка, яку необхідно виправити, перш ніж переходити до подальших обчислень;

5) якщо в результаті обчислень який-небудь рядок таблиці стане нульовим (тобто складається тільки з нулів), то він викреслюється;

6) якщо в якомусь рядку в нуль перетворюються тільки елементи, розташовані до першої риски, а інші два елементи (елементи стовпців A_0 та Σ) рівні між собою, але відмінні від нуля, то всі обчислення припиняються, тому що це означає, що система несумісна;

7) у випадку сумісної системи процес обчислень закінчується, якщо в останній таблиці вже немає рядків, які не були раніше провідними;

8) при виписуванні відповіді (загального розв'язку) контрольний стовпець не використовується.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 5, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 + 2x_6 = -5, \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

Розв'язуємо систему табличним (матричним) варіантом методу повного виключення.

Складемо початкову (нульову) таблицю:

A						A_0	Σ
1	-1	2	-1	1	-1	6	7
2	-1	1	1	2	1	5	11
-1	2	-1	0	-1	2	-5	-4
1	0	1	0	1	1	3	7

I крок. Провідним елементом першого кроку зручно вибрати елемент -1 , що знаходиться в першому рядку й четвертому стовпці (у таблиці він обведений кружком). Таким чином, провідним рядком 1-го кроку вибирається перший рядок, а провідним стовпцем – четвертий стовпець. Ділимо провідний рядок на провідний елемент, тобто на -1 , і отриманий рядок записуємо в наступну таблицю (першим рядком). До другого рядка додаємо перший

(провідний) і результат також записуємо в наступну таблицю (другим рядком). Третій й четвертий рядки переписуємо в наступну таблицю без змін, тому що елементи цих рядків, що знаходяться в провідному (четвертому) стовпці – нулі. В результаті одержуємо наступну таблицю:

A						A_0	Σ
-1	1	-2	1	-1	1	-6	-7
3	-2	3	0	3	0	11	18
-1	2	-1	0	-1	2	-5	-4
1	0	1	0	1	1	3	7

Перевіряємо правильність обчислень:

$$-1 + 1 - 2 + 1 - 1 + 1 - 6 = -7,$$

$$3 - 2 + 3 + 0 + 3 + 0 + 11 = 18,$$

$$-1 + 2 - 1 + 0 - 1 + 2 - 5 = -4,$$

$$1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 3 = 7.$$

Оскільки суми рядків (до подвійної риски) збігаються з відповідними числами контрольного стовпця (стовпець за подвійною рисою), то переходимо до другого кроку.

II крок. Провідним елементом другого кроку зручно вибрати елемент 1 (у таблиці обведений кружком), що стоїть на перетині четвертого рядка і шостого стовпця (тим самим на другому кроці четвертий рядок і шостий стовець будуть провідними). Будуємо нову таблицю. У нову таблицю без зміни переносимо другий і четвертий рядки попередньої таблиці (оскільки четвертий рядок є провідним з провідним елементом рівним 1, а у провідному стовпці другого рядка стоїть нуль). Інші рядки перетворимо: четвертий (провідний) рядок помножимо на (-1) і додамо до першого, а потім провідний (четвертий) рядок помножимо на (-2) і додамо до третього. Результати записуємо відповідно у першому та третьому рядку в новій таблиці. Отримуємо таку таблицю:

-2	1	-3	1	-2	0	-9	-14
3	-2	3	0	3	0	11	18
-3	2	-3	0	-3	0	-11	-18
1	0	1	0	1	1	3	7

Перевіряємо правильність обчислень:

$$-2 + 1 - 3 + 1 - 2 + 0 - 9 = -14,$$

$$3 - 2 + 3 + 0 + 3 + 0 + 11 = 18,$$

$$-3 + 2 - 3 + 0 - 3 + 0 - 11 = -18,$$

$$1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 3 = 7.$$

Суми рядків (до подвійної риски) збігаються з контрольними числами.

Перш ніж перейти до третього кроку, звернемо увагу на те, що в отриманій таблиці другий і третій рядки пропорційні (це означає, що відповідні рівняння еквівалентні). Тому один із цих рядків, наприклад третій, можна викреслити.

-2	1	-3	1	-2	0	-9	-14
3	-2	3	0	3	0	11	18
1	0	1	0	1	1	3	7

III крок. Оскільки всі рядки, крім другого, вже були провідними, то тепер провідним рядком потрібно вибрати другий. Як провідний елемент виберемо -2 (у таблиці обведений кружком). Таким чином, на третьому кроці провідними будуть: другий рядок та другий стовпець.

Ділимо провідний рядок (другий) на провідний елемент (-2) та записуємо його другим рядком у наступну таблицю. Після цього перетворений провідний рядок множимо на (-1) , додаємо до першого і результат теж записуємо в наступну таблицю (першим рядком). Третій рядок переписуємо без змін, тому що у провідному (другому) стовпці у неї 0 .

Отримуємо:

$-1/2$	0	$-3/2$	1	$-1/2$	0	$-7/2$	-5
$-3/2$	1	$-3/2$	0	$-3/2$	0	$-11/2$	-9
1	0	1	0	1	1	3	7

Перевіряємо:

$$-\frac{1}{2} + 0 - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 0 - \frac{7}{2} = -\frac{10}{2} = -5,$$

$$-\frac{3}{2} + 1 - \frac{3}{2} + 0 - \frac{3}{2} + 0 - \frac{11}{2} = -\frac{18}{2} = -9,$$

$$1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 3 = 7.$$

Суми рядків збігаються із контрольними числами.

Оскільки всі рядки вже були провідними, всі перетворення закінчені.
Остання таблиця відповідає наступній системі рівнянь:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_3 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 = -\frac{7}{2}, \\ -\frac{3}{2}x_1 + x_2 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_5 = -\frac{11}{2}, \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 3, \end{cases}$$

яка еквівалентна вихідній.

Вибираємо базисними невідомими x_2 , x_4 та x_6 (при цьому x_1 , x_3 та x_5 будуть вільними) і виражаємо їх через вільні невідомі.

Із другого рівняння $x_2 = -\frac{11}{2} + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_5$; з першого рівняння $x_4 = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5$; із третього $x_6 = 3 - x_1 - x_3 - x_5$.

Запишемо тепер загальний розв'язок системи:

$$X_{\text{заг}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{11}{2} + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 \\ -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_5 \\ 3 - x_1 - x_3 - x_5 \end{pmatrix}$$

Перевіримо правильність отриманого розв'язку. Перевірку будемо робити спрощено. Візьмемо який-небудь частинний розв'язок (бажано, щоб у цьому розв'язку всі невідомі були відмінні від нуля). Дамо вільним невідомим, наприклад, такі значення: $x_1 = 1$, $x_3 = -1$ та $x_5 = 1$. Тоді:

$$x_2 = -\frac{11}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = -4; \quad x_4 = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -4; \quad x_6 = 3 - 1 + 1 - 1 = 2.$$

Одержали наступний частинний розв'язок, який для зручності запишемо у вигляді вектора-рядка: $X_{\text{част}} = (1, -4, -1, -4, 1, 2)$.

Підставимо знайдений частинний розв'язок в кожне з рівнянь вихідної системи:

$$\begin{cases} 1 - (-4) + 2 \cdot (-1) - (-4) + 1 - 2 = 1 + 4 - 2 + 4 + 1 - 2 = 6, \\ 2 \cdot 1 - (-4) + (-1) + (-4) + 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 4 - 1 - 4 + 2 + 2 = 5, \\ -1 + 2 \cdot (-4) - (-1) - 1 + 2 \cdot 2 = -1 - 8 + 1 - 1 + 4 = -5, \\ 1 - 1 + 1 + 2 = 3. \end{cases}$$

Всі рівняння вихідної системи обернулися в тотожності. Отже, система розв'язана правильно.

Зауваження. Базисний розв'язок $X_{\text{баз}} = \left(0, -\frac{11}{2}, 0, -\frac{7}{2}, 0, 3\right)$

використовувати для перевірки не рекомендується, оскільки наявність у ньому нулів знижує достовірність перевірки.

Наприкінці зауважимо, що при розв'язанні системи рівнянь методом повного виключення результати перетворень зручно записувати так:

1	-1	2	$\textcircled{-1}$	1	-1	6	7
2	-1	1	1	2	1	5	11
-1	2	-1	0	-1	2	-5	-4
1	0	1	0	1	1	3	7
-1	1	-2	1	-1	1	-6	-7
3	-2	3	0	3	0	11	18
-1	2	-1	0	-1	2	-5	-4
1	0	1	0	1	$\textcircled{1}$	3	7
-2	1	-3	1	-2	0	-9	-14
3	$\textcircled{-2}$	3	0	3	0	11	18
~~-3~~	~~2~~	~~-3~~	~~0~~	~~-3~~	~~0~~	~~-11~~	~~-18~~
1	0	1	0	1	1	3	7
-1/2	0	-3/2	$\textcircled{1}$	-1/2	0	-7/2	-5
-3/2	$\textcircled{1}$	-3/2	0	-3/2	0	-11/2	-9
1	0	1	0	1	$\textcircled{1}$	3	7

З останньої таблиці виписуємо загальний розв'язок:

$$X_{\text{заг}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{11}{2} + \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_5 \\ x_3 \\ -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 \\ x_5 \\ 3 - x_1 - x_3 - x_5 \end{pmatrix}$$

Приклад 2. Побудувати множину невід'ємних розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання

Знайдемо загальний розв'язок системи методом повного виключення:

3	2	-1	1	-2	3	6
2	-1	2	①	-1	3	6
1	1	2	-1	1	4	8
1	3	-3	0	①	0	0
2	-1	2	1	-1	3	6
3	0	4	0	0	7	14
-1	-3	3	0	1	0	0
1	-4	5	1	0	3	6
③	0	4	0	0	7	14
0	-3	13/3	0	①	7/3	14/3
0	-4	11/3	①	0	2/3	4/3
①	0	4/3	0	0	7/3	14/3

$$X_{\text{заг}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & - & \frac{4}{3}x_3 \\ & x_2 & \\ & & x_3 \\ \frac{2}{3} & + 4x_2 - & \frac{11}{3}x_3 \\ \frac{7}{3} & + 3x_2 - & \frac{13}{3}x_3 \end{pmatrix}$$

Виконаємо перевірку. Візьмемо частинний розв'язок, у якому $x_2 = x_3 = 1$.
Тоді:

$$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{3}{3} = 1, \quad x_4 = \frac{2}{3} + 4 \cdot 1 - \frac{11}{3} \cdot 1 = \frac{3}{3} = 1, \quad x_5 = \frac{7}{3} + 3 \cdot 1 - \frac{13}{3} \cdot 1 = \frac{3}{3} = 1.$$

Отже, $X_{\text{част}} = (1, 1, 1, 1, 1)$.

Підставляємо цей розв'язок у кожне з рівнянь системи, отримуємо:

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 + 1 - 2 \cdot 1 = 3 + 2 - 1 + 1 - 2 = 3, \\ 2 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 1 + 1 - 1 = 2 - 1 + 2 + 1 - 1 = 3, \\ 1 + 1 + 2 \cdot 1 - 1 + 1 = 1 + 1 + 2 - 1 + 1 = 4. \end{cases}$$

Таким чином, загальний розв'язок знайдено правильно.

Тепер побудуємо множину невід'ємних розв'язків, тобто розв'язків, що задовольняють умову $X_{\text{заг}} \geq 0$:

$$X_{\text{заг}} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & - & \frac{4}{3}x_3 \\ & x_2 & \\ & & x_3 \\ \frac{2}{3} & + 4x_2 - & \frac{11}{3}x_3 \\ \frac{7}{3} & + 3x_2 - & \frac{13}{3}x_3 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{7}{3} & - & \frac{4}{3}x_3 \geq 0, \\ & x_2 & \geq 0, \\ & & x_3 \geq 0, \\ \frac{2}{3} & + 4x_2 - & \frac{11}{3}x_3 \geq 0, \\ \frac{7}{3} & + 3x_2 - & \frac{13}{3}x_3 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7 - 4x_3 \geq 0, \\ x_2 \geq 0, \\ x_3 \geq 0, \\ 2 + 12x_2 - 11x_3 \geq 0, \\ 7 + 9x_2 - 13x_3 \geq 0. \end{cases}$$

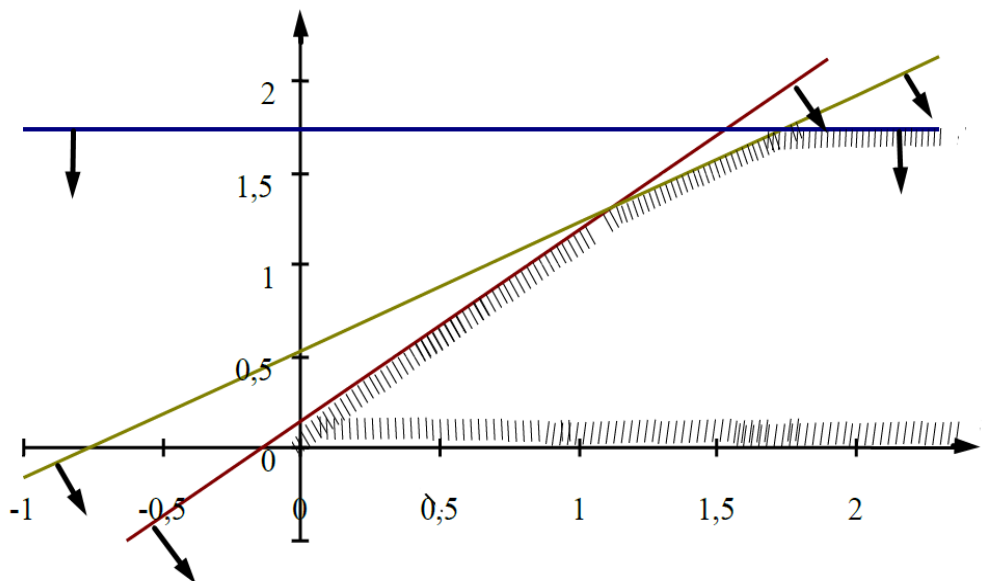


Рис. 3

На рис. 3 межа області (множини) невід'ємних розв'язків позначена штрихуванням.

3. Застосування методу повного виключення.

1) Розв'язання систем рівнянь, що відрізняються правими частинами.

Розв'язувати системи, що відрізняються тільки правими частинами, методом повного виключення можна одночасно. Для цього достатньо записати «нульову» таблицю, що складається із загальної матриці систем, а за ризкою послідовно виписати стовпці правих частин усіх систем. Для контролю обчислень за подвійною ризкою (у контрольному стовпці) записуються суми елементів кожного рядка отриманої таблиці. Перетворюючи таблицю методом повного виключення, слід пам'ятати, що провідний елемент вибирається з елементів матриці системи (тобто до ризки). За останньою таблицею виписуються розв'язки всіх систем (використовуючи перший стовпець за ризкою, виписується розв'язок першої системи; використовуючи другий стовпець – розв'язок другої тощо).

Приклад 3. Розв'язати системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3, \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання

1	2	-1	2	-1	1	5	9
1	-1	-2	(1)	0	1	-1	-1
2	1	1	0	1	3	3	11
-1	4	3	0	-1	-1	7	11
1	-1	-2	1	0	1	-1	-1
2	1	1	0	(1)	3	3	11
(1)	5	4	0	0	2	10	22
1	-1	-2	1	0	1	-1	-1
2	1	1	0	1	3	3	11
(1)	5	4	0	0	2	10	22
0	-6	-6	(1)	0	-1	-11	-23
0	-9	-7	0	(1)	-1	-17	-33

Використовуємо перший стовпець за рисою, отримуємо розв'язок першої системи:

$$X_{\text{заг}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 - 5x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -1 + 6x_2 + 6x_3 \\ -1 + 9x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}.$$

Використовуємо другий стовпець за рисою, отримуємо розв'язок другої системи:

$$X_{\text{заг}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 - 5x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -11 + 6x_2 + 6x_3 \\ -17 + 9x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}.$$

Перевірка. Візьмемо частинний розв'язок першої системи, взявши $x_2 = 1$ і $x_3 = -1$. Одержуємо: $X_{\text{част}}^{(1)} = (1, 1, -1, -1, 1)$. Підставляємо цей розв'язок в усі рівняння першої системи:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 1 - (-1) + 2 \cdot (-1) - 1 = 1 + 2 + 1 - 2 - 1 = 1, \\ 1 - 1 - 2 \cdot (-1) - 1 = 1 - 1 + 2 - 1 = 1, \\ 2 \cdot 1 + 1 - 1 + 1 = 2 + 1 - 1 + 1 = 3. \end{cases}$$

Отже, перша із систем розв'язана вірно.

Візьмемо частинний розв'язок другої системи, взявши $x_2 = x_3 = 1$. Одержуємо: $X_{\text{част}}^{(2)} = (1, 1, 1, -1)$. Підставляємо цей розв'язок в усі рівняння другої системи:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 1 - (-1) = 1 + 2 - 1 + 2 + 1 = 5, \\ 1 - 1 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 1 - 2 + 1 = -1, \\ 2 \cdot 1 + 1 + 1 - 1 = 2 + 1 + 1 - 1 = 3. \end{cases}$$

Отже, друга система розв'язана вірно.

2) Знаходження оберненої матриці.

Для знаходження оберненої матриці n -го порядку методом повного виключення потрібно скласти наступну таблицю: записати вихідну матрицю, за рискою записати одиничну матрицю тієї ж розмірності і за подвійною рискою – контрольний стовпець. Потім перетворювати таблицю по методу повного виключення, вибираючи на кожному кроці провідний елемент із елементів (чисел), розташованих до риски.

Якщо при обчисленні на будь-якому кроці всі елементи якого-небудь рядка, що знаходяться до риски, перетворюються на нуль, то це означає, що вихідна матриця вироджена і, тому у неї не існує оберненої (обчислення припиняються).

Якщо ж вихідна матриця не вироджена, то виконавши n кроків і упорядкувавши рядки останньої таблиці так, щоб частина таблиці, що розташовується до риски, утворювала одиничну матрицю, за рискою одержимо шукану обернену матрицю.

Після знаходження оберненої матриці необхідно виконати перевірку – помножити вихідну матрицю на знайдену обернену. Якщо в обчисленнях не було помилки, то в результаті множення буде одержана одинична матриця.

Приклад 4. Знайти матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

①	1	-1	-1	1	0	0	0	1
1	2	2	1	0	1	0	0	7
-1	0	1	-1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	3
1	1	-1	-1	1	0	0	0	1
0	1	3	2	-1	1	0	0	6
0	1	0	-2	1	0	1	0	1
0	①	1	0	0	0	0	1	3
1	0	-2	-1	1	0	0	-1	-2
0	0	2	2	-1	1	0	-1	3
0	0	①	-2	1	0	1	-1	-2
0	1	1	0	0	0	0	1	3
1	0	0	3	-1	0	-2	1	2
0	0	0	①	1	1	2	-3	-1
0	0	1	2	-1	0	-1	1	2
0	1	0	-2	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1/2	3/2	1	-7/2	1/2
0	0	0	1	-1/2	-1/2	-1	3/2	1/2
0	0	1	0	0	1	1	-2	1
0	1	0	0	0	-1	-1	3	2

З останньої таблиці видно, що матриця невироджена і для отримання оберненої матриці необхідно впорядкувати рядки цієї таблиці (поміняти місцями другий і четвертий рядки). Отримуємо:

1	0	0	0	1/2	3/2	1	-7/2
0	1	0	0	0	-1	-1	3
0	0	1	0	0	1	1	-2
0	0	0	1	-1/2	-1/2	-1	3/2

Контрольний стовпець не виписували, тому що він не потрібен. Тепер на місці вихідної матриці (тобто до риски) знаходиться одинична матриця I , отже, за рискою – обернена:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1 & -7/2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Перевірка.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & 1 & -7/2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1/2 & -1/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, обернена матриця знайдена правильно.

3) Розкладання векторів за базисом.

Рангом множини векторів називається максимальне число лінійно незалежних векторів множини.

Будь-яка система (підмножина) з r (r – ранг множини) лінійно незалежних векторів $\{\vec{a}_{S_1}, \vec{a}_{S_2}, \dots, \vec{a}_{S_r}\}$ множини $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ називається **базисом** цієї множини.

Представлення вектора $\vec{a}_j$ ($j = \overline{1, m}$) множини $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m\}$ у вигляді лінійної комбінації векторів базису:

$$\vec{a}_j = \beta_1 \cdot \vec{a}_{S_1} + \beta_2 \cdot \vec{a}_{S_2} + \dots + \beta_r \cdot \vec{a}_{S_r} = \sum_{i=1}^r \beta_i \vec{a}_{S_i}$$

називається **розкладанням вектора $\vec{a}_j$ за базисом $\{\vec{a}_{S_1}, \vec{a}_{S_2}, \dots, \vec{a}_{S_r}\}$.**

При цьому числа $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ називаються **координатами вектора $\vec{a}_j$ в цьому базисі**, а сам вектор $\vec{a}_j$ у цьому базисі в координатній формі записується так: $\vec{a}_j = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$.

Будь-який вектор множини можна розкласти по будь-якому базису цієї множини. Розкладання вектора $\vec{a}_j$ за обраним базисом єдино.

Базисом n -вимірного простору називається будь-яка система з n лінійно незалежних векторів цього простору. Якщо $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ який-небудь базис n -вимірного простору, то будь-який вектор $\vec{a}$ цього простору можна розкласти за цим базисом, тобто представити його у вигляді:

$$\vec{a} = \beta_1 \cdot \vec{a}_1 + \beta_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + \beta_n \cdot \vec{a}_n.$$

Таке розкладання вектора $\vec{a}$ в даному базисі єдино. У цьому базисі вектор $\vec{a}$ у координатній формі записується так:

$$\vec{a} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n).$$

Приклад 5. Знайти який-небудь базис множини векторів:

$$\vec{a}_1 = (1, 1, 2, 2, 1, 1), \quad \vec{a}_2 = (2, 1, 0, 1, -1, 1), \quad \vec{a}_3 = (-1, -1, 1, -1, 1, 0),$$

$$\vec{a}_4 = (2, 1, 3, 2, 1, 2), \quad \vec{a}_5 = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$$

і розкласти вектори множини за обраним базисом.

Розв'язання

Складемо таблицю, виписавши вектори по стовпцях, і заповнимо стовпець контрольних сум. Після цього будемо перетворювати таблицю згідно з методом повного виключення. «Нульові» рядки, які можуть з'явитися в процесі перетворень, з таблиці видаляються. В останній таблиці буде знаходитися відповідь на всі поставлені питання.

1	2	-1	2	1	5
1	1	-1	1	0	2
2	0	1	3	1	7
2	1	-1	2	0	4
1	-1	1	1	0	2
1	1	0	2	1	5
0	1	-1	0	0	0
1	1	-1	1	0	2
1	-1	1	1	0	2
2	1	-1	2	0	4
1	-1	1	1	0	2
1	1	0	2	1	5
0	-1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	2
1	0	0	1	0	2
2	0	0	2	0	4
1	0	0	1	0	2
1	1	0	2	1	5

0	-1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	2
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	3

В останній таблиці залишилися три ненульові рядки. Випишемо ці рядки і обведемо кружками ті елементи, які були провідними:

0	-1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1

Контрольний стовпець не був виписаний, тому що він уже не потрібен (свою роль він зіграв під час розрахунків). Із цієї таблиці видно, що вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_3$ і $\vec{a}_5$ – лінійно незалежні і, отже, можуть бути обрані як базис. Базисні вектори зручно взяти в наступному порядку: $\vec{a}_3$ (одиниця на першому місці), $\vec{a}_1$ (одиниця на другому місці) і $\vec{a}_5$ (одиниця на останньому, третьому місці). При такому виборі базису: $\{\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_5\}$, у кожному стовпці останньої таблиці записані розкладання векторів за цим базисом:

$$\vec{a}_1 = (0, 1, 0), \vec{a}_2 = (-1, 0, 1), \vec{a}_3 = (1, 0, 0), \vec{a}_4 = (0, 1, 1), \vec{a}_5 = (0, 0, 1).$$

Перевірка. Для перевірки використовуються розкладання небазисних векторів (тобто векторів $\vec{a}_2$ та $\vec{a}_4$) і їхнього вираження через вихідний базис:

$$\begin{aligned} \vec{a}_2 &= (-1, 0, 1) = -1 \cdot \vec{a}_3 + 0 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_5 = -(-1, -1, 1, -1, 1, 0) + \\ &+ (1, 0, 1, 0, 0, 1) = (1, 1, -1, 1, -1, 0) + (1, 0, 1, 0, 0, 1) = (2, 1, 0, 1, -1, 1), \\ \vec{a}_4 &= (0, 1, 1) = 0 \cdot \vec{a}_3 + 1 \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_5 = (1, 1, 2, 2, 1, 1) + (1, 0, 1, 0, 0, 1) = \\ &= (2, 1, 3, 2, 1, 2). \end{aligned}$$

Збіг векторів $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_4$ з їхніми представленнями у вихідному базисі свідчить про те, що розкладання векторів за базисом $\{\vec{a}_3, \vec{a}_1, \vec{a}_5\}$ знайдені вірно.

Приклад 6. Чи утворюють вектори $\vec{a}_1 = (1, 0, 2, 0)$, $\vec{a}_2 = (-1, 1, 0, 2)$, $\vec{a}_3 = (2, 0, 1, 1)$ і $\vec{a}_4 = (0, 1, 1, -1)$ базис у чотиривимірному просторі? Якщо так, то вектор $\vec{b} = (-3, 4, 4, 4)$ розкласти за цим базисом.

Розв'язання

Якщо вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ і $\vec{a}_4$ утворюють базис, то вектор $\vec{b}$ можна розкласти за цим базисом, тобто представити вектор $\vec{b}$ у вигляді: $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4$, де x_1, x_2, x_3 та x_4 – координати вектора в базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$. Крім того, таке представлення єдине, тобто x_1, x_2, x_3 і x_4 визначаються однозначно. Отже, для відповіді на поставлені питання необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 + x_4\vec{a}_4 = \vec{b}.$$

Очевидно, стовпцями матриці системи будуть вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ і $\vec{a}_4$, записані як вектори-стовпці.

Розв'язуємо цю систему методом повного виключення. Складаємо «нульову» таблицю, записав вектори по стовпцях:

①	-1	2	0	-3	-1
0	1	0	1	4	6
2	0	1	1	4	8
0	2	1	-1	4	6
1	-1	2	0	-3	-1
0	1	0	①	4	6
0	2	-3	1	10	10
0	2	1	-1	4	6
1	-1	2	0	-3	-1
0	1	0	1	4	6
0	1	-3	0	6	4
0	3	①	0	8	12
1	-7	0	0	-19	-25
0	1	0	1	4	6
0	⑩	0	0	30	40
0	3	1	0	8	12
①	0	0	0	2	3
0	0	0	①	1	2
0	①	0	0	3	4
0	0	①	0	-1	0

З останньої таблиці видно, що система має єдиний розв'язок $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$. Отже:

1) вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ і $\vec{a}_4$ утворюють базис у чотиривимірному просторі;

2) розкладання вектора $\vec{b}$ за цим базисом наступне: $\vec{b} = (2, 3, -1, 1)$.

Перевірка.

$$\begin{aligned} 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - \vec{a}_3 + \vec{a}_4 &= 2 \cdot (1, 0, 2, 0) + 3 \cdot (-1, 1, 0, 2) - (2, 0, 1, 1) + \\ &+ (0, 1, 1, -1) = (2, 0, 4, 0) + (-3, 3, 0, 6) + (-2, 0, -1, -1) + \\ &+ (0, 1, 1, -1) = (-3, 4, 4, 4) = \vec{b}. \end{aligned}$$

Зауваження. Якби система рівнянь $\vec{a}_1x_1 + \vec{a}_2x_2 + \vec{a}_3x_3 + \vec{a}_4x_4 = \vec{b}$ виявилася несумісною або невизначеною, то це означало б, що вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ і $\vec{a}_4$ базис у чотиривимірному просторі не утворюють.

ЗАВДАННЯ

3.12. Розв'язати системи рівнянь:

а)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = -2, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -14, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 5; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x_2 - x_3 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = -3; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - x_6 = 6, \\ x_1 - x_3 + 2x_5 = 2; \end{cases}$$

д)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 5; \end{cases}$$

е)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = -1; \end{cases}$$

ж)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$$

з)
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

3.13. Побудувати множину невід'ємних розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 6; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \end{array}$$

3.14. Розв'язати системи рівнянь, що відрізняються правими частинами:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 0, \end{cases} & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 4; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \end{cases} & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 7, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 1, \end{cases} \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -3. \end{cases} \end{array}$$

3.15. Знайти матрицю, обернену до матриці A :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, & \text{г) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{array}$$

$$\text{д) } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{е) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.16. Визначити який-небудь базис множини векторів і розкласти вектори множини за вибраним базисом:

а) $\vec{a}_1 = (1, -1, 2, 0),$

$\vec{a}_2 = (3, 2, 1, 2),$

$\vec{a}_3 = (2, -1, -1, 2),$

$\vec{a}_4 = (1, 0, 2, 0),$

$\vec{a}_5 = (1, 3, 2, 0),$

$\vec{a}_6 = (2, 3, 1, 2);$

б) $\vec{a}_1 = (2, 1, -1, 1),$

$\vec{a}_2 = (1, 3, 2, -1),$

$\vec{a}_3 = (-1, 0, -2, 3),$

$\vec{a}_4 = (1, 2, 0, -1),$

$\vec{a}_5 = (-2, 3, 6, -6),$

$\vec{a}_6 = (-2, 4, 0, 3);$

3.17. Чи утворюють вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, базис у n -вимірному просторі? Якщо так, то вектор $\vec{b}$ розкласти за цим базисом:

а) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1),$

$\vec{a}_2 = (1, 1, 0),$

$\vec{a}_3 = (1, 0, 1),$

$\vec{b} = (1, 2, 0);$

б) $\vec{a}_1 = (1, -1, 2),$

$\vec{a}_2 = (2, 1, -1),$

$\vec{a}_3 = (0, 1, 2),$

$\vec{b} = (-1, -1, 1);$

в) $\vec{a}_1 = (1, 2, 3),$

$\vec{a}_2 = (2, 1, 2),$

$\vec{a}_3 = (-1, 1, 1),$

$\vec{b} = (0, -3, -2);$

г) $\vec{a}_1 = (1, 2, -1, 1),$

$\vec{a}_2 = (2, 1, -1, 2),$

$\vec{a}_3 = (-1, 1, 2, -1),$

$\vec{a}_4 = (0, 1, 1, 1),$

$\vec{b} = (2, 2, 2, 1);$

д) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 1),$

$\vec{a}_2 = (0, 1, 1, -1),$

$\vec{a}_3 = (1, 1, -1, 0),$

$\vec{a}_4 = (1, 2, 2, 0),$

$\vec{b} = (1, 3, 1, 2);$

е) $\vec{a}_1 = (1, 0, -1, 1),$

$\vec{a}_2 = (-1, 1, 0, 1),$

$\vec{a}_3 = (0, -1, 1, -1),$

$\vec{a}_4 = (2, 0, 1, -1),$

$\vec{b} = (2, 2, -1, 1).$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1. Побудувати множину невід'ємних розв'язків системи рівнянь.
2. Знайти матрицю, обернену до матриці А.
3. Знайти який-небудь базис множини векторів і розкласти вектори по обраному базису.

№1

$$1. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 - x_6 = 2, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 8. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (1, 1, 2, 2), \quad \bar{a}_2 = (2, 1, 0, 1), \quad \bar{a}_3 = (-1, -1, 1, -1), \\ \bar{a}_4 = (2, 1, 3, 2), \quad \bar{a}_5 = (1, 0, 1, 0), \quad \bar{a}_6 = (-1, -1, 1, -1).$$

№2

$$1. \begin{cases} -3x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_4 + x_5 = 8, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, 1, 1, -1), \quad \bar{a}_2 = (-1, 1, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (-1, 0, 2, 1), \\ \bar{a}_4 = (1, 1, 3, 0), \quad \bar{a}_5 = (2, 0, 1, -1), \quad \bar{a}_6 = (3, 1, 4, 1).$$

№3

$$1. \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ 3x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 3, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (1, 1, 2, 1), \quad \bar{a}_2 = (0, 4, 1, 2), \quad \bar{a}_3 = (0, 2, 0, 1), \\ \bar{a}_4 = (1, 3, 2, 0), \quad \bar{a}_5 = (-1, 1, -1, 2), \quad \bar{a}_6 = (0, 2, 1, 1).$$

№4

$$1. \begin{cases} -2x_1 - x_2 & + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_2 & + x_4 + x_5 = 5, \\ -3x_1 & + x_3 + x_5 + x_6 = 3, \\ & 2x_2 + x_3 + x_4 + & = 4. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, -2, 1, 3), \quad \bar{a}_2 = (-1, 0, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (0, 1, 1, 2), \\ \bar{a}_4 = (1, -1, -1, 1), \quad \bar{a}_5 = (1, -1, 2, 2), \quad \bar{a}_6 = (-2, 1, 0, -1).$$

№5

$$1. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 & - x_5 - 2x_6 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 & = 1, \\ & 3x_2 + x_4 - x_5 = 1, \\ -5x_1 & + x_5 + 2x_6 = 2. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, -2, 1, 3), \quad \bar{a}_2 = (-1, 2, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (0, -1, 1, 2), \\ \bar{a}_4 = (1, -1, -1, 1), \quad \bar{a}_5 = (1, -1, 2, 2), \quad \bar{a}_6 = (-2, 1, 0, -1).$$

№6

$$1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 & = 2, \\ & 3x_2 + x_4 - x_5 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 & - x_5 - 2x_6 = -1, \\ -5x_1 + 3x_2 & + x_4 + 2x_6 = 3. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (1, 0, 1, 0), \quad \bar{a}_2 = (1, 1, 1, 1), \quad \bar{a}_3 = (1, 0, 2, 0), \\ \bar{a}_4 = (2, 0, 2, 1), \quad \bar{a}_5 = (1, 1, 2, 0), \quad \bar{a}_6 = (3, 1, 4, 1);$$

№7

$$1. \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (1, 1, -1, -1, 2), \quad \bar{a}_2 = (-1, 2, 0, 1, -1), \quad \bar{a}_3 = (2, 1, -1, -1, 0), \\ \bar{a}_4 = (-2, 0, 2, 0, 1), \quad \bar{a}_5 = (0, 1, 0, 2, 0).$$

№8

$$1. \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 9, \\ -3x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 3, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, -2, 1, 3), \quad \bar{a}_2 = (-1, 0, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (0, 1, 1, 2), \\ \bar{a}_4 = (1, -1, -1, 1), \quad \bar{a}_5 = (1, -1, 2, 2), \quad \bar{a}_6 = (-2, 1, 0, -1).$$

№9

$$1. \begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_5 + x_6 = 0. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (-1, 1, 2, -2), \quad \bar{a}_2 = (0, 3, -1, 0), \quad \bar{a}_3 = (2, -2, -1, 1), \\ \bar{a}_4 = (1, 1, 0, -1), \quad \bar{a}_5 = (1, 3, 1, -2), \quad \bar{a}_6 = (2, 0, -2, 1).$$

№10

$$1. \begin{cases} -2x_1 - x_2 & + x_5 - x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_2 & + x_4 + x_5 = 5, \\ -3x_1 & + x_3 + x_5 + x_6 = 3, \\ & 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, -2, 1, 3), \quad \bar{a}_2 = (-1, 0, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (0, 1, 1, 2), \\ \bar{a}_4 = (1, -1, -1, 1), \quad \bar{a}_5 = (1, -1, 2, 2), \quad \bar{a}_6 = (-2, 1, 0, -1).$$

№11

$$1. \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 & + x_6 = 1, \\ 2x_1 - x_2 & + x_4 + x_5 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 & + x_5 - x_6 = 2, \\ -2x_1 + 2x_2 & + x_4 + x_5 + x_6 = 8, \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, -2, 1, 3), \quad \bar{a}_2 = (-1, 0, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (0, -1, 1, 2), \\ \bar{a}_4 = (1, -1, -1, 1), \quad \bar{a}_5 = (1, -1, 2, 2), \quad \bar{a}_6 = (-2, 1, 0, -1).$$

№12

$$1. \begin{cases} 3x_1 & + 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 & = 1, \\ 3x_1 & + x_3 + x_5 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & + x_5 + x_6 = 2. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, 0, -2, 1), \quad \bar{a}_2 = (-1, 3, 1, -2), \quad \bar{a}_3 = (1, 1, 0, -1), \\ \bar{a}_4 = (2, -2, -1, 1), \quad \bar{a}_5 = (0, 2, -1, 0), \quad \bar{a}_6 = (-1, 1, 2, -2).$$

№13

$$1. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 & -x_5 - 2x_6 = -1, \\ 5x_1 & -x_5 - 2x_6 = -2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 & = 1, \\ & +x_4 - x_5 = 1. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, -2, 1, 3), \quad \bar{a}_2 = (-1, 0, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (0, -1, 1, 2), \\ \bar{a}_4 = (1, -1, -1, 1), \quad \bar{a}_5 = (1, -1, 2, 2), \quad \bar{a}_6 = (-2, 1, 0, -1).$$

№14

$$1. \begin{cases} x_1 & + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ & 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -2x_1 + 2x_2 & + x_4 + x_6 = 3, \\ -2x_1 - x_2 & + 2x_5 + x_6 = 2. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, 0, -2, 1), \quad \bar{a}_2 = (-1, 3, 1, -2), \quad \bar{a}_3 = (1, 1, 0, -1), \\ \bar{a}_4 = (2, -2, -1, 1), \quad \bar{a}_5 = (0, 2, -1, 0), \quad \bar{a}_6 = (-1, 1, 2, -2).$$

№15

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 3, \\ x_1 - 2x_2 & + x_5 = 2, \\ 3x_1 & + x_3 - x_6 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 & = 1. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (0, 0, -2, 1), \quad \bar{a}_2 = (1, 2, 3, -1), \quad \bar{a}_3 = (1, 1, 1, 0), \\ \bar{a}_4 = (2, 1, 0, -1), \quad \bar{a}_5 = (-2, -2, -2, 0), \quad \bar{a}_6 = (2, 3, 4, -1).$$

№16

$$1. \begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_6 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 3. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, 1, 0, -1), \quad \bar{a}_2 = (1, 1, 1, 0), \quad \bar{a}_3 = (2, 3, 4, -1), \\ \bar{a}_4 = (1, 2, 3, -1), \quad \bar{a}_5 = (-2, -2, -2, 0), \quad \bar{a}_6 = (0, 0, -2, 1).$$

№17

$$1. \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, -2, 1, 3), \quad \bar{a}_2 = (-1, 0, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (0, -1, 1, 2), \\ \bar{a}_4 = (1, -1, -1, 1), \quad \bar{a}_5 = (1, -1, 2, 2), \quad \bar{a}_6 = (-2, 1, 0, -1).$$

№18

$$1. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_4 - x_5 - x_6 = -8, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 - x_6 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 - x_6 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (-2, 1, 0, -1), \quad \bar{a}_2 = (-1, 1, 1, -1), \quad \bar{a}_3 = (2, 1, -1, 0), \\ \bar{a}_4 = (1, 3, 2, -2), \quad \bar{a}_5 = (2, 2, 1, -1), \quad \bar{a}_6 = (1, 2, 0, -1).$$

№19

$$1. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 + 2x_5 + x_6 = 10. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, 0, 1, -1), \quad \bar{a}_2 = (-1, 1, 0, -1), \quad \bar{a}_3 = (0, -2, -2, 2), \\ \bar{a}_4 = (1, -1, -1, 0), \quad \bar{a}_5 = (1, 1, 1, -2), \quad \bar{a}_6 = (-1, -1, -2, 1).$$

№20

$$1. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 - x_6 = 2, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 8, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = 5. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, 1, 1, -1), \quad \bar{a}_2 = (-1, 1, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (-1, 0, 2, 1), \\ \bar{a}_4 = (1, 1, 3, 0), \quad \bar{a}_5 = (2, 0, 1, -1), \quad \bar{a}_6 = (3, 1, 4, 1).$$

№21

$$1. \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 - x_5 - x_6 = -8, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 2. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, 3, 4, -1), \quad \bar{a}_2 = (1, 1, 1, 0), \quad \bar{a}_3 = (0, -1, -2, 1), \\ \bar{a}_4 = (-2, -2, -2, 0), \quad \bar{a}_5 = (2, 1, 0, 1), \quad \bar{a}_6 = (1, 2, 3, -1).$$

№22

$$1. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -3x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 3, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \vec{a}_1 = (1, 3, 2, -2), \quad \vec{a}_2 = (2, 1, -1, 0), \quad \vec{a}_3 = (1, 2, 0, -1), \\ \vec{a}_4 = (1, 1, 1, -1), \quad \vec{a}_5 = (2, 2, 1, -1), \quad \vec{a}_6 = (-2, 1, 0, -1).$$

№23

$$1. \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 - x_6 = 2, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \vec{a}_1 = (-2, 1, 0, -1), \quad \vec{a}_2 = (-1, 1, 1, -1), \quad \vec{a}_3 = (2, 1, -1, 0), \\ \vec{a}_4 = (1, 3, 2, -2), \quad \vec{a}_5 = (2, 2, 1, -1), \quad \vec{a}_6 = (1, 2, 0, -1).$$

№24

$$1. \begin{cases} 2x_1 + x_3 - x_6 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3. \vec{a}_1 = (2, 0, -2, 1), \quad \vec{a}_2 = (-1, 3, 1, -2), \quad \vec{a}_3 = (1, 1, 0, -1), \\ \vec{a}_4 = (2, -2, -1, 1), \quad \vec{a}_5 = (0, 2, -1, 0), \quad \vec{a}_6 = (-1, 1, 2, -2).$$

№25

$$1. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ -3x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 3, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \vec{a}_1 = (3, 1, 4, -1), \quad \vec{a}_2 = (1, 1, 3, 0), \quad \vec{a}_3 = (-1, 1, 2, 1),$$

$$\vec{a}_4 = (2, 0, 1, -1), \quad \vec{a}_5 = (-1, 0, 2, 1), \quad \vec{a}_6 = (2, 1, 1, -1).$$

№26

$$1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_3 - x_5 - x_6 = -3, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \vec{a}_1 = (0, 2, 1, 1), \quad \vec{a}_2 = (1, 3, 2, 0), \quad \vec{a}_3 = (0, 4, 1, 2),$$

$$\vec{a}_4 = (-1, 1, -1, 2), \quad \vec{a}_5 = (0, 2, 0, 1), \quad \vec{a}_6 = (1, 1, 2, -1).$$

№27

$$1. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -x_2 - x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 4, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \vec{a}_1 = (1, 4, 1, 3), \quad \vec{a}_2 = (1, -1, 0, -2), \quad \vec{a}_3 = (-1, -2, 0, 1),$$

$$\vec{a}_4 = (0, 3, 1, 1), \quad \vec{a}_5 = (-1, -2, -1, 1), \quad \vec{a}_6 = (-1, 1, 1, 2).$$

№28

$$1. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2, \\ -3x_1 + x_3 + x_5 + x_6 = 3, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \vec{a}_1 = (3, 1, 4, 1), \quad \vec{a}_2 = (-2, 0, -1, 1), \quad \vec{a}_3 = (1, 0, -2, -1), \\ \vec{a}_4 = (1, 1, 3, 0), \quad \vec{a}_5 = (1, -1, -2, -1), \quad \vec{a}_6 = (2, 1, 1, -1).$$

№29

$$1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = -2, \\ 3x_1 - x_3 - x_5 - x_6 = -3, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3. \vec{a}_1 = (1, -1, 1, -2), \quad \vec{a}_2 = (0, 2, 1, 1), \quad \vec{a}_3 = (0, 4, 1, 2), \\ \vec{a}_4 = (-1, -1, -2, 1), \quad \vec{a}_5 = (1, 3, 2, 0), \quad \vec{a}_6 = (0, -2, 0, -1).$$

№30

$$1. \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_6 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 - x_6 = 2, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = 8. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \vec{a}_1 = (2, -2, 1, 3), \quad \vec{a}_2 = (-1, 0, 2, 1), \quad \vec{a}_3 = (0, -1, 1, 2), \\ \vec{a}_4 = (1, -1, -1, 1), \quad \vec{a}_5 = (1, -1, 2, 2), \quad \vec{a}_6 = (-2, 1, 0, -1).$$

№31

$$1. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 - x_5 - 2x_6 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_2 + x_4 - x_5 = 1, \\ -5x_1 + x_5 + 2x_6 = 2. \end{cases} \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, 0, 1, -1), \quad \bar{a}_2 = (-1, 1, 0, -1), \quad \bar{a}_3 = (0, -2, -2, 2),$$

$$\bar{a}_4 = (1, -1, -1, 0), \quad \bar{a}_5 = (1, 1, 1, -2), \quad \bar{a}_6 = (-1, -1, -2, 1).$$

№33

$$1. \begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_6 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, -2, 1, 3), \quad \bar{a}_2 = (-1, 0, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (0, 1, 1, 2),$$

$$\bar{a}_4 = (1, -1, -1, -1), \quad \bar{a}_5 = (1, -1, 2, 2), \quad \bar{a}_6 = (-2, 1, 0, -1).$$

№33

$$1. \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = 5, \\ x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, -2, 1, 3), \quad \bar{a}_2 = (-1, 0, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (0, -1, 1, 2),$$

$$\bar{a}_4 = (1, -1, -1, 1), \quad \bar{a}_5 = (1, 1, 1, -2), \quad \bar{a}_6 = (1, -2, 2, 2).$$

№34

$$1. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 & -x_5 - 2x_6 = -1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 & = 1, \\ 3x_2 & + x_4 - x_5 = 1, \\ -5x_1 & + x_5 + 2x_6 = 2. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, -2, 1, 3), \quad \bar{a}_2 = (-1, 0, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (0, -1, 1, 2), \\ \bar{a}_4 = (1, -1, -1, 1), \quad \bar{a}_5 = (1, -1, 2, 2), \quad \bar{a}_6 = (-2, 1, 0, -1).$$

№35

$$1. \begin{cases} 2x_1 & x_3 & -x_6 = 1, \\ x_1 - 2x_2 & & + x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 & & = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, -1, 1, 2), \quad \bar{a}_2 = (-1, 1, 0, -1), \quad \bar{a}_3 = (0, 0, 1, 2), \\ \bar{a}_4 = (2, 0, 3, 1), \quad \bar{a}_5 = (1, 0, 0, -1), \quad \bar{a}_6 = (-1, 0, -1, 2).$$

№36

$$1. \begin{cases} -2x_1 - x_2 & & + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_2 & & + x_4 + x_5 = 5, \\ -3x_1 & + x_3 & + x_5 + x_6 = 3, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 & & = 4. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \bar{a}_1 = (2, -2, 1, 3), \quad \bar{a}_2 = (-1, 0, 2, 1), \quad \bar{a}_3 = (0, 1, 1, 2), \\ \bar{a}_4 = (1, -1, -1, 1), \quad \bar{a}_5 = (1, -1, 2, 2), \quad \bar{a}_6 = (-2, 1, 0, -1).$$

$$1. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 6, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = -1, \\ 3x_1 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 8. \end{cases} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. \vec{a}_1 = (1, 1, 2, -1), \quad \vec{a}_2 = (0, 4, 1, 2), \quad \vec{a}_3 = (0, 2, 0, 1), \\ \vec{a}_4 = (1, 3, 2, 0), \quad \vec{a}_5 = (-1, 1, -1, 2), \quad \vec{a}_6 = (0, 2, 1, 1).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Михайленко, С. В., Свіщова, Є. В. (2023). *Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навч. посібник*. Харків: Вид-во НУА, 104с.
2. Барковський В. В., Барковська, Н. В. (2022). *Вища математика для економістів*. Київ: Центр навчальної літератури, 448 с.
3. Валєєв, К. Г., Джалладова, І. А. та Дегтяр, С. В. (2015). *Вища математика для економістів*. Київ: Знання, 287 с.
4. Васильченко, І. П. (2014). *Вища математика для економістів*. Київ: Знання, 341 с.
5. Дубовик В. П., Юрик І. І. (2018). *Вища математика*. Київ: Ігнатекс-Україна, 648 с.
6. Макаренко, В. О. (2018). *Вища математика для економістів*. Київ: Знання, 517 с.
7. Фортуна, В. В., Бескровний, О. І. (2016). *Вища та прикладна математика*. Львів: Магнолія-2006, 647 с.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
I. ВЕКТОРИ ТА ДІЇ НАД НИМИ.....	4
1. Лінійні дії над векторами.....	4
2. Скалярний добуток векторів.....	7
3. Векторний добуток векторів (в R^3).....	10
4. Мішаний добуток векторів (в R^3).....	12
<i>Завдання</i>	14
II. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ.....	19
1. Аналітична геометрія на площині.....	19
1. Рівняння лінії.....	20
2. Пряма.....	19
3. Криві другого порядку.....	20
<i>Завдання</i>	26
2. Аналітична геометрія у просторі.....	29
1. Рівняння поверхні та лінії.....	29
2. Площина.....	29
3. Пряма.....	32
4. Пряма та площина.....	36
<i>Завдання</i>	39
III. МАТРИЧНА АЛГЕБРА.....	43
1. Матриці і дії над ними.....	43
1. Матриці.....	43
2. Дії над матрицями.....	44
3. Технологічна матриця.....	45
<i>Завдання</i>	49
2. Визначник та їх властивості.....	53
1. Визначники.....	52
2. Основні властивості визначників.....	53
3. Обернена матриця.....	53
4. Розв'язання систем рівнянь за формулами Крамера та за допомогою оберненої матриці.....	54
5. Власні значення матриці.....	54
6. Мінори k-го порядку. Ранг матриці.....	54
<i>Завдання</i>	59

3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).....	60
1. Основні означення.....	60
2. Метод повного виключення (метод Жордана – Гаусса).....	62
3. Застосування методу повного виключення.....	71
1) <i>Розв’язання систем рівнянь, що відрізняються</i> <i>правими частинами</i>	71
2) <i>Знаходження оберненої матриці</i>	73
3) <i>Розкладання векторів за базисом</i>	75
<i>Завдання</i>	79
<i>Індивідуальні завдання</i>	81
<i>Список літератури</i>	95

Навчальне видання

МИХАЙЛЕНКО Віталій Григорович
СВІЩОВА Євгенія Віталіївна

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА
ПРАКТИКУМ

В авторській редакції
Комп'ютерний набір і верстка Є. В. Свіщова

Підписано до друку Формат 60 × 84/16.
Папір офсетний. Гарнітура "Таймс".
умов. друк. арк. 7,35. Обл.-вид. арк. 6,42
Тираж 50 пр. Зам №

План 2024/25 навч. р., поз. №1 у переліку робіт кафедри.

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво №1153 від 16.12.2002.

Надруковано у видавництві Народної української академії
Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Лермонтовська, 27