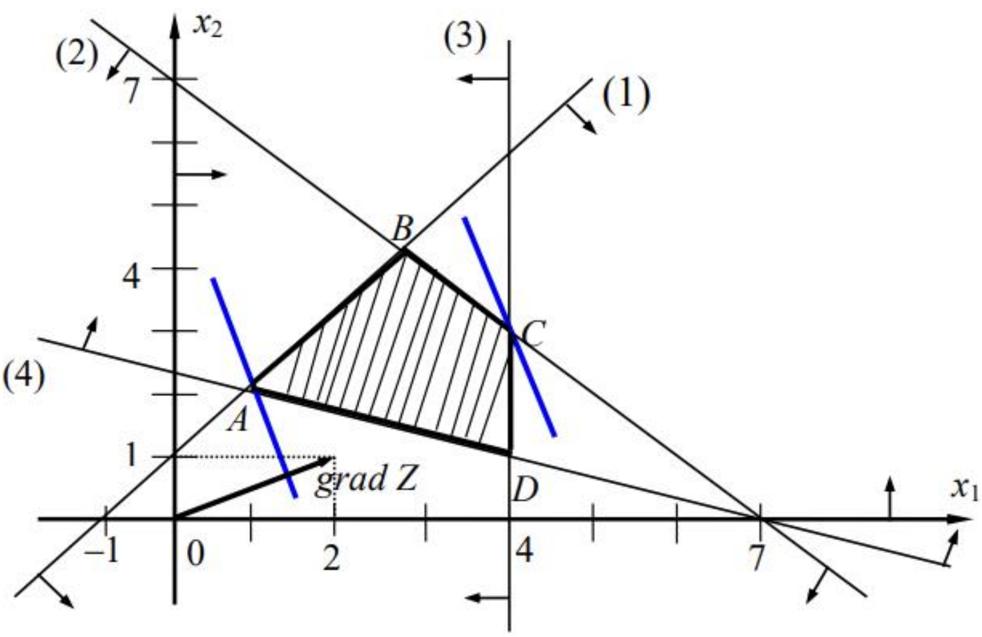
НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

Серія «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ»

С. В. Михайленко, Є. В. Свіщова

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ

Навчальний посібник



Видавництво НУА

НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

Серія «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ»

С. В. Михайленко, Є. В. Свіщова

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ

Навчальний посібник
для самостійного вивчення дисципліни

Харків
Видавництво НУА
2024

УДК 519.85(076.1)
М69

Затверджено на засіданні
кафедри інформаційних технологій та математики.
Протокол № 6 від 15.01.2024

Рецензент канд. фіз.-мат. наук, доц. О. Г. Ніколаєва
(ХНУ ім. В. Н. Каразіна)

Посібник містить завдання з курсу оптимізаційних методів і моделей та охоплює розділи: лінійне, цілочислове, дробово-лінійне та нелінійне програмування. З кожної теми наводяться необхідні теоретичні відомості та докладні розв'язання типових задач.

Для студентів економічних спеціальностей.

М69 **Михайленко, Світлана Василівна**.

Оптимізаційні методи та моделі : навчальний посібник / С. В. Михайленко, Є. В. Свіщова; Нар. укр. акад., [каф. інформ. технологій та математики]. – Харків: Вид-во НУА, 2024. – 180 с.

УДК 519.85(076.1)

ВСТУП

Економіка як наука про об'єктивні причини функціонування та розвитку суспільства ще з часів Адама Сміта користується різноманітними кількісними характеристиками, а тому увібрала в себе велику кількість математичних методів.

Формування оптимізаційних методів як самостійної гілки прикладної математики відноситься до періоду 1940-х і 1950-х років. Наступні півтора десятиліття були відзначені широким застосуванням отриманих фундаментальних теоретичних результатів до різноманітних практичних задач і пов'язаних із цим переосмисленням потенційних можливостей теорії. Важливий внесок у цю область зробили такі видні вчені, як Дж. Данциг, Дж. фон Нейман, Г. Кун, Д. Гейл, К. Ерроу, Р. Беллман, Р. Гоморі, Т. Сааті та ін. Звертаючись до задач і проблем, що становлять предмет оптимізаційних методів, не можна не згадати про внесок у їхнє рішення Л. В. Канторовича, який став у 1975 р. лауреатом Нобелівської премії за свої роботи з оптимального використання ресурсів в економіці. Серед інших фахівців, що успішно працюють у цій галузі, безумовно, мають бути названі Є. С. Вентцель, М. К. Гавурін, Н. Н. Мойсеєв, Д. Б. Юдін. У результаті оптимізаційні методи набули рис класичної наукової дисципліни, без якої неможлива базова економічна освіта.

Курс «Оптимізаційні методи та моделі» займає ключову позицію в освітніх програмах студентів більшості фінансово-економічних спеціальностей. Це пояснюється тим, що в процесі його освоєння у студентів має сформуватися розуміння принципів, які лежать в основі оптимізаційних підходів в економіці. Також вони мають ознайомитися з основними класами економіко-оптимізаційних моделей, задач, що формулюються у межах цих моделей, і відповідних методах пошуку їх розв’язків. Всі ці питання утворюють своєрідний фундамент, необхідний в сучасних умовах будь-якому кваліфікованому фахівцю в галузі економіки та фінансів.

Неодмінною умовою успішного засвоєння тем, що становлять зміст даного курсу, є оволодіння базовими поняттями та фактами з курсів математичного аналізу (диференціального числення) та лінійної алгебри. Теоретичні відомості з цих питань можна знайти в посібниках [1] та [2].

У цьому навчальному посібнику викладено матеріал, що дозволяє отримати досить повне уявлення про можливості практичного використання оптимізаційних методів під час вирішення конкретних економічних завдань. Посібник призначений насамперед тим, хто самостійно вивчає зазначені питання та бажає набути необхідних навичок у розв’язанні практичних задач.

Весь посібник розбитий на параграфи. На початку кожного параграфа вміщено означення, формули, інші короткі теоретичні відомості та методичні вказівки, необхідні для розв'язання наведених задач. Потім дається докладне розв'язання типових задач із короткими поясненнями теоретичних положень. У кожному параграфі наводяться задачі для самостійного розв'язання, до яких надано відповіді.

Більшість завдань має умовний характер, а числові параметри підібрані так, щоб при розв'язанні задач можна було обійтися найпростішими обчисленнями.

Додаткові відомості з теорії, а також додаткові задачі для самостійного розв'язання можна одержати з книг, наведених у списку літератури.

Посібник написаний у повній відповідності до програми з курсу «Оптимізаційні методи та моделі». Він розрахований як на студентів очної форми навчання, так і на студентів-заочників.

Таким чином, цей посібник може бути використаний як довідник, розв'язник і в той же час як задачник, що дуже зручно для студентів і надає їм широкі можливості для активної самостійної роботи.

НАВЧАЛЬНА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ

Основні теми та зміст навчального курсу

1. Загальна постановка задачі лінійного програмування. Стандартна форма запису задачі лінійного програмування. Задача планування.

2. Властивості розв'язків задач лінійного програмування.

3. Графічний метод розв'язання задач лінійного програмування ($n = 2$; $n > 2$).

4. Основна ідея симплексного методу. Складові симплексного методу. Метод побудови допустимого базисного розв’язку. Спрямований перехід від одного допустимого базисного розв’язку до іншого.

5. Симплексний метод із природним базисом. Симплексна таблиця та порядок її заповнення. Аналіз процесу розв'язання задачі лінійного програмування симплексним методом у випадку природного базису.

6. Симплексний метод зі штучним базисом. Симплексна таблиця та порядок її заповнення. Аналіз процесу розв'язання задачі лінійного програмування симплексним методом у разі штучного базису.

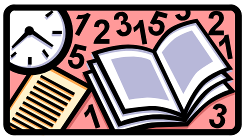
7. Поняття про двоїсті задачі. Правила побудови двоїстих задач. Види математичних моделей двоїстих задач. Перша та друга теореми двоїстості.

8. Транспортне завдання. Методи побудови початкового опорного плану. Метод потенціалів. Завдання транспортного типу.

9. Цілочислове програмування. Метод Гоморі.

10. Дробово-лінійне програмування. Розв'язання задач графічним методом ($n = 2$). Зведення задачі дробово-лінійного програмування до задачі лінійного програмування.

11. Елементи нелінійного програмування.



Основні вимоги до знань та вмінь студентів

Після вивчення курсу студент повинен **знати**:

- типи задач, які розв’язуються оптимізаційними методами;
- геометричну інтерпретацію задач лінійного програмування;
- основні ідеї симплексного методу;
- економічну інтерпретацію двоїстих задач;
- І та ІІ теореми двоїстості;
- основні ідеї двоїстого симплексного методу;
- постановку транспортної задачі та її економічний зміст;
- економічну інтерпретацію задачі дробово-лінійного програмування;
- постановку задачі нелінійного програмування;

вміти :

- будувати математичні моделі найпростіших економічних задач;
- розв’язувати задачі лінійного, цілочислового, дробово-лінійного та нелінійного програмування графічним методом (n = 2);
- розв’язувати задачі лінійного програмування симплексним методом;
- будувати для даної задачі двоїсту і шукати її розв’язок за допомогою І і ІІ теорем двоїстості;
- розв'язувати задачі лінійного програмування двоїстим симплексним методом;
- знаходити початковий допустимий базисний розв’язок (ДБР) транспортної задачі методами північно-західного кута та мінімального елемента;
- знаходити оптимальний розв’язок методом потенціалів;
- зводити транспортну задачу відкритого типу до транспортної задачі закритого типу;
- розв’язувати задачі цілочислового програмування методом Гоморі;
- зводити задачу дробово-лінійного програмування до задачі лінійного програмування;
- розв’язувати задачі безумовної оптимізації;
- розв’язувати задачі умовної оптимізації за допомогою множників Лагранжа.

1. ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ НАЙПРОСТІШИХ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ

Лінійне програмування (ЛП) – це область математики, що розробляє теорію і методи розв'язання задач знаходження екстремуму (max або min) лінійної функції багатьох змінних за наявності лінійних обмежень, тобто лінійних рівностей чи нерівностей, що пов'язують ці змінні. До задач ЛП зводиться широке коло питань планування економічних процесів, де ставиться задача пошуку найкращого рішення.

Задача лінійного програмування формулюється так:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min(\max),$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, k}; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{k+1, m}; \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Усі m обмежень можуть і одного типу, тобто всі рівностями або всі нерівностями.

Функція Z, для якої визначається екстремальне значення, називається ***цільовою*** або ***функцією цілі.***

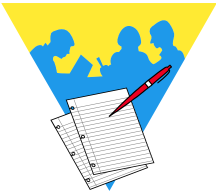
Допустимим розв'язком (планом) задачі ЛП називається вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, що задовольняє всі її обмеження.

Оптимальним розв'язком (оптимальним планом) задачі ЛП називається такий допустимий розв'язок, у якому цільова функція досягає свого екстремуму.

Методи лінійного програмування використовують у економіці дуже широко, але перш ніж застосовувати ці методи, необхідно побудувати математичну модель економічної задачі.

Під ***математичною моделлю*** розуміємо абстрактний запис основних закономірностей економічного процесу чи явища, виражений за допомогою математичних формул та співвідношень.

Розглянемо приклад змістовної постановки задачі ЛП та побудови її математичної моделі.



ПРИКЛАД

1. Підприємство виготовляє жіночі костюми, сукні, штани та піджаки з тканин двох видів. Відомо, що кількість тканини, що відпускається на одну зміну (8 годин), становить 200 м тканини I виду та 50 м тканини II виду. Виготовлення швейного виробу складається з розкрою та пошиття виробу. На ділянці розкрою працюють 9 осіб, на пошитті виробу – 15 осіб. Витрати тканини кожного виду на пошиття одного швейного виробу, трудовитрати та прибуток від реалізації одного виробу наведено в наступній таблиці:

	Костюм	Сукня	Штани	Піджак
Тканина I (м)	1,8	1,5	1,2	1,3
Тканина II (м)	0,6	0,4	-	0,2
Розкрій (хв)	70	60	30	50
Пошиття (хв)	90	80	60	80
Прибуток від одиниці продукції (грош. од.)	30	20	15	20

Визначити план виготовлення продукції за одну зміну (8 годин), який забезпечить найбільший прибуток від її реалізації. Скласти математичну модель задачі.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Для побудови математичної моделі задачі введемо такі позначення: x_1 – кількість костюмів, x_2 – кількість суконь, x_3 – кількість штанів, x_4 – кількість піджаків, які може виготовити швейне підприємство за зміну. Прибуток, отриманий підприємством від реалізації всієї цієї продукції, можна записати як:

$$Z = 30x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 20x_4.$$

Розглянемо обмеження, яким повинні задовольняти змінні x_j, $j = \overline{1, 4}$.

Для виготовлення швейних виробів використовують тканину двох видів. Споживання тканини не має перевищувати її запасів. Це можна записати у вигляді нерівностей:

$$\begin{aligned} &1{,}8x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}2x_3 + 1{,}3x_4 \le 200 \text{ (тканина I виду)},\\ &0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 + \phantom{1{,}2x_3} + 0{,}2x_4 \le 50 \text{ (тканина II виду)}. \end{aligned}$$

В умовах задачі задано, скільки хвилин займає розкрій одного швейного виробу. Для розкрою всієї продукції потрібно:

$$70x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 50x_4 \quad \text{хвилин.}$$

На ділянці розкрою працюють 9 осіб. Кожна з них працює 8 годин, тобто 480 хвилин. Необхідний для розкрою всієї продукції час не повинен перевищувати $9 \cdot 480 = 4320$ хвилин. Це можна записати у вигляді нерівності:

$$70x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 50x_4 \le 4320 \qquad \Rightarrow$$

$$7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 432.$$

Розглядаючи час, необхідний для пошиття всієї продукції, і враховуючи, що пошиттям займається 15 осіб (кожна 8 годин), отримаємо обмеження:

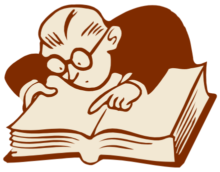
$$90x_1 + 80x_2 + 60x_3 + 80x_4 \le 15 \cdot 480 \qquad \Rightarrow$$

$$9x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 8x_4 \le 720.$$

За змістом задачі всі змінні x_j не можуть бути від'ємними. Таким чином, математична модель задачі запишеться у вигляді:

$$Z = 30x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 20x_4 \to \max$$

$$\begin{cases} 1{,}8x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}2x_3 + 1{,}3x_4 \le 200, \\ 0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 \qquad\qquad + 0{,}2x_4 \le 50, \\ \;\; 7x_1 + \;\; 6x_2 + \;\; 3x_3 + \;\; 5x_4 \le 432, \\ \;\; 9x_1 + \;\; 8x_2 + \;\; 6x_3 + \;\; 8x_4 \le 720, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 4}. \end{cases}$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Побудувати математичні моделі задач із номерами **2 – 8**.

2. Автомобільний завод випускає вантажівки трьох типів – А, Б і В, причому прибуток від однієї вантажівки становить відповідно 1800, 2300 і 7000 грошових одиниць.

У таблиці наведено виробничі потужності окремих ділянок з випуску вантажівок:

Виробничі ділянки _	Кількість машин на рік		
	А	Б	В
Підготовка виробництва	180	150	120
Кузовний цех	120	180	160
Шасі	180	160	120
Двигуни	200	150	120
Збиральний цех	240	200	100
Випробування	200	200	110

Визначити план випуску вантажівок, що максимізує прибуток заводу, якщо машин типу А потрібно зробити не більше 40.

3. Для відгодівлі тварин на фермі до їх щотижневого раціону необхідно включати не менше 33 одиниць поживної речовини А, 22 одиниць поживної речовини В і 12 одиниць поживної речовини С. Для відгодівлі використовуються 3 види кормів. Дані про вміст поживних речовин та вартість однієї вагової одиниці кожного з кормів наведено в таблиці:

	A	B	C	Вартість 1 кг (грош. од.)
В 1 кг корму 1	4	3	1	0,9
В 1 кг корму 2	3	2	1	0,7
В 1 кг корму 3	2	1	2	0,4

Скласти найбільш дешевий раціон, при якому кожна тварина отримувала б необхідну кількість поживних речовин А, В, С.

4. Є дві ґрунтово-кліматичні зони, площі яких відповідно дорівнюють 0,8 та 0,6 млн. га. Визначити розміри посівних площ озимих та ярих зернових культур, необхідних для досягнення максимального виходу продукції у вартісному вираженні. Врожайність культур по зонам та вартість 1 ц зерна наведено в таблиці. Необхідно озимих отримати не менше 20 млн ц і ярих не менше 6 млн ц.

	Врожайність, ц/га		Вартість 1 ц, грош. од.
	I зона	II зона	
Озимі	20	25	80
Ярі	25	20	70

5. Зробити розпил п'ятиметрових колод на бруси розмірами 1,5 м; 2,4 м; 3,2 м у співвідношенні 7 : 3 : 5 так, щоб мінімізувати загальну суму відходів, якщо на розпил надійшло 1000 колод.

6. Редакція, що випускає плакатну продукцію, має розподілити роботу між чотирма художниками. Оплата праці художників не повинна перевищувати 8000 грош. од.; кількість паперу, відпущеного художникам, не більше 1000 аркушів, а обсяг витрачених фарб – не більше 100 літрів. Питомі витрати ресурсів показані у таблиці:

Художники / Показники	I	II	III	IV
Оплата кожного художника, ден. од./плакат	50	30	45	20
Витрата паперу кожним художником, аркуш/плакат	15	20	10	17
Витрати фарб художником, літр/плакат	0,5	0,2	0,7	0,2

Скільки плакатів треба замовити кожному художнику, щоб, вклавшись у лімітовані ресурси, вони намалювали максимальну кількість плакатів?

7. Підприємство може випускати продукцію за трьома технологічними відпрацьованими способами виробництва. При цьому за 1 годину по I способу виробництва воно випускає 20 одиниць продукції, по II – 25 одиниць, по III – 30 одиниць продукції. Кількість виробничих факторів, що витрачаються за годину при різних способах виробництва, та наявні ресурси цих факторів наведено в наступній таблиці:

Спосіб виробництва	Чинники					
	сировина	верстатний парк	робоча сила	енергія	транспорт	Інші витрати
1	2	3	7	2	1	4
2	1	4	3	1	0	2
3	3	2	4	3	1	1
Наявні ресурси, фактори	60	80	70	50	40	50

Спланувати роботу підприємства за умови отримання максимуму продукції, якщо відомо, що час роботи підприємства становить 30 годин.

8. Стандартом передбачено, що октанове число автомобільного бензину А-76 має бути не нижчим за 76, а вміст сірки в ньому – не більше 0,3%. Для виготовлення такого бензину на заводі використовується суміш із 4-х компонентів. Дані про ресурси змішуваних компонентів, їх вартість та їх октанове число, а також про вміст сірки наведено в таблиці:

Характеристика	Компоненти автомобільного бензину			
	№1	№2	№3	№4
Октанове число	68	72	80	90
Вміст сірки, %	0,35	0,35	0,3	0,2
Ресурси, т	700	600	500	300
Вартість, грош. од./т	40	45	60	90

Потрібно визначити, скільки тон кожного компонента слід використати для отримання 1000 т автомобільного бензину А-76, щоб його вартість була мінімальною.

2. ГРАФІЧНИЙ МЕТОД

За допомогою графічного методу розв'язуються задачі двох типів.

Розглянемо ці два випадки.

I. Нехай задача лінійного програмування задана у двовимірному просторі, тобто цільова функція Z залежить від двох змінних і всі обмеження містять також лише дві змінні:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \min (\max)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Обмеження можуть бути задані і у вигляді нерівностей зі знаком $\ge$.

Алгоритм графічного методу розв'язання задач лінійного програмування складається з наступних кроків:

1) будуємо на площині в декартовій прямокутній системі координат область допустимих розв'язків задачі (ОДР). Кожна нерівність визначає деяку півплощину. Область допустимих розв'язків задачі – це перетин усіх отриманих півплощин. Область допустимих розв'язків може бути порожньою, якщо система обмежень несумісна, опуклим багатокутником або необмеженою опуклою областю;

2) записуємо вектор $grad\, Z = (c_1,\ c_2)$ і будуємо його. Для цього можна взяти точку (0; 0) за початок вектора, а точку $(c_1,\ c_2)$ – за кінець вектора. Якщо числа c_1, c_2 дуже великі або дуже маленькі, тобто незручні для побудови, то можна будувати не $grad\, Z$, а $k\cdot \mathrm{grad}\, Z$, де k – будь-яке додатне число.

Вектор $grad\, Z$ направлений у бік максимального зростання функції;

3) лінії рівня функції Z – це геометричне місце точок, в яких функція Z набуває постійного значення. Якщо $Z = c_1x_1 + c_2x_2$, то лінії рівня – це прямі $c_1 x_1 + c_2x_2 = \alpha$, причому ці прямі перпендикулярні до вектора $grad\, Z$.

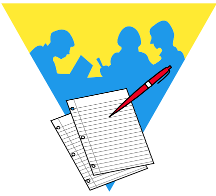
Будуємо довільну лінію рівня і пересуваємо її паралельно самій собі (перпендикулярно до вектора $grad\, Z$) у напрямку ОДР. Екстремальні точки (якщо вони існують) будуть визначатися граничними положеннями лінії рівня. Граничними положеннями лінії рівня вважають такі положення, при яких лінія рівня перетинає ОДР лише в її граничних точках;

4) знаходимо координати екстремальних точок функції та значення цільової функції у них. Записуємо відповідь. Якщо вектор $grad\, Z$ перпендикулярний до прямої, що обмежує ОДР, то граничне положення

лінії рівня у разі обмеженої області збігається з відрізком. У цьому випадку екстремальною точкою є будь-яка точка на цьому відрізку. Знаходимо координати кінців відрізка $A(a_1, a_2)$ та $B(b_1, b_2)$. Записуємо відповідь:

$$X_{опт} = t \cdot (a_1, a_2) + (1-t) \cdot (b_1, b_2), \quad \text{де } 0 \le t \le 1.$$

Зауважимо, що аналогічно можна розв’язувати найпростіші задачі тривимірного простору, але це роблять рідко, тому що важко побудувати область допустимих розв'язків задачі, яка виходить в результаті перетину півпросторів.



ПРИКЛАД

9. Фірма випускає два види морозива: вершкове та шоколадне. Для виготовлення морозива використовуються два вихідні продукти – молоко та наповнювачі, витрати яких на 1 кг морозива та добові запаси надано у таблиці:

Вихідний продукт	Витрати вихідного продукту на 1 кг морозива (кг)		Запас вихідного продукту (кг)
	вершкове	шоколадне	
молоко	0,8	0,5	400
наповнювачі	0,4	0,8	365

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на вершкове морозиво перевищує попит на шоколадне морозиво не більше ніж на 100 кг. Крім того, встановлено, що попит на шоколадне морозиво не перевищує 350 кг на добу. Роздрібна ціна 1 кг вершкового морозива 16 грош. од., шоколадного – 14 грош. од. Яку кількість кожного виду морозива повинна виготовляти фірма, щоб прибуток від реалізації продукції був максимальним?

Р О З В ’ Я З А Н Н Я

Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_1 – запланований добовий обсяг випуску вершкового морозива, через x_2 – шоколадного морозива (кг). Тоді вартість всієї продукції можна записати у вигляді

$$Z = 16x_1 + 14x_2.$$

Потрібно знайти такі значення змінних x_1 та x_2, при яких Z набуває максимального значення.

Запаси вихідних продуктів обмежені. Це можна записати у вигляді нерівностей:

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 \text{ (молоко);}$$

$$0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 \text{ (наповнювачі).}$$

За умовою добовий попит на вершкове морозиво перевищує попит на шоколадне морозиво не більше, ніж на 100 кг. Це записується у вигляді нерівності

$$x_1 - x_2 \le 100.$$

Крім того,

$$x_2 \le 350,$$

тому, що попит на шоколадне морозиво не перевищує 350 кг на добу.

Враховуючи, що $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, отримаємо математичну модель задачі:

$$Z = 16x_1 + 14x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365, \\ x_1 - x_2 \le 100, \\ x_2 \le 350, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Будуємо область допустимих розв'язків задачі. Розглянемо першу нерівність

$$0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400.$$

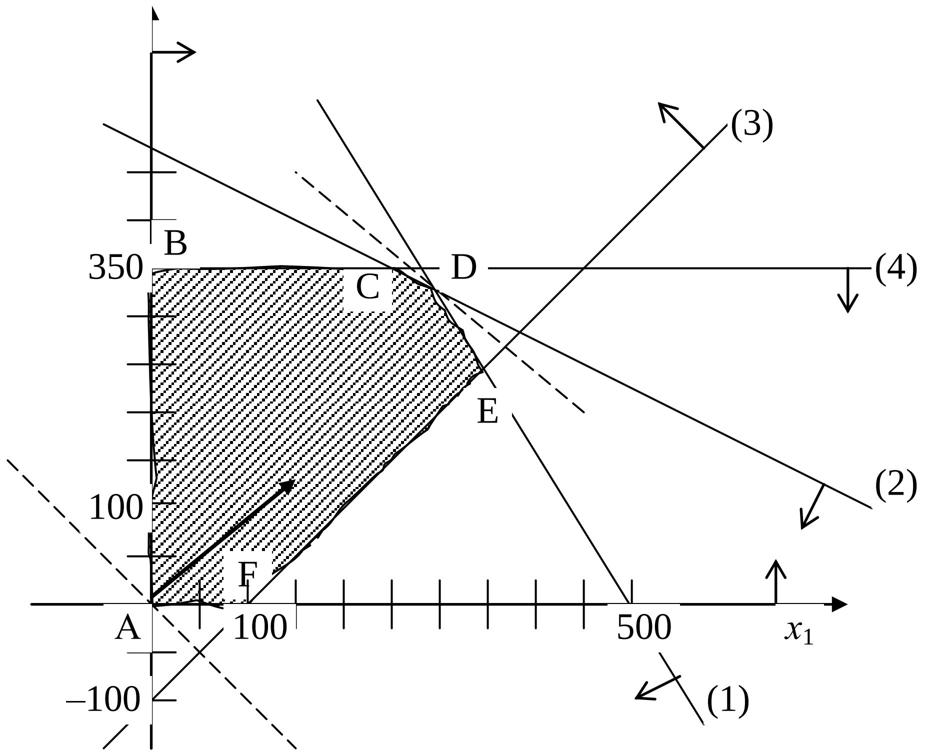
Пряму $0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400$ будуємо за двома точками:

x_1	500	300
x_2	0	320

.

Ця пряма поділяє площину на дві частини, в одній з яких нерівність виконується, а в іншій – ні. Беремо будь-яку точку, що не лежить на прямій, наприклад, початок координат. Підставляємо $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ у нерівність, отримуємо $0 \le 400$. Нерівність справедлива. Отже, точка (0; 0) лежить у тій півплощині, яка нас цікавить.

Аналогічно будуємо півплощини, розглядаючи інші нерівності. Перетин всіх півплощин у розглянутому прикладі дає многокутник ABCDEF.



У цьому прикладі $grad\,Z$ = (16; 14).

Оскільки нас цікавить тільки напрямок $grad\,Z$, а не його модуль, для зручності побудови беремо вектор $10\,grad\,Z$ = (160; 140).

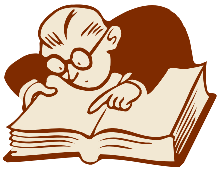
Будуємо перпендикулярно до побудованого вектора яку-небудь лінію рівня (наприклад, ту, що проходить через початок координат) і, пересуваючи її паралельно до самої себе, знаходимо граничне положення, що визначає екстремальну точку, в якій Z приймає максимальне значення.

У даному випадку це точка D. Точка D лежить на перетині першої та другої прямих, тому її координати отримаємо, розв'язав систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365. \end{cases} \Rightarrow \quad D(312{,}5;\ 300).$$

Отже, $X_{опт}$ = (312,5; 300), Z_{max} = 9200.

Таким чином, максимальний дохід 9200 грошових одиниць фірма отримає, якщо випускатиме на добу 312,5 кг вершкового морозива та 300 кг шоколадного морозива.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

Задачі з номерами **10** – **27** розв’язати графічним методом.

10. $Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min\ (\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 7, \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 7, \\ x_1 \leq 4, \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

11. $Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min\ (\max)$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ x_1 - 2x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

12. $Z = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \min\ (\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 \leq 3, \\ x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

13. $Z = 3x_1 - 3x_2 \rightarrow \min\ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -1, \\ x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ x_1 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

14. $Z = x_1 + x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6, \\ 5x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \leq 0, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

15. $Z = -x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 8, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

16. $Z = 2x_1 - 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

17. $Z = -x_1 + x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ 3x_1 + x_2 \geq 15, \\ x_1 - x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

18. 1) $Z = x_1 + x_2 \to \min\ (\max)$;

2) $Z = -x_1 + 2x_2 \to \min\ (\max)$;

3) $Z = -2x_1 - x_2 \to \min\ (\max)$;

4) $Z = 3x_1 - x_2 \to \min\ (\max)$;

5) $Z = x_1 + 3x_2 \to \min\ (\max)$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 + 3x_2 \geq 4, \\ 2x_1 - x_2 \leq 8, \\ x_1 \leq 5, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

19. $Z = 2x_1 + \lambda x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

20. $Z = -x_1 + \lambda x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + \ \ x_2 \le 2, \\ \ \ x_1 - 2x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

21. Нехай кошти банку становлять 100 млн грн. Частина цих коштів, але не менше, ніж 35 млн грн., має бути розміщена в кредитах. Цінні папери повинні становити не менше 30% коштів, розміщених у кредитах та цінних паперах. Прибутковість кредитів 15%, цінних паперів – 10%. Як мають бути розміщені кошти банку, щоб його прибуток був максимальним?

22. Саша – студент другого курсу. Він дійшов висновку, що одне лише навчання, без щоденної гри у футбол, погано впливає на його розумовий, моральний та фізичний розвиток. Тому він вирішив розподілити свій денний час (не більше 10 годин) для навчання та гри у футбол. Привабливість ігрового часу він оцінює вдвічі вище, ніж привабливість часу, витраченого навчання. Але, маючи сумління та почуття обов'язку, Саша вирішив, що час гри не повинен перевищувати час навчання. Крім того, він помітив, що якщо виконувати всі навчальні завдання, на гру залишиться не більше 4 годин на день. Допоможіть Саші розподілити свій денний час так, щоб він отримував максимум задоволення і від навчання, і від гри.

23. Обладнання заводу дозволяє випускати пиво в трьох видах тари: скляній – у кількості 800 л на добу, бляшаній – у кількості 1000 л, або пластиковій у кількості 500 л протягом доби. Допускається комбінація виробництва пива в різних типах тари в межах потужності заводу. Знайти виробничу програму підприємства, що максимізує прибуток, якщо собівартість 100 л пива становить: у скляній тарі – 140 грош. од., у бляшаній – 160 ден. од., а пластиковій – 100 грош. од. Відпускна ціна незалежно від тари становить 2,4 грош. од. за 1 літр.

24. Невелика птахоферма повинна розрахувати оптимальний раціон для відгодівлі курчат, що вирощуються нею. В наявності є два види корму : зерно та соєві боби. Вміст поживних речовин та вартість 1 кг корму наведено в таблиці:

Корм	Вміст поживних речовин, %		Вартість 1 кг корму (грош. од.)
	білок	клітковина	
Зерно	10	2	0,8
Соєві боби	50	8	1,8

Готова суміш повинна містити не менше 20% білка та не більше 5% клітковини. Визначити масу кожного з двох видів кормів, що утворюють раціон мінімальної вартості, якщо кожне курча повинно отримувати на день не менше 500 г суміші.

25. З пункту А до пункту В щодня відправляються пасажирські та швидкі потяги. У таблиці наведено наявний парк вагонів різних типів, з яких щодня можна комплектувати дані потяги, та кількість пасажирів, що вміщуються в кожному з вагонів:

Вагон	Потяг		Число пасажирів	Парк вагонів
	швидкий	пасажирський		
Багажний	1	1	–	12
Поштовий	1	–	–	8
Плацкартний	5	8	54	81
Купейний	6	4	36	70
СВ	3	1	18	26

Визначити оптимальну кількість швидких і пасажирських потягів, при яких кількість пасажирів, що перевозяться, досягає максимуму.

26. Фірма має можливість рекламувати свої вироби за допомогою радіо та телебачення. Витрати в бюджеті фірми на рекламу обмежені величиною 1200 грош. од. на місяць. Кожна хвилина радіореклами коштує 10 грош. од., а телереклами – 100 грош. од. Фірма хоче використовувати радіоканал принаймні в 2 рази частіше, ніж телеканал. Відомо, що одна хвилина телереклами дає в 25 разів більше збуту виробів, ніж одна хвилина радіореклами. Знайти оптимальний розподіл фінансових коштів, які відпускаються щомісяця на рекламу.

27. Фірма виготовляє два види фарб: для внутрішніх та зовнішніх робіт. Для їх виробництва використовують пігмент та оліфу. Витрата вихідних продуктів та максимальні добові запаси вказані в таблиці:

Вихідний продукт	Витрата на 1 т фарби		Добовий запас, т
	Для внутрішньо. робіт, т	для зовнішн. робіт, т	
Пігмент	1	2	6
Оліфа	2	1	8

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на фарбу для внутрішніх робіт не менше, ніж на фарбу для зовнішніх робіт, проте не може перевищувати його більш ніж на 3 т на добу. Ціна продажу 1 т фарби для внутрішніх робіт – 2000 грош. од., для зовнішніх – 4000 грош. од. Яку кількість фарби кожного виду повинна виробляти фірма, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним?

II. За допомогою графічного методу можна розв'язувати задачі лінійного програмування, система обмежень яких містить n невідомих і m лінійно незалежних рівнянь, причому $n - m = 2$.

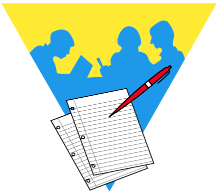
Використовуючи метод повного виключення, виконуємо m виключень (робимо m кроків), у результаті чого отримуємо загальний розв'язок системи обмежень. Базисних змінних m, вільних змінних $n - m = 2$. Таким чином, всі змінні виражаються через дві вільні змінні. Функцію цілі

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

також виражаємо через ці дві вільні змінні, використовуючи $X_{заг}$.

Після цього можемо записати задачу першого типу, еквівалентну вихідній. Розв'язуємо цю задачу графічним методом. В результаті отримуємо екстремальне значення Z та відповідні значення вільних змінних. За допомогою загального розв'язку знаходимо значення базисних змінних та записуємо $X_{опт}$.

Розглянемо приклад.



ПРИКЛАД

28. Для виробництва продукції 5 видів підприємство використовує 3 види сировини. Норми витрати сировини кожного виду на виробництво всіх видів продукції, запаси сировини та прибуток, що отримується від реалізації одиниці кожного виду продукції, наведено в таблиці:

Сировина \ Продукція	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	Запаси сировини
S_1	1	3	2	–	1	200
S_2	2	1	–	1	1	200
S_3	–	1	2	1	1	100
Прибуток (грош. од.)	1	2	3	1	2	

Знайти план виробництва продукції, що забезпечує максимальний прибуток за умови, що це підприємство буде переорієнтоване на випуск продукції з іншого виду сировини і, отже, ці запаси сировини мають бути повністю використані.

Р О З В ' Я З А Н Н Я

Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_j $(j = \overline{1, 5})$ план виробництва j-ї продукції. Тоді прибуток, що буде отриманий від реалізації всієї продукції, можна записати у вигляді:

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5.$$

Потрібно знайти такий план випуску продукції $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, при якому Z набуває максимального значення.

Для виробництва використовується три види сировини. Споживання сировини має дорівнювати її запасам, тому що за умовою задачі запаси сировини повинні бути повністю використані. Зв'язок між використанням сировини та її запасами запишемо у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 = 200 \quad (\text{сировина}\, S_1), \\ 2x_1 + \ \ x_2 \qquad + x_4 + x_5 = 200 \quad (\text{сировина}\ S_2), \\ \qquad x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 100 \quad (\text{сировина}\ S_3). \end{cases}$$

Система рівнянь відповідно до економічного змісту задачі має бути доповнена умовами невід'ємності змінних x_j ($j = \overline{1, 5}$).

Таким чином, отримано математичну модель задачі:

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 \ \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \qquad + x_5 = 200, \\ 2x_1 + \ \ x_2 \qquad + x_4 + x_5 = 200, \\ \qquad x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 100, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

У цьому випадку кількість змінних $n = 5$, число рівнянь $m = 3$, $n - m = 2$. Використовуємо метод повного виключення.

Усі обчислення оформлюємо у вигляді таблиці:

1	3	2	0	1	200
2	1	0	1	1	200
0	1	2	1	1	100
1	3	2	0	1	200
2	1	0	1	1	200
–2	0	2	0	0	–100
1	3	2	0	1	200
1	–2	–2	1	0	0
–2	0	2	0	0	–100
3	3	0	0	1	300
–1	–2	0	1	0	–100
–1	0	1	0	0	–50

Змінні x_3, x_4, x_5 – базисні, x_1, x_2 – вільні. Записуємо загальний розв’язок системи:

$$X_{заг} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -50 + x_1 \\ -100 + x_1 + 2x_2 \\ 300 - 3x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

Виражаємо функцію Z через вільні змінні x_1, x_2. Для цього у вихідну функцію $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5$ підставляємо:

$x_3 = -50 + x_1$; $x_4 = -100 + x_1 + 2x_2$; $x_5 = 300 - 3x_1 - 3x_2$.

Отримуємо:

$Z = x_1 + 2x_2 + 3(-50 + x_1) + (-100 + x_1 + 2x_2) + 2(300 - 3x_1 - 3x_2) =$

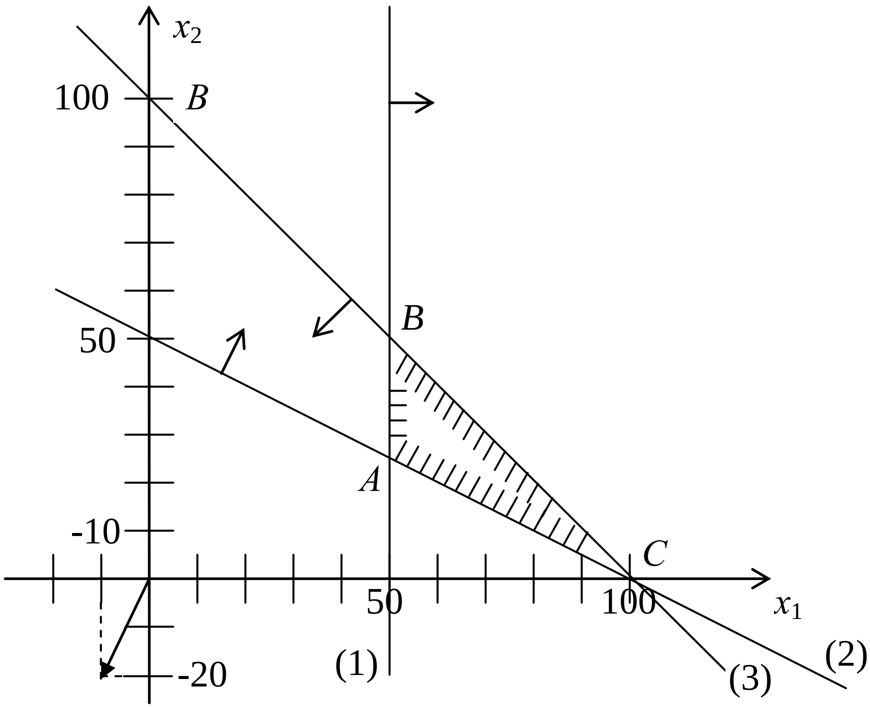
$= -x_1 - 2x_2 + 350.$

Оскільки за умовою $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,5}$, вихідну задачу можемо замінити наступною:

$$Z = -x_1 - 2x_2 + 350 \to \max$$

$$\begin{cases} -50 + x_1 \geq 0, \\ -100 + x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ 300 - 3x_1 - 3x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \geq 50, \\ x_1 + 2x_2 \geq 100, \\ x_1 + x_2 \leq 100, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Отримали задачу першого типу, розв'язок якої було розглянуто вище. Будуємо область допустимих розв'язків та *grad* Z. У цьому прикладі *grad* Z = (–1; –2). Для зручності побудови замість *grad* Z будуємо вектор 10·*grad* Z = (–10, –20).



Функція Z набуває максимального значення на відрізку AC. Точка A має координати $x_1 = 50$; $x_2 = 25$, тобто $A(50; 25)$. Точка C має координати $x_1 = 100$; $x_2 = 0$, тобто $C(100, 0)$. Підставляємо ці координати в $X_{заг}$ та отримуємо два оптимальні розв’язки X_1 та X_2:

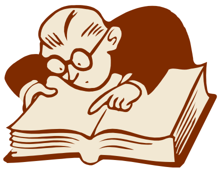
$$X_1 = (50; 25; 0; 0; 75); \quad X_2 = (100; 0; 50; 0; 0); \quad Z(X_1)=Z(X_2) = 250.$$

Оптимальним розв’язком буде будь-який розв’язок виду:

$$X = t\cdot X_1 + (1 - t)\cdot X_2 = t\cdot(50; 25; 0; 0; 75) + (1 - t)\cdot(100; 0; 50; 0; 0) =$$
$$= (100 - 50t; 25t; 50 - 50t; 0; 75t), \text{ де } 0\le t \le 1.$$

Таким чином, $X_{опт} = (100 - 50t; 25t; 50 - 50t; 0; 75t)$, $0\le t \le 1$;

$$Z_{max} = 250.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

Задачі з номерами **29** – **41** розв’язати графічним методом.

29. $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

30. $Z = x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

31. $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

32. $Z = 2x_1 + 2x_3 - x_4 - 1 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

33. $Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

34. $Z = -3x_1 + x_4 + 1 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 5x_1 - x_2 + x_5 = 10, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

35. $Z = x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

36. $Z = 10x_1 - x_2 + x_3 - 6x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 18, \\ -2x_1 + 5x_2 - x_4 + x_5 = 13, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

37. $Z = x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -9, \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

38. Для виготовлення певного сплаву зі свинцю, цинку та олова використовується сировина у вигляді наступних п'яти сплавів з тих же металів, що відрізняються складом та вартістю 1 кг:

Метали	Вміст у сплавах (%)				
	I	II	III	IV	V
Свинець	20	20	40	40	60
Цинк	20	40	20	60	20
Олово	60	40	40	–	20
Вартість (грош. од.)	30	40	40	50	40

Визначити, у яких співвідношеннях потрібно взяти сплави, щоб виготовити сплав мінімальної вартості, що містить 40% свинцю, 40% цинку та 20% олова.

39. Для виготовлення брусів трьох розмірів: 0,6 м, 1,5 м і 2,5 м у співвідношенні 2 : 1 : 3 на розпил надходять колоди завдовжки 3 м. Визначити план розпилу, що забезпечує максимальну кількість комплектів.

40. Фірма має капітал 200 000 грош. од, які можуть бути вкладені в два інвестиційні проекти: проект А гарантує отримання прибутку в розмірі 60% від вкладених у проект коштів щорічно, а проект В – прибутку в розмірі 200%, проте лише через 2 роки після розміщення грошей. Як необхідно розпорядитися капіталом, щоб отримати максимальний дохід наприкінці третього року інвестування?

41. З двох заводів поставляються автомобілі для трьох автогосподарств, потреби яких відповідно 50, 70, 60 автомобілів. Перший завод випустив 100 автомобілів, а другий – 80. Відомо, що витрати на перевезення 1 автомобіля з першого заводу в автогосподарства відповідно дорівнюють 2, 3, 1 грош. од., а з другого заводу – 1, 2, 1 ден. од. Знайти оптимальний план перевезень, який мінімізує витрати на перевезення автомобілів.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називається допустимим та оптимальним розв'язками задачі ЛП?
2. Які задачі ЛП можна розв'язувати графічним методом?
3. Яка область називається областю допустимих розв'язків?
4. Що таке градієнт функції та що він показує?
5. У чому полягає сутність графічного методу розв'язання задач ЛП?
6. Як визначити за малюнком, що задача: а) має єдиний розв'язок; б) має безліч розв'язків; в) не має розв'язків?

3. СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

Симплексний метод є обчислювальною процедурою, в основі якої лежить упорядкований перебір допустимих базисних розв’язків (ДБР), при якому на кожному кроці здійснюється наближення до оптимального розв’язку.

Перед розв'язанням задачі симплексним методом її необхідно привести до канонічного вигляду. Задача лінійного програмування називається ***канонічною***, якщо в ній: а) цільова функція досліджується на мінімум; б) усі змінні невід'ємні; в) всі основні обмеження є рівняннями з невід'ємними правими частинами. Таким чином:

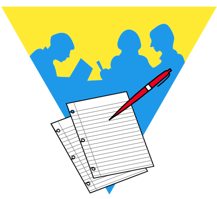
$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \to \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (b_i \geq 0), \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Будь-яку задачу лінійного програмування можна привести до канонічного вигляду. Від задачі на максимум переходимо до задачі на мінімум, використовуючи формулу $\max Z = -\min(-Z)$. Якщо права частина основного обмеження від’ємна, обидві частини цього обмеження множимо на (–1). Нерівності за допомогою додаткових змінних перетворюємо на рівності.

3.1. Симплексний метод з природним базисом

Розглянемо найпростіший випадок, коли після приведення до канонічного вигляду матриця основних обмежень містить одиничні вектор-стовпці, що утворюють базис (іншими словами, кожне рівняння системи основних обмежень має базисну змінну). Розглянемо застосування методу на конкретному прикладі.



ПРИКЛАД

42. Нафтопереробний завод отримав три напівфабрикати: 100 тисяч літрів крекінг-бензину, 400 тисяч літрів бензину прямої перегонки та 360 тисяч літрів ізопентону. В результаті змішування цих трьох компонентів у різних пропорціях утворюються три сорти авіаційного бензину: бензин А – 2 : 2 : 6, бензин В – 0 : 4 : 1, бензин С – 2 : 4 : 4. Вартість 1 тисячі літрів зазначених сортів бензину дорівнює 1600, 600 та 1400 грош. од. відповідно. Визначити план виробництва бензину, який забезпечить максимальну вартість всієї продукції.

Р О З В ’ Я З А Н Н Я

Складемо математичну модель даної економічної задачі. Позначимо через x_1 заплановану кількість одиниць бензину А, через x_2 – бензину В, через x_3 – бензину С (у тисячах літрів). Тоді вартість всієї продукції можна записати у вигляді:

$$Z = 1600x_1 + 600x_2 + 1400x_3.$$

Метою задачі є знаходження таких значень x_1, x_2, x_3, за яких Z набуває максимального значення.

За умовою задачі кожен бензин отримується в результаті змішування у відповідній пропорції трьох компонентів. Тому x_1 одиниць бензину А містить $\frac{2}{10}x_1$ крекінг-бензину, $\frac{2}{10}x_1$ бензину прямої перегонки та $\frac{6}{10}x_1$ ізопентону. Аналогічно x_2 одиниць бензину В містить $\frac{4}{5}x_2$ бензину прямої перегонки та $\frac{1}{5}x_2$ ізопентону, а x_3 одиниць бензину С містить $\frac{2}{10}x_3$ крекінг-бензину, $\frac{4}{10}x_3$ бензину прямої перегонки та $\frac{4}{10}x_3$ ізопентону. Кількість використаного напівфабрикату не повинна перевищувати його кількість, яка є в наявності на заводі.

Це можна записати у вигляді нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{2}{10}x_1 \qquad\qquad + \frac{2}{10}x_3 \le 100 \quad \text{(крекінг-бензин)}, \\ \frac{2}{10}x_1 + \frac{4}{5}x_2 + \frac{4}{10}x_3 \le 400 \quad \text{(бензин прямої перегонки)}, \\ \frac{6}{10}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{4}{10}x_3 \le 360 \quad \text{(ізопентон)}. \end{cases}$$

Виходячи з економічного змісту задачі змінні x_j, $j = \overline{1,3}$ можуть приймати тільки невід'ємні значення.

Таким чином, отримали математичну модель задачі:

$$Z = 1600x_1 + 600x_2 + 1400x_3 \ \rightarrow \ \max$$

$$\begin{cases} \frac{2}{10}x_1 \qquad\qquad + \frac{2}{10}x_3 \le 100, \\ \frac{2}{10}x_1 + \frac{4}{5}x_2 + \frac{4}{10}x_3 \le 400, \\ \frac{6}{10}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{4}{10}x_3 \le 360, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Функцію Z можна записати у вигляді:

$$Z = 200\cdot(8x_1 + 3x_2 + 7x_3).$$

Очевидно, що функції Z та $Z_1 = 8x_1 + 3x_2 + 7x_3$ приймають максимальні значення при одних і тих же значеннях змінних x_j, тому доцільно для спрощення обчислень використовувати функцію Z_1.

Перетворюючи нерівності (множимо їх на 5) та використовуючи функцію Z_1, отримаємо задачу:

$$Z_1 = 8x_1 + 3x_2 + 7x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 \phantom{{}+4x_2} + x_3 \le 500, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 2000, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 1800, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

Зводимо задачу до канонічного вигляду. Замість знаходження максимуму функції Z_1 знаходимо мінімум функції

$$-Z_1 = -8x_1 - 3x_2 - 7x_3.$$

Усі основні обмеження – нерівності. Оскільки ліві частини обмежень не перевищують правих частин, нерівності перетворюємо на рівності, додаючи до лівої частини кожного обмеження невід'ємну додаткову змінну.

Після цих перетворень маємо задачу:

$$Z_2 = -Z_1 = -8x_1 - 3x_2 - 7x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 500, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_5 = 2000, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_6 = 1800, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Для розв’язання задачі симплексним методом необхідно знайти початковий допустимий базисний розв’язок (ДБР). Випишемо матрицю A системи основних обмежень та вектор B правих частин:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad B = \begin{pmatrix} 500 \\ 2000 \\ 1800 \end{pmatrix}.$$

Одиничні вектори A_4, A_5, A_6 утворюють базис тривимірного простору. Змінні x_4, x_5, x_6 – базисні; x_1, x_2, x_3 – вільні. Вважаючи вільні змінні в обмеженнях рівними нулю, отримаємо початкове ДБР: $X_0 = (0; 0; 0; 500; 2000; 1800)$. Оформлюємо таблицю:

i	Базис	$C_Б$	B	–8	–3	–7	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	500	1	0	1	1	0	0
2	A_5	0	2000	1	4	2	0	1	0
3	A_6	0	1800	3	1	2	0	0	1
4			0	8↑	3	7	0	0	0
1	A_1	–8	500	1	0	1	1	0	0
2	A_5	0	1500	0	4	1	–1	1	0
3	A_6	0	300	0	1	–1	–3	0	1
4			–4000	0	3↑	–1	–8	0	0
1	A_1	–8	500	1	0	1	1	0	0
2	A_5	0	300	0	0	5	11	1	–4
3	A_2	–3	300	0	1	–1	–3	0	1
4			–4900	0	0	2↑	1	0	–3
1	A_1	–8	440	1	0	0	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
2	A_3	–7	60	0	0	1	$\frac{11}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$
3	A_2	–3	360	0	1	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
4			–5020	0	0	0	$-\frac{17}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{7}{5}$

У симплексній таблиці на кожному кроці $m + 1$ рядок (m – число основних обмежень). У перші три рядки вихідної таблиці заносимо дані задачі (вектори A_j, $j = \overline{1,6}$ та вектор B). Над векторами A_j записуємо коефіцієнти c_j цільової функції ($c_1 = –8$; $c_2 = –3$; $c_3 = –7$; $c_4 = c_5 = c_6 = 0$).

$C_Б$ – це вектор-стовпець, що складається з коефіцієнтів цільової функції при базисних змінних. В даному випадку:

$$C_Б = \begin{pmatrix} c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо та записуємо у четвертому рядку поточне значення функції цілі та оцінки Δ_j:

$$Z_0 = C_Б \cdot B = 0 \cdot 500 + 0 \cdot 2000 + 0 \cdot 1800 = 0;$$
$$\Delta_1 = C_Б \cdot A_1 - c_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 - (-8) = 8;$$
$$\Delta_2 = C_Б \cdot A_2 - c_2 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 - (-3) = 3;$$
$$\Delta_3 = C_Б \cdot A_3 - c_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2 - (-7) = 7.$$

Для векторів базису Δ_j завжди дорівнюють нулю:

$$\Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0.$$

Справедливі такі твердження:

I. Якщо для цього ДБР усі оцінки $\Delta_j \le 0$, то цей розв'язок оптимальний (при розв'язанні задачі на мінімум).

II. Якщо для деякого небазисного вектора $A_к$ оцінка $\Delta_к > 0$, а всі елементи вектора $A_к$ недодатні, то цільова функція даної задачі необмежена. Обчислення закінчуємо.

III. Якщо при розв'язанні задачі на min є така додатна оцінка $\Delta_к > 0$, що серед координат вектора $A_к$ є додатні, то кращий базисний розв'язок можна отримати включенням в базис вектора $A_к$.

Якщо є декілька оцінок $\Delta_j > 0$, серед них доцільно вибрати найбільшу.

Переглядаємо оцінки Δ_j цього прикладу. Оскільки серед оцінок Δ_j є додатні, розв'язок X_0 не є оптимальним. Будуємо нове ДБР. Найбільша додатна оцінка $\Delta_1 = 8$. Отже, в базис включаємо вектор A_1. Для визначення вектора, що виключається з базису, обчислюємо для всіх додатних елементів стовпця A_1 симплексне відношення (відношення правої частини до елемента стовпця). За провідний елемент беремо той додатний елемент стовпця, для якого симплексне відношення мінімальне.

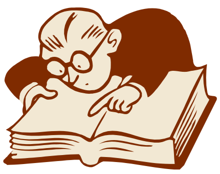
В даному випадку: $\min\left(\frac{500}{1}; \frac{2000}{1}; \frac{1800}{3}\right) = \frac{500}{1}$.

Провідний елемент 1 обводимо кружком. Із базису виключаємо вектор A_4. Усі елементи таблиці, які розташовані у стовпцях B та A_j ($j = \overline{1,6}$) обчислюємо, використовуючи метод повного виключення. Після трьох кроків у четвертому рядку таблиці всі $\Delta_j \le 0$. Отже, знайдено оптимальний розв'язок.

Записуємо відповідь:

$$X_{опт} = (440; 360; 60), \quad (Z_2)_{\min} = (-Z_1)_{\min} = -5020 \quad \Rightarrow$$

$$X_{опт} = (440; 360; 60), \quad Z_{\max} = 200 \cdot 5020 = 1004000.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задачі з номерами **43** – **62** розв'язати симплексним методом.

43. $Z = -x_1 - 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

44. $Z = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -3, \\ 4x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

45. $Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 9, \\ x_1 - x_2 \ge -4, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

46. $Z = -x_1 - x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

47. $Z = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge -2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

48. $Z = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

49. $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

50. $Z = 2x_1 + x_3 + x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4, \\ -2x_1 + x_2 + x_5 = 3, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

51. $Z = x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = 7, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 7, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

52. $Z = 6x_1 - 7x_2 - 6x_3 + 10x_5 - 7x_6 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 = 5, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

53. $Z = x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 \le 2, \\ 2x_1 - 2x_3 + x_4 \le 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

54. $Z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

55. $Z = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 - x_4 \le 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 \le 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

56. $Z = 3x_1 - x_3 + x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 5, \\ 2x_2 + 3x_3 \leq 4, \\ x_1 - 2x_3 \leq 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

57. $Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2, \\ 3x_1 + x_3 \leq 10, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

58. Продукція чотирьох видів A, B, C, D проходить послідовну обробку на верстатах двох типів. Час обробки одиниці продукції кожного виду подано у таблиці:

Верстати	Час обробки одиниці продукції, (годин)			
	A	B	C	D
I тип	1	2	1	2
II тип	2	1	3	2

Вартість однієї верстато-години становить 10 грош. од. для верстатів I типу та 12 грош. од. для верстатів II типу. Максимально можливий час використання верстатів I типу становить 210 верстато-годин на місяць, а верстатів II типу – 150 верстато-годин. Вивчення ринку збуту показало, що попит на продукцію B не менше, ніж сумарний попит на продукцію A та C. В той самий час попит на продукцію D ніколи не перевищує попит на продукцію C більше, ніж на 30 одиниць на місяць. Ціна реалізації одиниці продукції кожного виду становить відповідно 36, 33, 48, 47 грош. од. Визначити оптимальний план виробництва, що максимізуює прибуток.

59. Механічний цех може виготовити за зміну або 500 деталей A, або 1500 деталей B, або 1500 деталей C, або будь-яку їх комбінацію в межах своєї потужності. Виробнича потужність термічного цеху, куди ці деталі надходять на загартування, дозволяє обробити або 1600 деталей A , або 800 деталей B, або 800 деталей C, або їх допустиму комбінацію. Деталі A та C потім надходять до третього цеху, пропускна здатність якого не перевищує 400 деталей за зміну. Визначити щоденну виробничу програму випуску деталей, при якій буде досягнуто максимальний дохід, якщо деталь A реалізується за ціною 3 грош. од., B – 1 грош. од., а деталь C – 2 грош. од.

60. Менеджер з цінних паперів має намір розмістити капітал (не більше 100 000 грош. од.) таким чином, щоб через рік отримати максимальний прибуток від вкладень. Його вибір обмежений трьома можливими об'єктами інвестицій: A, B та C. Об'єкт A дозволяє отримувати 16%, об'єкт B – 14%, C – 20% річних. Щоб зменшити ступінь ризику, менеджер прийняв рішення, що не менше половини капіталу необхідно інвестувати в об'єкти A та B, а для забезпечення ліквідності – не менше 25% в об'єкт C. Крім того, особливості податкової політики вимагають, щоб в об'єкт A було вкладено щонайменше 30% капіталу. Знайти оптимальний розподіл інвестицій.

61. Фірма має можливість рекламувати свою продукцію, використовуючи для цього телебачення, радіо та газети. Витрати на рекламу в бюджеті фірми обмежені сумою 10 000 грош. од. на місяць. Досвід минулих років показав, що 1 грош. од, витрачена на телерекламу, дає фірмі прибуток у розмірі 5 грош. од, а витрачена на рекламу по радіо та в газетах – відповідно 2 і 4 грош. од. Фірма має намір використовувати на теле- та радіорекламу не більше 80% рекламного бюджету, і при цьому витрати на радіорекламу мають становити не менше 50% витрат на рекламу в газетах. Знайти такий варіант розподілу рекламного бюджету, який дає фірмі найбільший прибуток під час рекламування своєї продукції.

62. Фірма, що спеціалізується на виробництві м'яких іграшок, планує випускати слоненят і ведмежат. Щоденний фонд робочого часу становить 320 годин, а сировини – 500 одиниць. На виготовлення одного слоненя потрібно 1 година робочого часу та 3 одиниці сировини, а на виготовлення одного ведмежа – 2 години та 2 одиниці сировини. Прибуток від реалізації одного слоненя – 10 грош. од., а ведмежа – 12 грош. од. При необхідності керівництво фірми може дозволити щодня до 20 годин понаднормової роботи з доплатою 2 грош. од. за кожну понаднормову годину. Визначити оптимальний план виробництва іграшок, що максимізує щоденний прибуток фірми.

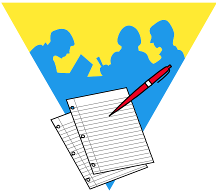
3.2. Розв'язання задач симплексним методом із попередньою побудовою допустимого базисного розв’язку

Перед розв'язанням задачі симплексним методом її необхідно привести до канонічного вигляду. Після цього необхідно знайти початковий допустимий базисний розв’язок (ДБР). Найпростіший випадок, коли матриця **A** системи основних обмежень містить m одиничних вектор-стовпців, що утворюють базис, було розглянуто у п. 3.1. (m – число основних обмежень).

Нехай система основних обмежень така, що матриця **A** не містить m одиничних векторів, що утворюють базис. Тоді, щоб можна було застосувати симплексний метод, необхідно спочатку побудувати ДБР.

Обчислення оформляємо у вигляді таблиці. Базисним можна зробити будь-який стовпець, у якого є хоча б один додатний елемент. За провідний елемент вибирається той додатний елемент стовпця, для якого симплексне відношення мінімальне. Всі елементи таблиці перераховуємо методом повного виключення.

Процес побудови ДБР закінчуємо, коли отримаємо m одиничних векторів, що утворюють базис. Після цього можна застосувати симплексний метод, розглянутий у п. 3.1. Побудову ДБР можна оформляти як окремою таблицею, і частиною симплексної таблиці.



ПРИКЛАД

63. Розв'язати задачу симплексним методом, попередньо побудувавши ДБР.

$$Z = -7x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 - x_3 \qquad\qquad\quad = 8, \\ \ \ x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 \qquad = 6, \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 \qquad\qquad + x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Р О З В ’ Я З А Н Н Я

Матриця системи основних обмежень містить один одиничний вектор

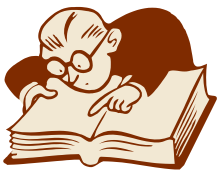
$\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Для отримання ДБР необхідно мати вектори $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Розв’язання оформлюємо у вигляді таблиці.

На першому кроці вибрали другий стовпець і провідним елементом взяли 2, так як $\min\left(\frac{8}{1}; \frac{6}{2}\right) = \frac{6}{2}$. На другому кроці провідний елемент $1/2$, тому що це єдиний додатний елемент четвертого стовпця. Зауважимо, що якби на першому кроці провідний елемент вибрали з елементів першого стовпця, то прийшли б до іншого ДБР. Після отримання ДБР можна застосувати симплексний метод з природним базисом.

i	Базис	$C_Б$	B	-7	1	2	0	-2
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	–	–	8	3	1	–1	0	0
2	–	–	6	1	2	0	–1	0
3	A_5	–2	3	1	–1	0	0	1
1	–	–	5	$5/2$	0	–1	$1/2$	0
2	A_2	1	3	$1/2$	1	0	$-1/2$	0
3	A_5	–2	6	$3/2$	0	0	$-1/2$	1
1	A_4	0	10	5	0	–2	1	0
2	A_2	1	8	3	1	–1	0	0
3	A_5	–2	11	4	0	–1	0	1
4			–14	2↑	0	-1	0	0
1	A_1	–7	2	1	0	$-2/5$	$1/5$	0
2	A_2	1	2	0	1	$1/5$	$-3/5$	0
3	A_5	–2	3	0	0	$3/5$	$-4/5$	1
4			–18	0	0	$-1/5$	$-2/5$	0

Відповідь: $X_{опт} = (2; 2; 0; 0; 3)$; $Z_{min} = -18$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задачі з номерами **64 – 78** розв'язати симплексним методом, попередньо побудувавши ДБР.

64. $Z = -5x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

65. $Z = -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 9, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 5, \\ x_2 + x_4 + x_5 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

66. $Z = -6x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

67. $Z = -2x_1 - x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

68. $Z = 5x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

69. $Z = 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 9, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

70. $Z = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

71. $Z = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_6 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

72. $Z = x_1 + x_2 - x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + \ \ x_3 = 4, \\ \ \ x_1 \qquad - 2x_3 \le 5, \\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad \ge 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

73. $Z = x_1 + 4x_2 - 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} \ \ 2x_1 + \ \ x_2 \qquad\quad \le 13, \\ -4x_1 - 3x_2 + 3x_3 \le -9, \\ \ \ \ x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 = 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

74. До складу раціону годування дитини входять три продукти – суміші «Малюк», «Крепиш» та «Силач», що містять вітаміни А, В, С. Вміст вітамінів, мінімальні норми їх споживання на добу та вартість сумішей подано в таблиці. Визначити оптимальний раціон годування дитини за умови мінімальної вартості харчування, якщо гранично допустима сумарна кількість сумішей на добу – 1 кг 200 г.

Вітаміни / Суміші	А (умов. од. на 100 г)	В (умов. од. на 100 г)	С (умов. од. на 100 г)	Вартість 100 г, (грош. од.)
«Малюк»	10	4	2	0,8
«Крепиш»	20	3	1	0,6
«Силач»	30	4	1	0,75
Норми спожив.(умов. од.)	240	35	10	

75. З відходів виробництва підприємство може організувати випуск двох видів продукції: А і В. Для цього воно планує використовувати два типи обладнання, що взаємозамінюється. Кількість виробів кожного виду, що може бути виготовлена на відповідному устаткуванні протягом 1 години, а також витрати, пов'язані з виробництвом одного виробу, наведено в таблиці:

Тип обладнання _	Кількість виробів, що виробляються протягом 1 год.		Витрати (грош. од.), пов'язані з виробництвом протягом 1 год. виробів виду	
	А	В	А	В
I	3	2	11	8
II	2	1	6	3

Обладнання I типу може бути використане не більше 90 годин, а II типу – не більше 60 годин. Підприємству необхідно виготовити виробів виду А не менше 100 одиниць, виду В – не менше 120 одиниць. Визначити протягом якого часу і на якому обладнанні слід виготовляти вироби так, щоб витрати на виробництво були мінімальні.

76. Фірма планує організувати виробництво двох видів продукції А та В, маючи для цього інвестиційний фонд у розмірі 5 000 грош. од. У разі потреби фірма може збільшити цю суму, взявши в банку кредит на суму, що не перевищує 10 000 грош. од. Витрати на виробництво одиниці продукції А та В становлять 70 і 100 грош. од., а очікуваний прибуток від реалізації одиниці виготовленої продукції – 15 і 25 грош. од. відповідно. Фірма має попереднє замовлення на виробництво 30 одиниць продукції А та 40 одиниць продукції В. Визначити оптимальні розмір кредиту та обсяг виробництва продукції кожного виду, які забезпечать фірмі найбільший прибуток, якщо процентна ставка за використання кредиту становить:

1) 20%;
2) 30%.

77. Консервний завод із двох сортів помідорів випускає 4 види продукції: томатний соус, томатну пасту, томатний сік та кетчуп. Кількість помідорів, що йдуть на виготовлення кожного виду продукції, наявність помідорів та оптові ціни на продукцію надано в таблиці:

Сорт помідорів	Кількість помідорів, що йдуть на виготовлення 1 кг продукції (кг)				Запаси помідорів (кг)
	Томатний соус	Томатна паста	Томатний сік	Кетчуп	
А	1	3	1	2	4000
В	2	2	1	1	3000
Оптова ціна 1 кг (грош. од.)	7	8	2	6	

Маркетингові дослідження показують, що томатний соус повинен становити не більше 20 % усієї продукції, а томатний сік через підвищений на нього попит – принаймні 50 %. Крім того, так як помідори – продукт, що швидко псується, то завод повинен за тиждень переробити всі наявні помідори. Скласти виробничий тижневий план випуску продукції, що максимізує дохід заводу.

3.3. Симплексний метод зі штучним базисом

Нехай система основних обмежень така, що матриця A не містить m одиничних векторів, які утворюють базис. Метод штучного базису полягає у побудові допоміжної задачі та розв'язанні її алгоритмом симплексного методу.

Допоміжна задача (M-задача) отримується з канонічної шляхом введення штучних базисних змінних у цільову функцію та ті рівняння, які не містять базисної змінної. У цільову функцію штучні змінні вводяться з коефіцієнтом $M > 0$, який вважається нескінченно великою додатною величиною. Такий вибір коефіцієнта M гарантує, що для вихідної задачі, яка має розв'язок, в оптимальному розв'язку допоміжної задачі штучні змінні дорівнюють нулю. Це означає, що для вихідної задачі достатньо побудувати допоміжну і розв'язати її алгоритмом симплексного методу. Відкинувши рівні нулю значення штучних змінних в оптимальному розв'язку допоміжної задачі, отримаємо оптимальний розв'язок вихідної задачі.

При розв'язанні задачі симплексним методом з природним базисом значення функції цілі та оцінки Δ_j записуються в $(m + 1)$-й рядок таблиці. При розв'язанні задачі симплексним методом зі штучним базисом значення цільової функції та оцінок Δ_j є лінійними функціями параметра M:

$$Z = k_0 M + l_0, \qquad \Delta_j = k_j M + l_j .$$

На практиці зручно записувати ці величини в два рядки: $(m + 1)$-й та $(m + 2)$-й симплексної таблиці. Вільні члени $l_0, l_1, ..., l_n$ записують у $(m + 1)$-й рядок, а коефіцієнти при M: $k_0, k_1, ..., k_n$ – у $(m + 2)$-й рядок.

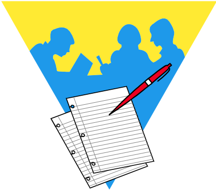
Обчислення проводимо в два етапи.

1 етап.

Обчислення починаємо з відомого допустимого базисного розв'язку допоміжної задачі. Вектор A_s, що включається до базису, вибираємо по $(m + 2)$-у рядку. Всі обчислення робимо так само, як і в симплексному методі з природним базисом. За кінцеве число кроків усі штучні вектори будуть виключені з базису. У цьому випадку всі числа в $(m + 2)$-у рядку дорівнюють нулю за винятком тих, які відповідають штучним змінним та рівні –1. Як тільки з базису будуть виключені всі штучні вектори, з симплексної таблиці можна прибрати $(m + 2)$-й рядок.

2 етап.

Використовуючи знайдений допустимий базисний розв'язок, розв'язуємо задачу звичайним симплексним методом.



ПРИКЛАД

78. На ділянку дороги, що будується, необхідно вивезти 20 000 м^3 кам'яних матеріалів. У районі будівництва є три кар'єри із запасами 9 000 м^3, 11 000 м^3 та 10 000 м^3. Для навантаження матеріалів використовуються екскаватори, що мають продуктивність 250 м^3 за зміну в кар'єрах 1 та 2 і 500 м^3 за зміну в кар'єрі 3. На навантаження матеріалів виділено для екскаваторів загальний ліміт 60 машино-змін з правом використання його на розсуд будівельників. Транспортні витрати на перевезення матеріалів характеризуються показниками: для перевезення 10 000 м^3 матеріалів з кар'єру 1 потрібно 1 000 автомобіле-змін, з кар'єру 2 – 1 350, з кар'єру 3 – 1 700 автомобіле-змін. Потрібно знайти оптимальний план перевезень, який би мінімізував транспортні витрати.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_j обсяг видобутку кам'яних матеріалів у j-му кар'єрі ($j=\overline{1,3}$) (одиниця виміру – 10 000 м^3). Тоді кількість автомобіле-змін, необхідне для перевезення всього матеріалу, запишеться у вигляді:

$$Z = 1000x_1 + 1350x_2 + 1700x_3.$$

Потрібно знайти такі значення змінних x_1, x_2, x_3, при яких Z набуває мінімального значення. Розглянемо умови, яким мають задовольняти ці змінні. За умовою на ділянку дороги, що будується, необхідно вивезти 20 000 м^3 матеріалів. Таким чином, $x_1 + x_2 + x_3 = 2$. На навантаження матеріалів виділено загальний ліміт 60 машино-змін. Обчислюючи кількість машино-змін для кожного кар'єру та підсумовуючи їх, отримаємо обмеження:

$$\frac{x_1 \cdot 10000}{250} + \frac{x_2 \cdot 10000}{250} + \frac{x_3 \cdot 10000}{500} \le 60.$$

Оскільки запаси у кожному кар'єрі обмежені, отримуємо:

$$x_1 \le 0{,}9; \quad x_2 \le 1{,}1; \quad x_3 \le 1.$$

Крім того, $x_j \ge 0$, $j=\overline{1,3}$.

Математична модель задачі має вигляд:

$$Z = 1000x_1 + 1350x_2 + 1700x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ \dfrac{x_1 \cdot 10000}{250} + \dfrac{x_2 \cdot 10000}{250} + \dfrac{x_3 \cdot 10000}{500} \le 60, \\ x_1 \le 0{,}9, \\ x_2 \le 1{,}1, \\ x_3 \le 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3, \\ 10x_1 \le 9, \\ 10x_2 \le 11, \\ x_3 \le 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 3}. \end{cases}$$

Зводимо задачу до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 10x_1 + x_5 = 9, \\ 10x_2 + x_6 = 11, \\ x_3 + x_7 = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 7}. \end{cases}$$

Випишемо матрицю системи основних обмежень задачі:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Матриця **A** містить чотири одиничні вектори: A_4, A_5, A_6, A_7.

Для отримання базису потрібен ще один одиничний вектор, у якого 1 стоїть на першому місці. Будуємо допоміжну задачу. В перше рівняння системи обмежень додаємо штучну змінну x_8, а в цільову функцію – доданок $\mathrm{M}x_8$. Отримуємо:

$$Z = 1000x_1 + 1350x_2 + 1700x_3 + \mathrm{M}x_8 \to \min$$

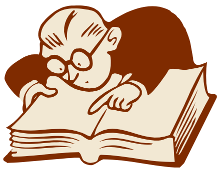
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_8 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ 10x_1 + x_5 = 9, \\ 10x_2 + x_6 = 11, \\ x_3 + x_7 = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 8}. \end{cases}$$

Усі обчислення оформляємо у вигляді таблиці:

i	Базис	$C_Б$	B	1000	1350	1700	0	0	0	0	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
1	A_8	M	2	1	1	1	0	0	0	0	1
2	A_4	0	3	2	2	1	1	0	0	0	0
3	A_5	0	9	10	0	0	0	1	0	0	0
4	A_6	0	11	0	10	0	0	0	1	0	0
5	A_7	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0
6			0	–1000	–1350	–1700	0	0	0	0	0
7			2	1	1	1↑	0	0	0	0	0
1	A_8	M	1	1	1	0	0	0	0	–1	1
2	A_4	0	2	2	2	0	1	0	0	–1	0
3	A_5	0	9	10	0	0	0	1	0	0	0
4	A_6	0	11	0	10	0	0	0	1	0	0
5	A_3	1700	1	0	0	1	0	0	0	1	0
6			1700	–1000	–1350	0	0	0	0	1700	0
7			1	1	1↑	0	0	0	0	–1	0
1	A_2	1350	1	1	1	0	0	0	0	–1	1
2	A_4	0	0	0	0	0	1	0	0	1	–2
3	A_5	0	9	10	0	0	0	1	0	2	–2
4	A_6	0	1	–10	0	0	0	0	1	10	–10
5	A_3	1700	1	0	0	1	0	0	0	1	0
6			3050	350	0	0	0	0	0	350↑	–1350
7			0	0	0	0	0	0	0	0	–1
1	A_2	1350	1	1	1	0	1	0	0	0	
2	A_7	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
3	A_5	0	9	10	0	0	–2	1	0	0	
4	A_6	0	1	–10	0	0	–10	0	1	0	
5	A_3	1750	1	0	0	1	–1	0	0	0	
6			3050	350↑	0	0	–350	0	0	0	
1	A_2	1350	0,1	0	1	0	1,2	–0,1	0	0	
2	A_7	0	0	0	0	0	1	0	0	1	
3	A_1	1000	0,9	1	0	0	–0,2	0,1	0	0	
4	A_6	0	1 0	0	0	0	–12	1	1	0	
5	A_3	1700	1	0	0	1	–1	0	0	0	
6			2735	0	0	0	–280	–35	0	0	

Відповідь:

$X_{опт} = (0,9;\ \ 0,1;\ \ 1)$, $Z_{\min} = 2735$; тобто Z приймає мінімальне значення, якщо з першого кар'єра вивезти 9 000 м^3, з другого 1 000 м^3, з третього 10 000 м^3.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задачі з номерами **79 – 92** розв'язати симплексним методом зі штучним базисом.

79. $Z = -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 0, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 5}. \end{cases}$$

80. $Z = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 5}. \end{cases}$$

81. $Z = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 3}. \end{cases}$$

82. $Z = 4x_1 + 4x_2 + 10x_3 \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 3}. \end{cases}$$

83. $Z = 2x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 12, \\ 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

84. $Z = -4x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

85. $Z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 4}. \end{cases}$$

86. $Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 3}. \end{cases}$$

87. $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

88. $Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 \ge 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

89. $Z = 3x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3, \\ 2x_1 - x_3 = -1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

90. Менеджер міжнародної банківської організації з інвестицій має 550 000 доларів, що перебувають на рахунку банку, які можна інвестувати. Розглядаються такі чотири типи інвестицій:

A: державні цінні папери;
B: цінні папери корпорацій;
C: акції галузей сфери обслуговування;
D: акції галузей виробничої сфери.

Річний відсоток інвестицій дорівнює 12%, 14%, 15%, 17% відповідно. Кошти, не інвестовані по жодному з типів, залишаються на банківському рахунку і приносять 10% річних.

Менеджер ухвалив рішення, що не менше 50 000 $ слід помістити в цінні папери корпорацій, але в той же час у всі проекти з елементами ризику (цінні папери корпорацій та всі види акцій) – не більше 300 000 $. Крім того, він вважає, що принаймні половину всіх інвестованих коштів слід вкласти в акції, проте в акції галузей виробничої сфери слід розмістити не більше чверті загальної суми інвестицій. Визначити оптимальний план інвестицій, що максимізує щорічний прибуток.

91. Промислове підприємство випускає тканину трьох артикулів A, B і C, для чого використовує ресурси: ткацькі верстати та пряжу. Продуктивність верстатів при виготовленні тканини кожного артикулу, норми витрати пряжі, а також прибуток від реалізації 1 метра тканини наведено в таблиці:

Показник	Тканина		
	A	B	C
Продуктивність верстатів (метри на годину)	60	30	20
Витрата пряжі на 1 м тканини (кг)	0,2	0,2	0,1
Прибуток від 1 м тканини (грош. од.)	1	3	2

Фонд робочого часу верстатів становить 45 верстато-годин на тиждень, а запаси пряжі 170 кг на тиждень. Підприємство має договір з деякою торговою фірмою на поставку їй щотижня тканини всіх артикулів у кількостях 100, 50, 400 метрів відповідно. Крім того, вивчення споживчого попиту показало, що співвідношення випуску тканин A, B і C має бути 1 : 3 : 6. Визначити оптимальний асортимент, що максимізує прибуток підприємства.

92. Аграрна фірма спеціалізується на вирощуванні зернових. Під посів чотирьох культур: пшениці, жита, гречки та ячменю може бути відведена земельна ділянка площею до 300 га. Для підвищення врожайності планується вносити мінеральне добриво, запас якого обмежений і становить 140 т. Норми внесення добрива, врожайність і закупівельні ціни наведено в таблиці:

Показник	С/г культура			
	пшениця	жито	гречка	ячмінь
Норма внесення добрива (кг/га)	500	300	200	400
Врожайність (ц/га)	40	25	20	50
Закупівельна ціна (грош. од./ц)	200	100	150	160

Фірма має замовлення на постачання 1000 ц гречки та 250 ц жита. Відомо також, що під пшеницю та жито недоцільно відводити площу менше, ніж 210 га. Визначити план поділу посівної площі, що максимізує дохід фірми.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який вид задач ЛП називається канонічним?
2. Як задача довільного вигляду зводиться до канонічного?
3. Що називається допустимим базисним розв'язком (ДБР)?
4. Як визначається вихідне ДБР?
5. Як формулюється критерій оптимальності для симплексного методу?
6. Як визначається вектор для включення до базису, якщо побудоване ДБР не є оптимальним?
7. За яким принципом вибирається провідний елемент?
8. Як здійснюється перехід від одного ДБР до іншого?
9. За яких умов робиться висновок про:

а) єдиність розв'язку;
б) існування нескінченної множини розв'язків;
в) необмеженість цільової функції?

10. Яка змінна називається штучною, коли вона вводиться, і який коефіцієнт відповідає їй у цільовій функції?
11. Коли вихідна задача несумісна і як це визначити за допомогою розв'язку М-задачі?

4. ТЕОРІЯ ДВОЇСТОСТІ В ЛІНІЙНОМУ ПРОГРАМУВАННІ

4.1. Правила побудови двоїстих задач

Кожній задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність іншу задачу, яка називається двоїстою по відношенню до вихідної задачі. Зв'язок вихідної (прямої) і двоїстої задач полягає, головним чином, у тому, що розв’язок однієї з них може бути отримано з розв’язку іншої.

Перелічимо основні ***правила побудови двоїстих задач:***

1) якщо вихідна задача є задачею максимізації, то двоїста буде задачею мінімізації та навпаки;

2) кількість змінних двоїстої задачі дорівнює кількості основних обмежень вихідної задачі, а кількість основних обмежень двоїстої задачі дорівнює кількості змінних вихідної задачі;

3) коефіцієнти цільової функції вихідної задачі стають правими частинами обмежень двоїстої задачі, а праві частини обмежень вихідної задачі стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі;

4) матриця системи основних обмежень двоїстої задачі будується за допомогою транспонування матриці системи основних обмежень вихідної задачі;

5) між основними обмеженнями вихідної задачі та змінними двоїстої задачі встановлено взаємно однозначну відповідність: якщо i-е обмеження вихідної задачі нерівність, то $y_i \geq 0$ (де y_i – i-а змінна двоїстої задачі); якщо i-е обмеження вихідної задачі рівність, то y_i – вільна змінна, тобто немає обмеження на її знак;

6) між змінними вихідної задачі та основними обмеженнями двоїстої задачі існує взаємно однозначна відповідність: якщо $x_j \geq 0$, то j-е обмеження двоїстої задачі нерівність; якщо x_j – вільна змінна, то j-е обмеження двоїстої задачі рівність;

7) в системі обмежень задачі максимізації нерівності записуємо зі знаком $\leq$, а в системі обмежень задачі мінімізації зі знаком $\geq$.

Розглянемо основні види пар двоїстих задач.

Симетричні задачі

Пряма задача | Двоїста задача

1. $z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,\ m}; \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,\ n}. \end{cases}$$

$f=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j=\overline{1,\ n}; \\ y_i \ge 0, \quad i=\overline{1,\ m}. \end{cases}$$

2 . $z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i=\overline{1,\ m}; \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,\ n}. \end{cases}$$

$f=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, \quad j=\overline{1,\ n}; \\ y_i \ge 0, \quad i=\overline{1,\ m}. \end{cases}$$

Несиметричні задачі

Пряма задача | Двоїста задача

3. $z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i=\overline{1,\ m}; \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,\ n}. \end{cases}$$

$f=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j=\overline{1,\ n}.$$

4. $z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$

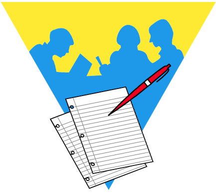
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i=\overline{1,\ m}; \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,\ n}. \end{cases}$$

$f=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j, \quad j=\overline{1,\ n}.$$

В несиметричних задачах система обмежень прямої задачі задається як система рівностей, тому всі y_i – вільні змінні, тобто можуть бути і від'ємними. У цьому випадку пишуть $y_i \gtrless 0$ або $y_i \in(-\infty;\ \infty)$, або взагалі нічого не пишуть.

На практиці можуть зустрітися задачі, системи обмежень яких містять як рівності, так і нерівності. У цьому випадку двоїсту задачу будуємо з огляду на правила побудови двоїстих задач.



ПРИКЛАД

93. Побудувати задачу, двоїсту до наведеної:

$$Z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 \geq 2, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 10, \\ \ \ x_1 - \ \ x_2 \qquad \quad \leq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 3}. \end{cases}$$

Р О З В ’ Я З А Н Н Я.

У системі обмежень задачі максимізації всі нерівності повинні бути записані зі знаком $\leq$, тому зведемо систему обмежень до вигляду:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - \ \ x_3 \leq -2, \\ \ \ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ \ \ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 10, \\ \ \ \ \ x_1 - \ \ x_2 \qquad \quad \leq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,\ 3}. \end{cases}$$

Двоїста задача матиме чотири змінні y_i $(i = \overline{1, 4})$ та три основні обмеження. Оскільки всі $x_j \geq 0$, то всі обмеження двоїстої задачі запишемо у вигляді нерівностей, причому зі знаком ≥ 0, тому що двоїста задача буде задачею мінімізації. Усі обмеження вихідної задачі – нерівності, тому $y_i \geq 0,\ i = \overline{1, 4}$. Матриця системи основних обмежень вихідної задачі має вигляд:

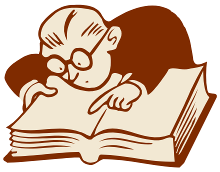
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця системи основних обмежень двоїстої задачі отримується транспонуванням матриці А, тобто коефіцієнтами при змінних y_i трьох основних обмежень двоїстої задачі будуть елементи відповідних стовпців матриці А.

Враховуючи, що коефіцієнти цільової функції вихідної задачі стають правими частинами обмежень двоїстої задачі, а праві частини обмежень вихідної задачі стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі, отримаємо двоїсту задачу у вигляді:

$$f = -2y_1 + 6y_2 + 10y_3 + 2y_4 \to \min$$

$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4 \ge 3, \\ -2y_1 - 3y_2 - 3y_3 - y_4 \ge 1, \\ -y_1 - 2y_2 + 2y_3 \ge 2, \\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}. \end{cases}$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

У задачах із номерами **94** – **103** до даної задачі побудувати двоїсту.

94. $Z = 14x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 10x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 35, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 30, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 40, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

95. $Z = x_1 + 14x_2 + 13x_3 + 12x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 \le -1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

96. $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 50, \\ 3x_1 + x_3 \ge 15, \\ x_1 + 4x_2 \le 40, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

97. $Z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 11, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

98. $Z = -2x_1 - x_2 + 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 4, \\ -5x_1 + x_3 \ge -12, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 \ge -4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

99. $Z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

100. $Z = 4x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 13, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

101. $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_6 = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 7}. \end{cases}$$

102. $Z = 6x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 4x_5 + 2x_6 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 17, \\ 4x_2 + x_3 + x_5 = 12, \\ x_2 + 8x_4 - x_5 + x_6 = 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

103. $Z = -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5, \\ x_1 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

4.2. Теореми двоїстості та їх застосування

Між прямою та двоїстою задачами лінійного програмування існує тісний зв'язок, що дозволяє за допомогою теорем двоїстості за розв’язком однієї з цих задач знайти оптимальний розв’язок іншої задачі.

***Перша теорема двоїстості*.**

Якщо одна з пари двоїстих задач має оптимальний розв’язок, то й інша задача має оптимальний розв’язок, причому екстремальні значення цільових функцій рівні, тобто. $Z_{\max} = f_{\min}$ *і навпаки. Якщо у однієї з цих задач цільова функція необмежена, то двоїста їй задача немає допустимих розв’язків*.

Нехай вихідна задача розв’язана симплексним методом та отримано розв'язок $X_{опт}$. Тоді оптимальний розв'язок двоїстої задачі $Y_{опт}$ визначається співвідношенням

$$Y_{опт} = C_Б \cdot A_Б^{-1},$$

де $C_Б$ – вектор-рядок коефіцієнтів цільової функції прямої задачі при базисних змінних оптимального розв’язку;

$A_Б^{-1}$ – матриця, обернена матриці, складеної з компонентів-векторів, що входять в останній базис, при якому отримано оптимальний розв’язок.

Якщо пряма задача розв’язувалася симплексним методом з природним або штучним базисом, то обчислювати обернену матрицю не потрібно, тому що $A_Б^{-1}$ буде складатися зі стовпців оптимальної симплекс-таблиці, отриманих на місці одиничних стовпців вихідної таблиці.

За допомогою аналогічного співвідношення можна знайти $X_{опт}$, якщо є розв’язок двоїстої задачі.

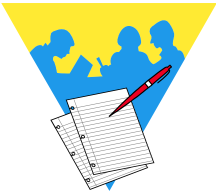
***Друга теорема двоїстості*.**

Нехай $X = (x_1 , x_2 , ..., x_n)$ *та* $Y = (y_1 , y_2 , ..., y_m)$ *– допустимі розв’язки прямої та двоїстої задач відповідно. Для того, щоб ці розв’язки були оптимальними, необхідно і достатньо, щоб вони задовольняли умовам*:

$$x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

$$y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

З другої теореми двоїстості витікає, що якщо у оптимальному розв'язку прямої задачі значення деякої змінної x_k відмінно від нуля, то відповідне до цієї змінної k-те обмеження двоїстої задачі при підстановці координат оптимального розв’язку двоїстої завдання перетворюється у строгу рівність. Якщо ж оптимальний розв'язок прямої задачі перетворює на строгу нерівність деяке обмеження цієї задачі, то в оптимальному розв'язку двоїстої задачі дорівнює нулю змінна, що відповідає цьому обмеженню. Аналогічні твердження справедливі, якщо за оптимальним розв'язком двоїстої задачі знаходимо оптимальний розв’язок прямої задачі.



ПРИКЛАДИ

104. Розв'язати задачу симплексним методом. Побудувати для заданої задачі двоїсту. Знайти розв’язок двоїстої задачі за допомогою першої та другої теорем двоїстості.

$$Z = -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \quad \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 10, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Матриця **A** системи основних обмежень містить два одиничних вектори A_4 та A_5. Для отримання базису потрібен ще один одиничний вектор, у якого 1 стоїть на третьому місці. У третє рівняння системи обмежень додаємо штучну змінну x_6, а в цільову функцію – доданок Mx_6.

Отримуємо допоміжну задачу:

$$Z = -2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + Mx_6 \quad \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 10, \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Розв’язуємо отриману задачу. Усі обчислення оформлюємо у вигляді таблиці:

i	базис	$C_Б$	B	–2	1	–1	2	0	M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_5	0	10	5	–2	1	0	1	0
2	A_4	2	3	–1	1	0	1	0	0
3	A_6	M	2	1	1	–1	0	0	1
4			6	0	1	1	0	0	0
5			2	1	1↑	–1	0	0	0
1	A_5	0	14	7	0	–1	0	1	2
2	A_4	2	1	–2	0	1	1	0	–1
3	A_2	1	2	1	1	–1	0	0	1
4			4	–1	0	2↑	0	0	–1
5			0	0	0	0	0	0	–1
1	A_5	0	15	5	0	0	1	1	1
2	A_3	–1	1	–2	0	1	1	0	–1
3	A_2	1	3	–1	1	0	1	0	0
4			2	3↑	0	0	–2	0	1
1	A_1	–2	3	1	0	0	$^1/_5$	$^1/_5$	$^1/_5$
2	A_3	–1	7	0	0	1	$^7/_5$	$^2/_5$	$-^3/_5$
3	A_2	1	6	0	1	0	$^6/_5$	$^1/_5$	$^1/_5$
4			–7	0	0	0	$-^{13}/_5$	$-^3/_5$	$^2/_5$

Вихідна задача має розв'язок: $Z_{\min} = -7$; $X_{опт} = (3; 6; 7; 0; 0)$.

Будуємо для заданої задачі двоїсту:

$$f = 10y_1 + 3y_2 + 2y_3 \ \to \max$$

$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 + y_3 \le -2, \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \le 1, \\ y_1 - y_3 \le -1, \\ y_2 \le 2, \\ y_1 \le 0. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язок двоїстої задачі за допомогою першої теореми двоїстості. В даному випадку $C_Б = (-2; -1; 1)$. $A_Б^{-1}$ утворюють стовпці A_5, A_4, A_6 оптимальної симплекс-таблиці, тому що саме ці стовпці у вихідній симплекс-таблиці утворюють одиничну матрицю . Тоді:

$$Y_{опт} = C_Б \cdot A_Б^{-1} = (-2;\ -1;\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & 7/5 & -3/5 \\ 1/5 & 6/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{5};\ -\frac{3}{5};\ \frac{2}{5}\right);$$

$$f_{\max} = 10 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) + 2 \cdot \frac{2}{5} = -7.$$

Таким чином, $Y_{опт} = \left(-\frac{3}{5};\ -\frac{3}{5};\ \frac{2}{5}\right)$, $f_{\max} = -7$.

Знаходимо розв'язок двоїстої задачі за допомогою другої теореми двоїстості. В оптимальному розв’язку прямої задачі $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$. Отже, перші три обмеження двоїстої задачі при підстановці координат $Y_{опт}$ перетворюються в строгі рівності. Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5y_1 - y_2 + y_3 = -2, \\ -2y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_1 \qquad - y_3 = -1. \end{cases}$$

Розв’язуючи систему, отримуємо $y_1 = -3/5$; $y_2 = -3/5$; $y_3 = 2/5$.

Таким чином, $Y_{опт} = \left(-\frac{3}{5};\ -\frac{3}{5};\ \frac{2}{5}\right)$, $f_{\max} = -7$.

105. Для даної задачі побудувати двоїсту. Одну з пари двоїстих задач розв’язати безпосередньо. За допомогою першої або другої теорем двоїстості знайти розв’язок іншої задачі.

$$Z = -x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 9x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 \le -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \le -2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

РОЗВ’ЯЗАННЯ

У системі обмежень задачі мінімізації всі нерівності мають бути записані зі знаком $\ge$, тому систему обмежень записуємо наступним чином:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 \ge 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \ge 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Будуємо для вихідної задачі двоїсту:

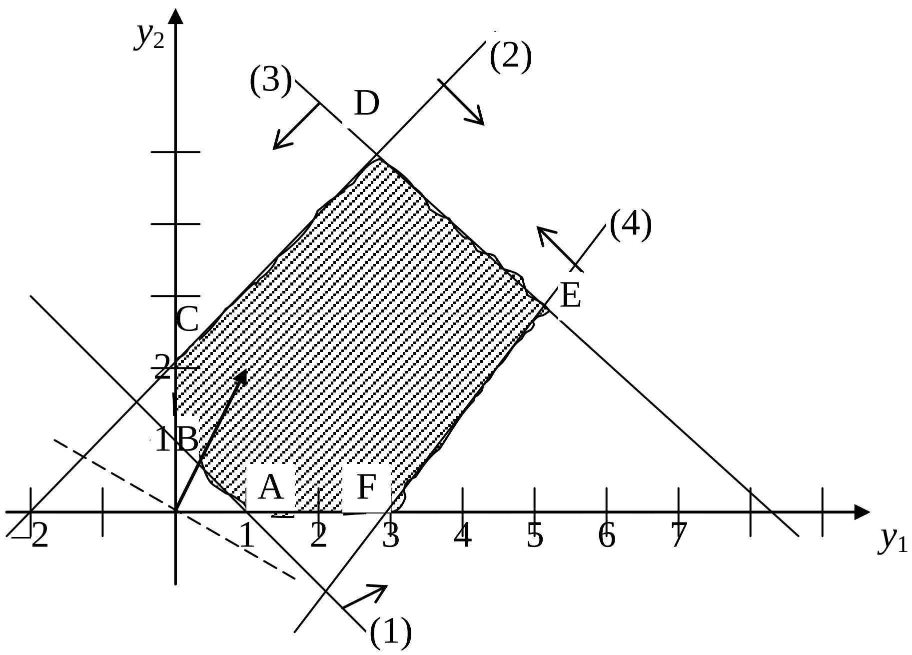
$$f = y_1 + 2y_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 \le -1, \\ -y_1 + y_2 \le 2, \\ y_1 + y_2 \le 8, \\ 3y_1 - 2y_2 \le 9, \\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Двоїста задача має дві змінні, отже, її можна розв’язати графічно. Очевидно, що знайти розв’язок двоїстої задачі простіше, ніж розв’язок вихідної задачі.

Будуємо область допустимих розв'язків двоїстої задачі. Отримуємо многокутник ABCDEF.

Будуємо на цьому ж кресленні вектор *grad Z* = (1; 2).



Максимального значення функція *f* набуває в точці D, яка лежить на перетині другої та третьої прямих. Для знаходження координат точки D розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 = 2 \\ y_1 + y_2 = 8 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_1 = 3; y_2 = 5.$$

Таким чином, $f_{\max} = 13$; $Y_{опт} = (3; 5)$.

Для знаходження оптимального розв’язку прямої задачі застосовуємо другу теорему двоїстості:

$x_1 \cdot (y_1 + y_2 - 1) = 0;$

$x_2 \cdot (-y_1 + y_2 - 2) = 0;$

$x_3 \cdot (y_1 + y_2 - 8) = 0;$

$x_4 \cdot (3y_1 - 2y_2 - 9) = 0.$

$y_1 \cdot (x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 1) = 0;$

$y_2 \cdot (x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + 2) = 0.$

Підставляємо в систему рівнянь $Y_{опт} = (3; 5)$:

$y_1 + y_2 - 1 \neq 0 \ \Rightarrow\ x_1 = 0;$

$3y_1 - 2y_2 - 9 \neq 0 \ \Rightarrow\ x_4 = 0;$

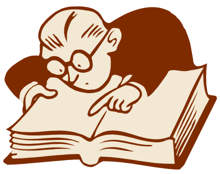
$y_1 \neq 0 \ \Rightarrow\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + 1 = 0;$

$y_2 \neq 0 \ \Rightarrow\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + 2 = 0.$

Для знаходження координат $X_{опт}$ отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 = 0, \\ x_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2}; \qquad x_3 = \frac{3}{2}.$$

Таким чином, $X_{опт} = (0;\ 1/2;\ 3/2;\ 0)$; $Z_{\min} = 13$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

У задачах з номерами **106** – **115** потрібно:
1) для даної задачі побудувати двоїсту;
2) одну з пари двоїстих задач розв’язати безпосередньо;
3) за допомогою першої або другої теорем двоїстості знайти розв’язок іншої задачі.

106. $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

107. $Z = x_2 - x_4 - 3x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + x_5 = 1, \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_2 + x_5 + x_6 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

108. $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

109. $Z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq -4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

110. $Z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

111. $Z = 2x_1 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

112. $Z = -4x_1 - 7x_2 - 8x_3 - 5x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 \geq 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \qquad \geq 6, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

113. $Z = 4x_1 + 3x_2 - 30x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 6x_3 \geq 1, \\ \qquad x_2 - 5x_3 \geq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

114. $Z = 12x_1 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + \ x_3 \geq 1, \\ 2x_1 - \ x_2 + 2x_3 \leq 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

115. $Z = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + \ x_2 + x_3 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \qquad \leq 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

5. ДВОЇСТИЙ СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД

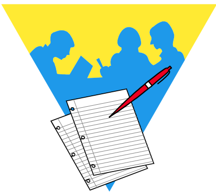
Двоїстий симплексний метод застосовується для розв'язанні задач лінійного програмування, у яких після зведення задачі до канонічного вигляду кожне обмеження містить базисну змінну з коефіцієнтом 1 або –1. Перед розв'язанням задачі двоїстим симплексним методом обидві частини кожного рівняння, що містить базисну змінну з коефіцієнтом –1, множимо на –1. Після цього кожне рівняння-обмеження буде містити базисну змінну з коефіцієнтом 1, але при цьому не буде виконуватися умова невід'ємності правих частин рівнянь. Якщо для отриманої системи обмежень виписати базисний розв'язок, він виявиться недопустимим, тому що не виконується умова $x_j \geq 0$, $j = \overline{1, n}$. Саме з цього недопустимого розв'язку вихідної задачі починається її розв'язання.

Двоїстий симплексний метод складається з двох етапів.

I етап полягає у знаходженні такого базисного розв'язку, для якого всі оцінки $\Delta_j \le 0$. При цьому базисний розв'язок може бути і недопустимим. На I етапі довільним чином вибирається провідний рядок. Обчислюємо відношення додатних чи рівних нулю небазисних оцінок до відповідних додатних елементів провідного рядка. За провідний елемент беремо той додатний елемент рядка, для якого це відношення мінімальне. Якщо таких немає, вибирається інший рядок. Після вибору провідного елемента переходимо до нового базисного розв'язку (використовуємо метод повного виключення). Обчислення I етапу закінчуються тоді, коли всі оцінки $\Delta_j \le 0$. Якщо всі праві частини рівнянь (стовпець B) невід'ємні, то отримано оптимальний розв'язок. Задача розв'язана, II етап не потрібен. Якщо ж серед правих частин рівнянь є від'ємні, то переходимо до II етапу.

Зауважимо, що якщо для недопустимого базисного розв'язку, з якого ми починаємо розв'язання задачі, всі оцінки $\Delta_j \le 0$, то I етап не потрібен. Розв'язання задачі починаємо відразу з II етапу.

Мета **II** етапу – зробити невід'ємними всі праві частини обмежень. Провідний рядок обирається за найменшою від'ємною правою частиною. За провідний елемент вибираємо той від'ємний елемент рядка, для якого відношення від'ємної або нульової небазисної оцінки до відповідного від'ємного елемента провідного рядка мінімальне. Якщо серед елементів провідного рядка немає від'ємних, то вихідна задача не має розв'язку. II етап закінчується тоді, коли всі праві частини рівнянь невід'ємні.



ПРИКЛАД

116. Розв'язати задачу двоїстим симплексним методом.

$$Z = 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 - x_6 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_6 = 15, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Розглянута задача записана у канонічному вигляді. Перше і друге рівняння містять базисні змінні (x_3 та x_4 відповідно) з коефіцієнтом –1; третє і четверте рівняння містять базисні змінні (x_5 та x_6 відповідно) з коефіцієнтом 1. Помножимо обидві частини першого та другого рівнянь на –1, отримаємо наступну систему обмежень:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 - x_2 + x_4 = -4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_6 = 15, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Вважаючи вільні змінні x_1 та x_2 рівними нулю, отримаємо недопустимий базисний розв'язок $X = (0; 0; –2; –4; 3; 15)$.

З нього і починаємо розв'язування задачі. Всі обчислення оформляємо у вигляді таблиці:

i	базис	$C_Б$	B	2	–1	–1	–2	0	–1
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	–1	–2	–2	1	1	0	0	0
2	A_4	–2	–4	–1	–1	0	1	0	0
3	A_5	0	3	2	–3	0	0	1	0
4	A_6	–1	15	1	3	0	0	0	1
5			–5	1↑	–1	0	0	0	0
1	A_3	–1	28	0	7	1	0	0	2
2	A_4	–2	11	0	2	0	1	0	1
3	A_5	0	–27	0	–9	0	0	1	–2
4	A_1	2	15	1	3	0	0	0	1
5			–20	0	–4↑	0	0	0	–1
1	A_3	–1	7	0	0	1	0	$^7/_9$	$^4/_9$
2	A_4	–2	5	0	0	0	1	$^2/_9$	$^5/_9$
3	A_2	–1	3	0	1	0	0	$-^1/_9$	$^2/_9$
4	A_1	2	6	1	0	0	0	$^1/_3$	$^1/_3$
5			–8	0	0	0	0	$-^4/_9$	$-^1/_9$

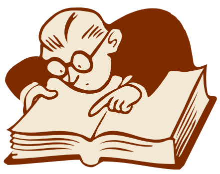
На першому етапі за провідний вибираємо четвертий рядок. Провідний елемент 1 визначається однозначно, оскільки це єдиний додатний елемент рядка, для якого відповідна оцінка $\Delta_1 = 1 > 0$. Після одного кроку отримали всі $\Delta_j \leq 0$.

На другому етапі за провідний рядок вибираємо третій рядок, тому що права частина рівняння –27 < 0. Рядок містить два від'ємні елементи, для яких відповідні оцінки від'ємні. За провідний елемент беремо –9, оскільки

$$\min\left(\frac{-4}{-9};\ \frac{-1}{-2}\right)=\frac{4}{9}.$$

Після одного кроку отримуємо відповідь:

$$X_{onm} = (6;\ 3;\ 7;\ 5;\ 0;\ 0),\ \ Z_{\min} = -8.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задачі з номерами **117** – **126** розв'язати двоїстим симплексним методом.

117. $Z = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_5 = 25, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

118. $Z = x_1 - x_2 - x_3 + x_5 \to \max$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 15, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

119. $Z = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

120. $Z = 2x_1 + x_3 + x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_5 = 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

121. $Z = x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 \to \max$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_5 = 3, \\ x_2 + x_6 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

122. $Z = -x_1 - 2x_2 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 3, \\ 3x_1 - x_2 \leq 9, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

123. $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ -x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

124. $Z = -4x_1 - x_2 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 - x_2 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 20, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

125. $Z = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases}$$

126. Металургійний завод із металів A_1, A_2, A_3, A_4 може випускати сплави B_1, B_2, B_3. Протягом запланованого періоду завод повинен освоїти не менше 20 т металу A_1, 16 т металу A_2, 8 т металу A_3 та 12 т металу A_4. Відсотковий вміст металів у сплавах та вартість сплавів надано у таблиці:

Вид металу	Відсотковий вміст металів у сплавах		
	B_1	B_2	B_3
A_1	20%	–	40%
A_2	–	20%	40%
A_3	60%	40%	–
A_4	20%	40%	20%
Вартість 1 т сплаву (грош. од.)	6	7	14

Визначити план випуску сплавів, що мінімізує їх сумарну вартість.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. У чому полягає сутність двоїстості у ЛП?
2. Сформулюйте правила побудови двоїстих задач.
3. Які основні властивості має пара двоїстих задач?
4. Як по розв'язку прямої задачі знайти розв’язок двоїстої задачі?
5. У чому суть двоїстого симплексного методу?
6. У яких випадках доцільно застосовувати двоїстий симплексний метод?

6. ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

6.1. Постановка задачі. Методи побудови початкового опорного плану

Нехай є m пунктів відправлення однорідної продукції та n пунктів призначення. Відомі запаси a_i кожного пункту відправлення та попит b_j на цю продукцію в кожному пункті призначення, причому $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Задача в цьому випадку називається ***збалансованою*** чи ***задачею закритого (замкненого) типу***.

Відомі також транспортні витрати c_{ij} на перевезення одиниці продукції з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення.

Потрібно знайти план перевезень $X = (x_{ij})$ $(i = \overline{1, m};\ \ j = \overline{1, n})$, що дозволяє вивезти всю продукцію з пунктів відправлення, повністю задовольнити потреби пунктів призначення та має мінімальні сумарні транспортні витрати.

Математична модель транспортної задачі має такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}; \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}; \\ x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Рівність $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ є необхідною та достатньою умовою розв'язності задачі. Транспортна задача є задачею лінійного програмування. Вона має ($m + n$) основних обмежень з mn змінними.

Число лінійно незалежних рівнянь системи обмежень дорівнює $(m + n - 1)$. Це означає, що невироджений ***опорний план*** (допустимий базисний розв'язок) транспортної задачі містить $(m + n - 1)$ додатну компоненту, інші компоненти дорівнюють нулю. Якщо число додатних компонентів менше $(m + n - 1)$, *опорний план вироджений*. Всю інформацію про транспортну задачу зручно записувати у вигляді таблиці:

j / i	1	2	…	n	a_i
1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Як і в інших задачах лінійного програмування, процес пошуку оптимального плану транспортної задачі починається з будь-якого опорного плану.

Початковий опорний план може бути побудований ***методом північно-західного кута***. Метод складається із скінченної послідовності кроків. На кожному кроці визначаємо значення перевезення, що стоїть у верхньому лівому (північно-західному) куті таблиці, як найменше з чисел

a_i та b_j на цьому кроці. Якщо $a_i < b_j$, то $x_{ij} = a_i$. У цьому випадку i-й постачальник продукції повністю вичерпав свої запаси і надалі в i-й рядок більше нічого не заносимо (ставимо прочерки). Якщо $b_j < a_i$, то $x_{ij} = b_j$. В цьому випадку *j-й* пункт призначення отримав необхідну йому продукцію повністю, тому в незаповнених раніше клітинах j-го стовпця ставимо прочерки. Якщо ж $a_i = b_j$, прочерки ставимо тільки в рядку або стовпці. У такій ситуації на наступному етапі перевезення, що стоїть у північно-західному кутку, отримає значення 0 (базисний нуль). Якщо цей нуль не записати, то число базисних клітин буде менше, ніж $(m + n - 1)$, що призведе надалі до неможливості знаходження оптимального розв'язку методом потенціалів.

Початковий опорний план може бути знайдено також ***методом мінімального елемента***. У методі північно-західного кута при побудові опорного плану не враховуються транспортні витрати c_{ij}. У методі мінімального елемента при побудові опорного плану на кожному кроці визначається значення того перевезення, якому відповідають найменші транспортні витрати в незаповненій частині таблиці. Порядок заповнення таблиці в методі мінімального елемента такий самий, як і в методі північно-західного кута.

6.2. Метод потенціалів

Перевірка плану на оптимальність здійснюється за допомогою методу потенціалів. Нехай кожному пункту відправлення відповідає потенціал U_i ($i = \overline{1, m}$), а пункт призначення – потенціал V_j ($j = \overline{1, n}$).

Теорема.

Якщо для деякого опорного плану транспортної задачі існують потенціали U_i ($i = \overline{1, m}$) та V_j ($j = \overline{1, n}$), які відповідають умовам:

$U_i + V_j = c_{ij}$ для базисних перевезень x_{ij},

$U_i + V_j \le c_{ij}$ для небазисних x_{ij},

то цей план є оптимальним.

Позначимо: $\overline{c_{ij}} = U_i + V_j$; $\Delta_{ij} = \overline{c_{ij}} - c_{ij}$.

Тоді умова оптимальності запишеться у вигляді:

$\Delta_{ij} = 0$ для базисних x_{ij},

$\Delta_{ij} \le 0$ для небазисних x_{ij},

тобто $\Delta_{ij} \le 0$ для всіх $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$.

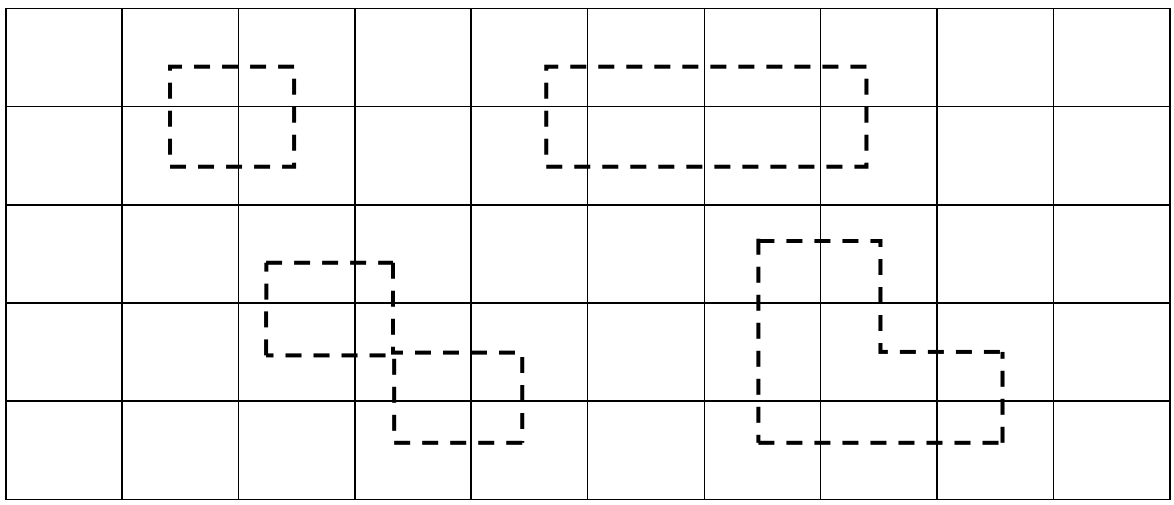
Алгоритм методу потенціалів

1. Будуємо початковий опорний план X_0 методом північно-західного кута або методом мінімального елемента.

2. Знаходимо потенціали U_i $(i=\overline{1,m})$ та V_j $(j=\overline{1,n})$. Для цього складаємо систему рівнянь $U_i + V_j = c_{ij}$ для базисних x_{ij}. Базисних клітин у таблиці $(m + n - 1)$, тому складена система містить $(m + n - 1)$ рівняння з $(m + n)$ невідомими. Система рівнянь має нескінченно багато розв'язків, і кожний такий розв'язок придатний для перевірки отриманого на першому етапі плану перевезень на оптимальність. Для знаходження якогось розв'язку значення одного з потенціалів обирається довільним чином. На практиці зручно той потенціал, що найбільш часто зустрічається в системі, покласти рівним нулю, після чого знайти всі інші потенціали.

3. Обчислюємо $\overline{c_{ij}} = U_i + V_j$ і різницю $\Delta_{ij} = \overline{c_{ij}} - c_{ij}$ $(i=\overline{1,m}$; $j=\overline{1,n})$. Усі обчислення зручно оформляти у вигляді таблиць. Якщо всі обчислені $\Delta_{ij} \le 0$, аналізований опорний план є оптимальним. Задачу розв'язано. Записуємо відповідь. Якщо ж серед оцінок Δ_{ij} є додатні, розглянутий опорний план не є оптимальним. Переходимо до нового опорного плану.

У базис включаємо клітину, що відповідає найбільшій додатній оцінці Δ_{ij}. Тоді одна з базисних клітин має бути виключена з базису. Будуємо цикл перерахунку. Цикл є замкненою ламаною лінією, ланки якої перетинаються під прямим кутом. У цикл входить лише одна вільна клітина, яку необхідно завантажити, і кілька базисних клітин. Поворот на 90^0 можна робити лише в базисній (завантаженій) клітині. Цикл утворюють лише кутові клітини, серед яких одна вільна, інші базисні. Некутові клітини, що знаходяться на сторонах ланок ламаної лінії, в цикл не входять. У кожному стовпці чи рядку, де є клітини циклу, має бути лише дві вершини циклу. Найпростіший цикл – прямокутний, але можливі цикли і з самоперетином. Приклади деяких простих циклів наведені на рисунку.



4. Кожній клітині циклу приписуємо знак "+" або "–", чергуя їх, починаючи зі знака "+" у вільній клітині, яку необхідно завантажити.

Знаходимо t – найменше з чисел x_{ij}, які розташовані в клітинах, позначених знаком «–».

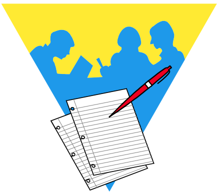
Компоненти $\overline{x_{ij}}$ нового плану перевезень X_1 обчислюємо за формулами:

$$\overline{x_{ij}} = \begin{cases} x_{ij} & \text{– для клітин, що не входять в цикл;} \\ (x_{ij} + t) & \text{– для клітин циклу, відмічених знаком } +; \\ (x_{ij} - t) & \text{– для клітин циклу, відмічених знаком } -. \end{cases}$$

Таким чином, якщо в деяку клітину циклу додається t одиниць продукції, то із сусідньої відносно неї повинні бути вилучені ці t одиниць. Це робиться для того, щоб дотримувався балансу між поставками та потребами в таблиці. Обчислюємо транспортні витрати нового плану перевезень:

$$Z_1 = Z_0 - t \cdot \max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij}.$$

З планом перевезень X_1 чинимо так само, як і з планом перевезень X_0, тобто повертаємося до пункту 2 і так далі. Так чинимо до отримання оптимального плану перевезень, тобто такого плану, для якого всі $\Delta_{ij} \le 0$.



ПРИКЛАД

127. Фірма постачає цукор в мішках на чотири торговельні точки. Вона має три склади, причому на першому складі є 20 мішків цукру, на другому – 40, на третьому – 90. Перша торговельна точка замовила 50 мішків цукру, друга – 50, третя – 30, четверта – 20. Вартість перевезення одного мішка цукру з першого складу до торгових точок дорівнює 4; 5; 6; 4 грош. од. відповідно; з другого складу – 3; 2; 3; 4 грош. од.; з третього складу – 2; 2; 3; 2 грош. од. Знайти план перевезень, що мінімізує сумарні транспортні витрати.

Р О З В'Я З А Н Н Я

Будуємо математичну модель задачі. Позначимо через x_{ij} кількість мішків цукру, що перевозиться з i-го складу в j-ю торговельну точку. Відомі вартості c_{ij} перевезення одного мішка цукру з i-го складу до j-ї торгової точки:

$c_{11} = 4$; $c_{12} = 5$; $c_{13} = 6$; $c_{14} = 4$; $c_{21} = 3$; $c_{22} = 2$; $c_{23} = 3$; $c_{24} = 4$; $c_{31} = 2$; $c_{32} = 2$; $c_{33} = 3$; $c_{34} = 2$.

За умовою задачі запаси цукру на трьох складах дорівнюють відповідно: $a_1 = 20$; $a_2 = 40$; $a_3 = 90$, а потреби чотирьох торговельних точок такі: $b_1 = 50$; $b_2 = 50$; $b_3 = 30$; $b_4 = 20$.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 150.$$

Отже, задача, що розглядається, є задачею закритого типу.

Математична модель задачі має вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} \to \min \text{ (сумарні транспортні витрати)}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=20, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=40, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=90, \end{cases} \text{(весь цукор зі складів має бути вивезений)}$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=50, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=50, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=30, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=20, \end{cases} \text{(всі потреби торговельних точок мають бути задовільнені)}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i=\overline{1,3}; \quad j=\overline{1,4}.$$

Всю інформацію про розглянуту задачу записуємо у вигляді таблиці:

i \ j	1	2	3	4	a_i
1	4	5	6	4	20
2	3	2	3	4	40
3	2	2	3	2	90
b_j	50	50	30	20	150

Будуємо початковий опорний план шляхом північно-західного кута. Визначаємо значення перевезення, що стоїть у верхньому лівому кутку таблиці, тобто перевезення x_{11}: $x_{11} = \min(50; 20) = 20$.

Вписуємо до таблиці $x_{11} = 20$ і зменшуємо на це число a_1 та b_1, тобто отримуємо нові a_1 та b_1: $a_1 = 20 - 20 = 0$, $b_1 = 50 - 20 = 30$. Оскільки $a_1 = 0$, в незаповнених клітинах першого рядка ставимо прочерки.

Отримуємо таку таблицю:

i \ j	1	2	3	4	a_i	
1	4 20	5 –	6 –	4 –	~~20~~	0
2	3	2	3	4	40	
3	2	2	3	2	90	
b_j	~~50~~	50	30	20	150	
	30					

В отриманій таблиці ліве верхнє перевезення x_{21}. Знаходимо його значення: $x_{21} = \min(30;\ 40) = 30$. Зменшуємо на це число a_2 та b_1. У незаповнених раніше клітинах першого стовпця ставимо прочерки:

i \ j	1	2	3	4	a_i	
1	4 20	5 –	6 –	4 –	~~20~~	0
2	3 30	2	3	4	~~40~~	10
3	2 –	2	3	2	90	
b_j	~~50~~	50	30	20	150	
	~~30~~ 0					

Продовжуючи аналогічним чином, отримуємо початковий опорний план X_0:

i \ j	1	2	3	4	a_i
1	4 20	5 –	6 –	4 –	20
2	3 30	2 10	3 –	4 –	40
3	2 –	2 40	3 30	2 20	90
b_j	50	50	30	20	150

Обчислюємо відповідні плану перевезень X_0 транспортні витрати:

$$Z_0 = 20 \cdot 4 + 30 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 40 \cdot 2 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 2 = 400.$$

Знаходимо потенціали U_i $(i=\overline{1,\ 3})$ та V_j $(j=\overline{1,\ 4})$. Для цього складаємо систему рівнянь $U_i + V_j = c_{ij}$ для базисних x_{ij}:

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 4, \\ U_2 + V_1 = 3, \\ U_2 + V_2 = 2, \\ U_3 + V_2 = 2, \\ U_3 + V_3 = 3, \\ U_3 + V_4 = 2. \end{cases}$$

Нехай $U_3 = 0$, тоді отримуємо:

$U_1 = 1$; $U_2 = 0$; $U_3 = 0$;

$V_1 = 3$; $V_2 = 2$; $V_3 = 3$; $V_4 = 2$.

Обчислюємо $\overline{c_{ij}} = U_i + V_j$ та $\Delta_{ij} = \overline{c_{ij}} - c_{ij}$ $(i=\overline{1,\ 3};\ j=\overline{1,\ 4})$. Усі обчислення оформлюємо у вигляді таблиць:

$\overline{c_{ij}}$

U_i \ V_j	3	2	3	2
1	4	3	4	3
0	3	2	3	2
0	3	2	3	2

Δ_{ij}

i \ j	1	2	3	4
1	0	–2	–2	–1
2	0	0	0	–2
3	1	0	0	0

Оскільки серед оцінок Δ_{ij} є додатна оцінка Δ_{31}, розглянутий опорний план не оптимальний.

Переходимо до нового опорного плану. Включаємо в базис клітину, що відповідає додатній оцінці Δ_{31}. У таблиці опорного плану X_0 будуємо цикл перерахунку. Цикл містить клітини: x_{31}, x_{21}, x_{22}, x_{32}. Позначимо цикл пунктирною лінією.

Розглянемо клітини таблиці опорного плану, які утворюють цикл.

– 3 30	+ 2 10
+ 2 –	– 2 40

У клітині, що входить у базис, ставимо «+». У решті клітин циклу ставимо «–» і «+» по черзі, щоб у будь-яких двох сусідніх клітинах циклу стояли різні знаки. Знаходимо t – найменше із чисел x_{ij} клітин, позначених знаком «–». В даному випадку t = min (30; 40) = 30. Компоненти $\overline{x_{ij}}$ нового плану перевезень X_1 обчислюємо за формулами:

$$\overline{x_{ij}} = \begin{cases} x_{ij} & \text{– для клітин, що не входять в цикл,} \\ (x_{ij} + 30) & \text{– для клітин циклу, відмічених знаком } +, \\ (x_{ij} - 30) & \text{– для клітин циклу, відмічених знаком } -, \end{cases}$$

де x_{ij} – компоненти плану перевезень X_0.

План перевезень X_1 має вигляд:

i \ j	1	2	3	4	a_i
1	4 20	5 –	6 –	4 –	20
2	3 –	2 40	3 –	4 –	40
3	2 30	2 10	3 30	2 20	90
b_j	50	50	30	20	150

Обчислюємо транспортні витрати: $Z_1 = Z_0 - t \cdot \Delta_{31} = 400 - 30 \cdot 1 = 370$.

З планом перевезень X_1 діємо так само, як і з планом перевезень X_0. Знаходимо для плану перевезень X_1 потенціали U_i ($i = \overline{1,\ 3}$) та V_j ($j = \overline{1,\ 4}$). Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} U_1 + V_1 = 4, \\ U_2 + V_2 = 2, \\ U_3 + V_1 = 2, \\ U_3 + V_2 = 2, \\ U_3 + V_3 = 3, \\ U_3 + V_4 = 2. \end{cases}$$

Припускаємо, що $U_3 = 0$. Отримуємо:

$U_1 = 2;\quad U_2 = 0;\quad U_3 = 0;$

$V_1 = 2;\quad V_2 = 2;\quad V_3 = 3;\quad V_4 = 2.$

Обчислюємо $\overline{c_{ij}}$ та Δ_{ij} ($i = \overline{1,\ 3}$; $j = \overline{1,\ 4}$):

$\overline{c_{ij}}$

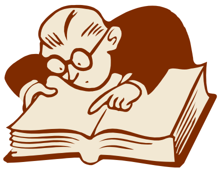
U_i \ V_j	2	2	3	2
2	4	4	5	4
0	2	2	3	2
0	2	2	3	2

Δ_{ij}

i \ j	1	2	3	4
1	0	–1	–1	0
2	–1	0	0	–2
3	0	0	0	0

Для плану перевезень X_1 всі $\Delta_{ij} \le 0$. Отже, це оптимальний розв'язок транспортної задачі. Записуємо відповідь:

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 30 & 10 & 30 & 20 \end{pmatrix}, \qquad Z_{\min} = 370.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

128. Бетон, що виробляється на заводах А, В і С, треба розвезти по будівельними майданчикам № 1, № 2 та № 3. Завод А виробляє 300 т бетону на добу, а заводи В і С – по 200 т. Потреба в бетоні за добу на будмайданчику № 1 – 250 т, № 2 – 150 т, № 3 – 300 т. Вартість перевезення однієї тонни бетону з заводу А на будмайданчики № 1, № 2, № 3 відповідно дорівнює 3, 2, 4 грош. од., з заводу В – 1, 2, 3 грош. од., з заводу С – 3, 1, 2 грош. од. Скласти план перевезення бетону, при якому вартість перевезень буде найменшою. Початковий план побудувати методом північно-західного кута.

129. На трьох шахтах видобувається руда в кількості 50, 30, 10 т на добу. Цю руду необхідно переробити на чотирьох заводах. Відомо, що перший і другий заводи можуть переробити 30 т руди на день, третій – 10 т, четвертий – 20 т. Вартості перевезень 1 т руди з кожної шахти на кожен завод задаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Скласти оптимальний план перевезення руди, що мінімізує вартість перевезень. Початковий план скласти методом північно-західного кута.

130. На чотирьох оптових базах зосереджено однорідний товар у кількостях 50, 80, 60 та 40 од. Цей товар необхідно перевезти до трьох магазинів. Кожен із магазинів повинен отримати відповідно 70, 90 та 70 одиниць товару. Вартості перевезень одиниці товару з кожної бази в усі магазини задаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Скласти план перевезень, при якому загальна вартість перевезень є мінімальною. Вихідний план скласти методом північно-західного кута.

131. У резерві трьох залізничних станцій А, В та С знаходяться відповідно 90, 400 та 110 вагонів. Скласти оптимальний план перегону цих вагонів до трьох пунктів завантаження зерна, якщо пункту № 1 необхідно 140 вагонів, № 2 – 300 вагонів, № 3 – 160 вагонів. Вартості перегонів одного вагона зі станції А у зазначені пункти відповідно дорівнюють 2, 5, 3 грош. од., зі станції В – 4, 1, 5 грош. од., а зі станції С – 3, 6, 8 грош. од. Початковий план побудувати методом мінімального елемента.

132. На трьох складах є борошно у кількості 50, 120 та 80 т, яке має бути протягом місяця доставлено чотирьом хлібозаводам у кількості 30, 70, 50, 100 т відповідно. Скласти оптимальний план перевезень, який мінімізує транспортні витрати, якщо вартість доставки 1 т борошна на хлібозаводи задана матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 14 & 4 \\ 8 & 14 & 1 & 2 \\ 6 & 11 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Вихідний план скласти методом мінімального елемента.

133. Завод має 4 цехи та 3 склади. Перший та другий цех виготовляють по 20 тис. виробів, третій – 40 тис., четвертий – 10 тис. виробів. Пропускна здатність складів за той же час характеризується показниками 30 тис., 40 тис. та 20 тис. виробів відповідно. Вартість перевезення 1 тис. виробів із цехів на склади задається матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезення виробів, при якому витрати на перевезення будуть найменшими. Вихідний план скласти методом мінімального елемента.

134. Дві філії фірми виготовляють однакову продукцію в кількості 400 од. продукції на місяць кожна. Вся продукція фірми поставляється до міст A, B, C, потреби яких відповідно 200, 500, 100 од. на місяць. Вартості перевезень одиниці продукції з першої філії до міст A, B і C дорівнюють 1 грош. од., 2 грош. од. та 2 грош. од. відповідно. Вартості перевезень одиниці виготовленої продукції з другої філії до міст B і C дорівнюють 3 грош. од. та 2 грош. од. Що стосується вартості перевезення одиниці продукції з другої філії до міста A, то вона може змінюватися в деяких межах (тому що, наприклад, перевезення може здійснюватися різними видами транспорту).

Скласти план постачання міст A, B та C продукцією фірми так, щоб сумарна вартість перевезення була найменшою.

135. Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів, використовуючи опорний план, знайдений методом мінімального елемента:

$i \backslash j$	1	2	3	4	a_i
1	3	2	1	1	50
2	3	2	1	3	20
3	1	2	1	2	30
b_j	20	30	40	10	

136. Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів, використовуючи опорний план, знайдений методом мінімального елемента:

$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	3	2	1	5
2	4	2	1	15
3	1	2	3	30
4	2	2	1	25
b_j	15	20	40	

137. Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів, використовуючи опорний план, знайдений методом північно-західного кута:

$i \backslash j$	1	2	3	4	a_i
1	1	8	2	3	30
2	4	7	5	1	50
3	5	3	4	4	20
b_j	15	15	40	30	

138. Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів, використовуючи опорний план, знайдений методом північно-західного кута:

$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	1	3	4	25
2	2	1	3	35
3	4	2	2	40
b_j	20	30	50	

6.3. Відкрита модель транспортної задачі

Транспортна задача, в якій сумарні запаси пунктів відправлення не збігаються із сумарним попитом пунктів призначення, називається задачею відкритого типу або задачею з неправильним балансом. Таким чином, для транспортної задачі відкритого типу $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Можливі два випадки:

1) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$; 2) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$.

1. Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то це означає, що попит на товар в пунктах призначення перевищує його запаси в пунктах відправлення. Введемо фіктивний пункт відправлення, запас товару в якому дорівнює:

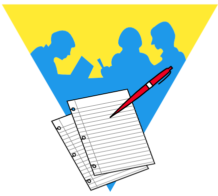
$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i .$$

Вартість перевезень між фіктивним пунктом відправлення та пунктами призначення приймаються рівними нулю. Отримуємо задачу закритого типу, яку розв'язуємо розглянутими вище методами.

2. Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то це означає, що сумарні запаси товару в пунктах відправлення перевищують сумарний попит пунктів призначення. У цьому випадку вводиться фіктивний пункт призначення з попитом на товар:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Вартість перевезень між пунктами відправлення та фіктивним пунктом призначення приймаються рівними нулю. Отримуємо задачу закритого типу.



ПРИКЛАДИ

139. Транспортну задачу відкритого типу звести до задачі закритого типу.

$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	3	4	3	30
2	2	3	4	50
b_j	40	50	20	

Р О З В ' Я З А Н Н Я

$\sum_{i=1}^{2} a_i = 30 + 50 = 80;$ $\sum_{j=1}^{3} b_j = 40 + 50 + 20 = 110.$

$\sum_{i=1}^{2} a_i < \sum_{j=1}^{3} b_j$, тому вводимо фіктивний пункт відправлення із запасом товару $a_3 = 110 - 80 = 30$.

Вартість перевезень з фіктивного пункту відправлення до усіх пунктів призначення приймаються рівними нулю. Отримуємо наступну задачу закритого типу:

$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	3	4	3	30
2	2	3	4	50
3ф	0	0	0	30
b_j	40	50	20	110

140. Транспортну задачу відкритого типу звести до задачі закритого типу.

$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	3	4	3	30
2	2	3	4	50
b_j	40	10	20	

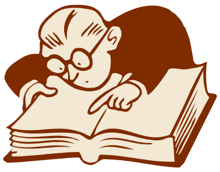
РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\sum_{i=1}^{2} a_i = 30 + 50 = 80;$ $\sum_{j=1}^{3} b_j = 40 + 10 + 20 = 70.$

$\sum_{i=1}^{2} a_i > \sum_{j=1}^{3} b_j$, тому вводимо фіктивний пункт призначення з попитом на товар $b_4 = 80 - 70 = 10$.

Вартість перевезень з пунктів відправлення до фіктивного пункту призначення приймаються рівними нулю. Отримуємо наступну задачу закритого типу.

$i \backslash j$	1	2	3	4ф	a_i
1	3	4	3	0	30
2	2	3	4	0	50
b_j	40	10	20	10	80



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

141. В трьох сховищах пального знаходиться бензин, який необхідно розвезти по трьох автозаправних станціях. При цьому у першому сховищі міститься 150 т, а в другому та третьому – по 100 т бензину. Першій та другій автозаправним станціям потрібно по 80 т бензину, третій – 110 т. Вартості перевезень 1 т бензину з першого сховища до автозаправних станцій дорівнюють відповідно 1, 3, 2 грош. од., з другого сховища – 2, 4, 1 грош. од., з третього – 4, 3, 3 грош. од.

Скласти такий план перевезень бензину, при якому загальна вартість перевезень є найменшою. Вихідний план скласти методом північно-західного кута.

142. Фірма здійснює постачання пляшок на три заводи, що займаються виробництвом прохолодних напоїв. Вона має три склади, причому на складі 1 знаходиться 2000 пляшок, на складі 2 – 3000 пляшок, а на складі 3 – 4000 пляшок. Першому заводу потрібно 4000 пляшок, другому – 6000, третьому – 1000 пляшок.

Вартість перевезення 1000 пляшок з першого складу на заводи дорівнює 6, 4, 9 грош. од. відповідно, зі складу 2 – 5, 3, 3 грош. од., зі складу 3 – 2, 3, 6 грош. од. Як слід організувати доставку пляшок на заводи, щоб загальна вартість перевезень була мінімальною? Вихідний план скласти методом північно-західного кута.

143. Для будівництва чотирьох доріг використовується гравій із трьох кар'єрів. Запаси гравію в кожному з кар'єрів відповідно дорівнюють 120, 280 та 160 т. Потреби в гравії для будівництва кожної з доріг відповідно дорівнюють 130, 220, 60 та 70 т. Відомі також тарифи перевезень 1 т гравію з кар'єрів до доріг, які задаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезень гравію, при якому потреби в ньому кожної з доріг, що будуються, були б задоволені при найменшій загальній вартості перевезень. Вихідний план побудувати методом мінімального елемента.

144. Для будівництва чотирьох об'єктів використовується цегла, виготовлена на трьох заводах. Щодня кожен із заводів випускає 240 тис., 50 тис., 110 тис. цегли. Щоденні потреби в цеглі на кожному з об'єктів, що будуються, відповідно рівні 90 тис., 190 тис., 40 тис., 130 тис. штук цегли.

Відомі також витрати на перевезення 1 тис. штук цегли з кожного із заводів до кожного з об'єктів, що будуються:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 7 & 5 \\ 9 & 6 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезень цегли до об'єктів будівництва, при якому загальна вартість перевезень є мінімальною. Вихідний план скласти методом мінімального елемента.

В задачах із номерами **145** – **148** розв’язати транспортну задачу.

145.

$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	2	3	2	30
2	4	2	3	40
b_j	20	40	30	

146.

$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	4	2	3	60
2	2	2	4	50
b_j	10	30	40	

147.

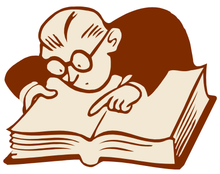
$i \backslash j$	1	2	3	4	a_i
1	5	2	3	6	90
2	2	3	4	5	60
3	6	4	2	1	100
b_j	80	120	75	30	

148.

$i \backslash j$	1	2	3	a_i
1	2	3	3	40
2	2	4	2	25
3	3	4	4	75
b_j	30	20	50	

6.4. Задачі транспортного типу

Алгоритм і методи розв’язання транспортної задачі можуть бути використані при розв’язанні деяких економічних задач, які не мають нічого спільного з транспортуванням вантажу. У цьому випадку величини c_{ij} мають різний зміст залежно від конкретної економічної задачі. Наприклад, означають вартість, відстань, час, продуктивність, ефективність тощо. Оскільки відповідно до алгоритму транспортної задачі шукається мінімум цільової функції, то в тих задачах, де потрібно знайти максимум, цільову функцію необхідно помножити на –1, тобто. занести до таблиці всі значення c_{ij} зі знаком мінус.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

149. М'ясокомбінат має у своєму складі 4 заводи, на кожному з яких може виготовлятися 3 види ковбасних виробів. Потужності кожного із заводів відповідно дорівнюють 32, 28, 27 і 35 тонн на добу. Щоденні потреби у ковбасних виробах кожного виду також відомі і відповідно дорівнюють 45, 37 і 40 тонн. Знаючи собівартість 1 тонни кожного виду ковбасних виробів на кожному заводі, що визначаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix},$$

знайти такий розподіл випуску ковбасних виробів між заводами, при якому собівартість продукції, що виготовляється, є мінімальною.

150. Знайти оптимальне розподілення фахівців трьох профілів, наявних у кількостях 60, 30, 45, між 4 видами робіт. Потреби у фахівцях для кожного виду роботи відповідно дорівнюють 25, 45, 25, 40; матриця:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & 6 \\ 5 & 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

характеризує ефективність використання фахівця на даній роботі.

151. Є 3 ділянки землі, на яких можуть бути засіяні пшениця, жито, гречка та ячмінь. Площа кожної з ділянок відповідно дорівнює 60, 20 та 30 га. З урахуванням наявності насіння пшеницею, житом, гречкою та ячменем слід відповідно засіяти 40, 20, 20, 30 га. Урожайність кожної з культур для кожної з ділянок різна і задається матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 30 & 35 & 40 \\ 25 & 20 & 18 \\ 16 & 19 & 14 \\ 18 & 16 & 30 \end{pmatrix}.$$

Визначити, скільки гектарів кожної культури на кожній ділянці слід засіяти, щоб загальний збір зерна був максимальним.

152. У будівельному тресті 13 важких та 4 легких екскаваторів. Необхідність у них є в чотирьох будівельних управліннях (БУ), виробіток в яких (в м^3 за 1 годину) на один важкий та один легкий екскаватори відповідно такі: 20 та 5, 22 та 10, 25 та 12, 18 та 6. В одне БУ можна відправити не більше 5 екскаваторів. Визначити кількість важких і легких екскаваторів, що направляються в кожне БУ, якщо потрібно максимізувати сумарний виробіток всіх екскаваторів за 1 годину.

153. Розподілити 3 види палива, що є у кількості 20, 30, 40 тонн, між чотирма агрегатами, потреби яких відповідно дорівнюють 40, 25, 15, 20 тонн. Матриця:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

характеризує теплотворну здатність (ккал/кг) кожного виду палива під час використання його на кожному агрегаті.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте транспортну задачу ЛП та запишіть її математичну модель.
2. Які існують методи побудови початкового опорного плану?
3. Скільки базисних клітин містить таблиця транспортної задачі?
4. Перелічіть основні етапи методу потенціалів.
5. Сформулюйте критерій оптимальності для допустимого розв’язку транспортної задачі.
6. Чим відрізняється транспортна задача відкритого типу від задачі закритого типу?
7. Як транспортну задача відкритого типу звести до задачі закритого типу?
8. Для розв’язання яких економічних задач застосовується транспортна задача?

7. ЦІЛОЧИСЛОВЕ ПРОГРАМУВАННЯ. МЕТОД ГОМОРІ

Значна частина економічних задач, що належать до задач лінійного програмування, потребує цілочислового розв’язку. До них відносяться задачі, в яких змінні величини означають кількість одиниць неподільної продукції. Якщо вихідна задача містить дві змінні x_1 та x_2, то цю задачу можна розв’язати графічно. Будуємо область допустимих розв'язків задачі без урахування цілочисловості. Отримуємо деяку опуклу область D на площині. Якщо вимагати цілочисловість розв’язків, то область допустимих розв’язків перетвориться на систему точок з цілими координатами x_1 та x_2, що належать області D. Враховуючи напрямок $\operatorname{grad} Z$ аналогічно тому, як це робилося в графічному методі без умови цілочисловості, знаходимо точку, в якій функція Z набуває екстремального значення, обчислюємо значення Z і записуємо відповідь. Розглянемо загальний випадок.

Нехай потрібно розв’язати задачу:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}; \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}; \\ x_j - \text{цілі}, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Якщо розв'язати задачу симплексним методом без умови цілочисловості, а потім округлити отримані результати до найближчих цілих значень, можна отримати розв'язок, який не належить області допустимих розв'язків вихідної задачі. У зв'язку з цим для розв'язання задач цілочислового програмування застосовують спеціальні методи. Одним із них є метод Гоморі (метод відтинаючих площин). Тимчасово відкинувши умову цілочисловості, знаходимо оптимальний розв'язок задачі. Нехай для визначеності $m = 3$, $n = 5$. Припустимо, що в оптимальному розв'язку x_1, x_2, x_3 – базисні змінні, а x_4, x_5 – вільні змінні.

Тоді остання таблиця має вигляд:

B	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
β_1	1	0	0	α_{14}	α_{15}
β_2	0	1	0	α_{24}	α_{25}
β_3	0	0	1	α_{34}	α_{35}

$X_{опт} = (\beta_1; \beta_2; \beta_3; 0; 0)$.

Якщо всі β_i – цілі числа, то отриманий розв'язок – цілочисловий оптимальний розв'язок. Записуємо відповідь. Якщо деяке β_i дробове, а всі α_{ij} – цілі числа, то задача не має цілочислового розв'язку. Якщо ж β_i – дробове і задача має цілочисловий розв'язок, то серед α_{ij} обов'язково є дробові числа. Позначимо: $[\beta_i]$, $[\alpha_{ij}]$ – цілі частини чисел β_i та α_{ij} (ціла частина числа – це найбільше ціле число, що не перевищує дане число); $\{\beta_i\}$, $\{\alpha_{ij}\}$ – дробові частини чисел β_i та α_{ij}, тобто $\{\beta_i\} = \beta_i - [\beta_{ij}] \geq 0$; $\{\alpha_{ij}\} = \alpha_{ij} - [\alpha_{ij}] \geq 0$.

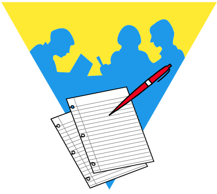
До системи обмежень задачі додаємо обмеження:

$$\sum_{j=1}^{n} \{\alpha_{ij}\} x_j \geq \{\beta_i\}.$$

Цьому обмеженню задовольняє будь-який цілочисловий розв'язок вихідної задачі і не задовольняє знайдений оптимальний нецілочисловий розв'язок. Таке обмеження називають правильним відсіканням.

Двоїстий симплексний метод дозволяє знайти оптимальний цілочисловий розв'язок, додаючи додаткове обмеження не до вихідної системи обмежень, а до отриманого оптимального нецілочислового розв'язку. Перетворимо додаткове обмеження на рівняння, віднімаючи з його лівої частини додаткову змінну. Помножимо обидві частини отриманого рівняння на –1 і, додавши в останній таблиці рядок та стовпець, записуємо це рівняння. Застосовуючи двоїстий симплексний метод, знаходимо новий розв'язок. Якщо він не є цілочисловим, то за останньою симплексною таблицею складаємо нове обмеження і продовжуємо обчислення доти, доки не буде отримано цілочисловий розв'язок задачі або буде встановлена нерозв'язність задачі.

Зауваження . Якщо в оптимальному плані кілька дробових β_i , то додаткове обмеження складаємо для змінної з $\max\{\beta_i\}$. Це прискорює процес отримання оптимального цілочислового розв'язку.



ПРИКЛАД

154. Знайти розв'язок задачі:

$$Z = -3x_1 - x_2 - 2x_3 \quad \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + \ \ x_2 + 5x_3 = 10, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}, \\ x_j - \text{цілі}, \ \ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Використовуючи симплексний метод, знаходимо розв'язок задачі без умов цілочисловості. Будуємо допустимий базисний розв'язок.

Розв'язуємо задачу, використовуючи отриманий ДБР. Усі обчислення оформляємо у вигляді таблиці.

i	базис	$C_Б$	B	–3	–1	–2	
				A_1	A_2	A_3	
1	–	–	9	1	2	4	
2	–	–	10	3	1	5	
1	A_2	–1	$^9/_2$	$^1/_2$	1	2	
2	–	–	$^{11}/_2$	$^5/_2$	0	3	
1	A_2	–1	$^{17}/_5$	0	1	$^7/_5$	
2	A_1	–3	$^{11}/_5$	1	0	$^6/_5$	
3			–10	0	0	–3	
1	A_2	–1	$^{17}/_5$	0	1	$^7/_5$	0
2	A_1	–3	$^{11}/_5$	1	0	$^6/_5$	0
3	A_4	0	–1	0	0	–1	1
4			–10	0	0	–3↑	0
1	A_2	–1	2	0	1	0	$^7/_5$
2	A_1	–3	1	1	0	0	$^6/_5$
3	A_3	–2	1	0	0	1	–1
4			–7	0	0	0	–3

Таблиця складається з двох частин. Побудоване ДБР виявилося оптимальним розв'язком задачі без умов цілочисловості, тому що в першій таблиці всі оцінки $\Delta_j \le 0$. Отримуємо: $Z_{\min} = -10$; $X_{опт} = ({}^{11}/_5;\ {}^{17}/_5;\ 0)$.

Нам необхідно отримати цілочисловий розв'язок. Знаходимо дробові частини x_1 та x_2: $\{{}^{17}/_5\} = \{3\,{}^2/_5\} = {}^2/_5$; $\{{}^{11}/_5\} = \{2\,{}^1/_5\} = {}^1/_5$.

Додаткове обмеження будуємо для змінної x_2 (перше рівняння), тому що ${}^2/_5 > {}^1/_5$.

$$\{{}^7/_5\}x_3 \ge \{{}^{17}/_5\} \quad \Rightarrow \quad {}^2/_5\, x_3 \ge {}^2/_5 \quad \Rightarrow \quad x_3 \ge 1.$$

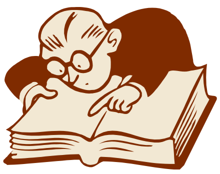
Нерівність перетворимо на рівняння: $x_3 - x_4 = 1$. Множимо обидві частини цього рівняння на -1:

$$-x_3 + x_4 = -1.$$

В симплексній таблиці додаємо рядок та стовпець і дописуємо отримане рівняння (друга частина таблиці).

Застосовуючи двоїстий симплексний метод, отримуємо відповідь:

$$X_{опт} = (1;\ 2;\ 1),\ \ Z_{\min} = -7.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задачі з номерами **155–158** розв'язати графічним методом.

155. $Z = -x_1 + x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \\ -3x_1 + x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \text{цілі} \end{cases}$$

156. $Z = x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 14, \\ 2x_2 \le 11, \\ 2x_1 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \text{цілі} \end{cases}$$

157. Цех випускає трансформатори двох видів. На один трансформатор першого виду витрачається 3 кг заліза та 5 кг дроту, а на один трансформатор другого виду – 5 кг заліза та 2 кг дроту. Від реалізації одного трансформатора першого виду цех отримує прибуток 90 грош. од., а другого – 40 грош. од. Скільки трансформаторів кожного виду має щодня випускати цех, щоб отримати максимальний прибуток, якщо витрати заліза не можуть перевищувати 30 кг на день, а дроту – 20 кг на день?

158. У відділі контролю працюють контролери 4 та 5 розрядів. Норма їх змінного виробітку не менше 1800 виробів (за 8 годин). Контролер 5 розряду перевіряє 25 виробів на годину, не допускаючи помилок у 98% випадків. Контролер 4 розряду перевіряє 15 виробів на годину, не допускаючи помилок у 95% випадків. Їх годинна зарплата складає: 5-й розряд – 4 грош. од., 4-й розряд – 3 грош. од. Кожна помилка контролера приносить підприємству 2 грош. од. збитків. Чисельність контролерів у відділі обмежена 8 контролерами 5-го розряду і 10 контролерами 4-го розряду.

Керівництво бажає знати оптимальний склад відділу контролю, при якому витрати на контроль будуть мінімальними.

Задачі з номерами **159** – **168** розв’язати методом Гоморі.

159. $Z = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_j \ge 0, \text{ цілі}, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

160. $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_j \ge 0, \text{ цілі}, \quad j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

161. $Z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 4x_3 + x_4 = 34, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 22, \\ x_j \ge 0, \text{ цілі}, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

162. $Z = x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 8, \\ x_j \ge 0, \text{ цілі}, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

163. $Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \text{ цілі}; \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

164. $Z = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 6, \\ -3x_1 + x_2 + x_5 = 9, \\ x_j \geq 0, \text{ цілі}; \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

165. Для придбання обладнання, що розміщується на виробничій площі 38 м^2 фірма виділяє 20 тис. грош. од. Є в наявності обладнання двох типів: типу А вартістю 5 тис. грош. од. за одиницю, яке потребує виробничу площу 8 м^2 і має продуктивність 9 тис. од. продукції за зміну, і типу В – вартістю 2 тис. грош. од., що займає площу 4 м^2 і дає за зміну 4 тис. од. продукції. Потрібно розрахувати оптимальний варіант придбання обладнання, що забезпечує максимальну продуктивність ділянки.

166. Фірма випускає три види виробів: А, В та С. Плановий змінний випуск становить 9 од. виробу А, 7 од. виробу В та 6 од. виробу С. Змінні ресурси: 51 од. виробничого обладнання, 54 од. сировини, 67 од. електроенергії, їх витрати на один виріб наведено в таблиці:

Ресурси	Вид. А	Вид. В	Вид. С
Устаткування	3	2	–
Сировина	1	4	1
Електроенергія	3	3	1

Прибуток від виробу А – 1 грош. од., виробу В – 5 грош. од., С – 1 грош. од. Визначити, скільки виробів кожного виду треба виробляти для отримання максимального прибутку від виробів, що випускаються понад планом.

167. Листовий матеріал необхідно розкроїти на заготовки у кількості не менше 40 одиниць першого типу та не менше 90 одиниць другого. Відомі 3 способи розкрою. Кількість деталей, що одержуються з одного аркуша, наведено в таблиці:

Тип деталі \ Спосіб розкрою	1	2	3
Тип 1	3	2	1
Тип 2	4	5	2

Визначити план розкрою, що мінімізує сумарні витрати матеріалу.

168. Яку мінімальну кількість листів жерсті розміру 13×6 м^2 необхідно розкроїти, якщо потрібно отримати не менше 30 заготовок 5×5 м^2 та 155 заготовок 4×3 м^2?

8. ДРОБОВО-ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

Математична модель задачі дробово-лінійного програмування має вигляд:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} \to \min\ (\max)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (\ge b_i; \quad \le b_i), \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

8.1. Графічний метод

Графічний метод застосовується для розв’язання задач, що містять дві змінні. Основні обмеження задаються як нерівності. Розглянемо два випадки:

а) нехай функція Z однорідна:

$$Z = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2}.$$

Система обмежень визначає на площині область допустимих розв’язків. Розглянемо лінії рівня функції Z. При $Z = \text{const}$ отримуємо:

$$x_2 = \frac{d_1 z - c_1}{c_2 - d_2 z} x_1.$$

Позначивши $k = \dfrac{d_1 z - c_1}{c_2 - d_2 z}$, отримуємо, що лінії рівня – це прямі $x_2 = kx_1$, що проходять через початок координат. При зміні значення Z прямі повертаються навколо початку координат. Геометрично задача полягає у знаходженні такої прямої $x_2 = kx_1$, яка відповідає найменшому (або найбільшому) значенню Z. Змінна k є функцією від Z, причому

$$k' = \frac{d_1 c_2 - c_1 d_2}{(c_2 - d_2 z)^2},$$

тобто k' зберігає знак при всіх Z.

Якщо $k' > 0$, то $k(Z)$ зростаюча функція, тобто більшому значенню k відповідає більше значення Z. Якщо $k' < 0$, то $k(Z)$ спадна функція, тобто більшому значенню k відповідає менше значення Z.

Зауваження. Знаменник k' завжди додатний. Знак k' визначається чисельником. Зручно використовувати рівність:

$$d_1 c_2 - c_1 d_2 = -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix};$$

б) нехай функція Z неоднорідна:

$$Z = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_0}{d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_0}.$$

У цьому випадку лінією рівня є пряма $x_2 = kx_1 + b$, що проходить через точку $M(\alpha, \beta)$, координати якої є розв'язком системи рівнянь:

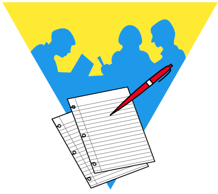
$$\begin{cases} c_1\alpha + c_2\beta + c_0 = 0, \\ d_1\alpha + d_2\beta + d_0 = 0. \end{cases}$$

Кутовий коефіцієнт k збігається з кутовим коефіцієнтом лінії рівня $x_2 = kx_1$ однорідної функції Z, тобто $k = \dfrac{d_1 z - c_1}{c_2 - d_2 z}$.

Щоб застосувати графічний метод, необхідно:

1) побудувати область допустимих розв’язків;
2) розв'язати систему рівнянь, знайти α і β та побудувати точку $M(\alpha, \beta)$;
3) як і в попередньому випадку, визначити знак k';

4) повертаючи пряму $x_2 = kx_1 + b$ навколо точки M, знайти граничні положення лінії рівня, що відповідають оптимальним точкам.



ПРИКЛАД

169. Розв'язати графічним методом задачу:

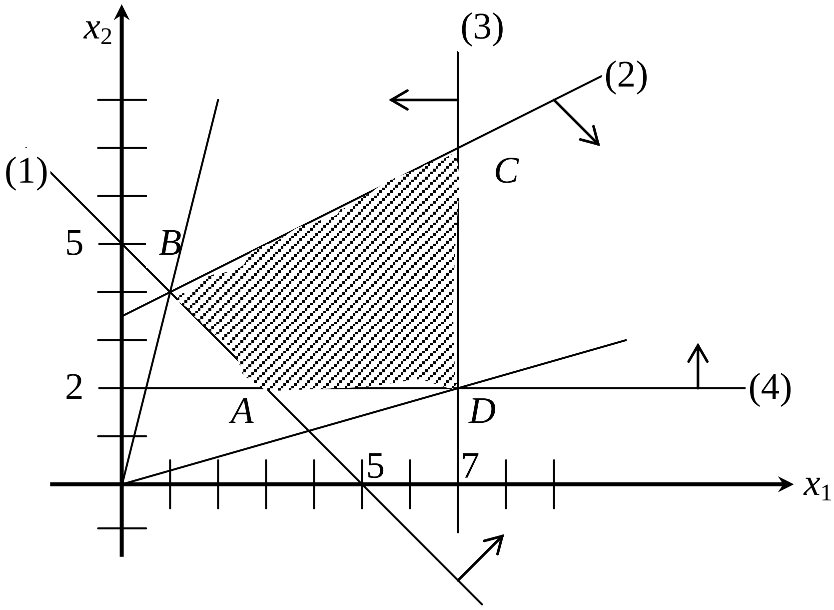
а) $$Z = \frac{3x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2} \to \min\ (\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 - 2x_2 \ge -7, \\ x_1 \le 7, \\ x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Р О З В ' Я З А Н Н Я

Будуємо область допустимих розв'язків. Отримуємо чотирикутник *ABCD*, обмежений прямими:

$$x_1 + x_2 = 5; \qquad x_1 - 2x_2 = -7; \qquad x_1 = 7; \qquad x_2 = 2.$$



Лініями рівня є прямі, що проходять через початок координат. Знаходимо знак k':

$$-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7 < 0,$$

тобто зі зростанням k функція Z зменшується. При повороті лінії рівня від осі $0x_1$ до осі $0x_2$ кутовий коефіцієнт k зростає, отже, функція Z зменшується. Звідси випливає, що в точці D функція Z набуває максимального значення, а в точці B – мінімального значення. Знаходимо координати цих точок. Точка B – це точка перетину першої та другої прямих; точка D – точка перетину третьої та четвертої прямих. Отримуємо $B(1; 4)$, $D(7; 2)$.

Обчислюємо значення функції Z у цих точках та записуємо відповідь:

$$X_{\min} = (1; 4), \quad Z_{\min} = -\frac{1}{9};$$

$$X_{\max} = (7; 2), \quad Z_{\max} = \frac{19}{11}.$$

б) розглянемо тепер пошук екстремуму неоднорідної функції Z при обмеженнях, заданих у попередній задачі, тобто розв'яжемо графічним методом задачу:

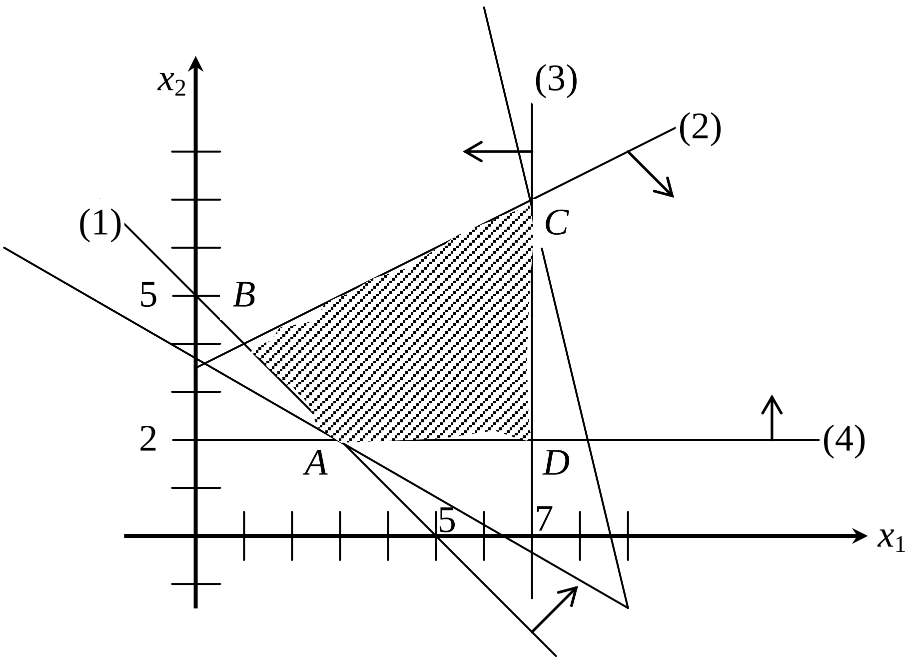
$$Z = \frac{x_1 + 5x_2 - 4}{x_1 + 3x_2 - 6} \to \min\ (\max)$$

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \geq 5, \\ x_1 - 2x_2 \geq -7, \\ x_1 \qquad \leq 7, \\ \qquad x_2 \geq 2, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Областю допустимих розв'язків є чотирикутник $ABCD$, побудований при розв'язанні попередньої задачі. Знаходимо точку M, через яку проходять лінії рівня. Для цього розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta - 4 = 0, \\ \alpha + 3\beta - 6 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 9, \\ \beta = -1. \end{cases}$$

Отже, лінії рівня проходять через точку M (9; -1).



Визначимо знак k':

$$-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0 .$$

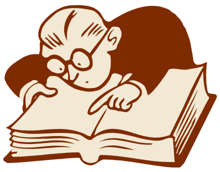
$k' > 0 \quad \Rightarrow$ $k(z)$ зростаюча функція, тобто зі зростанням k функція Z зростає. Звідси випливає, що в точці C функція Z приймає мінімальне значення, а точці A – максимальне значення.

Знаходимо координати цих точок. Точка C – це точка перетину другої та третьої прямих; точка A – точка перетину першої та четвертої прямих. Отримуємо: $C(7; 7)$, $A(3; 2)$.

Обчислюємо значення функції Z у цих точках і записуємо відповідь:

$X_{\min} = (7; 7)$, $\quad Z_{\min} = 1\dfrac{8}{11}$;

$X_{\max} = (3; 2)$, $\quad Z_{\max} = 3$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задачі з номерами **170 – 185** розв'язати графічним методом.

170. $Z = \dfrac{3x_1 - 2x_2}{2x_1 + 4x_2} \rightarrow \min (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 11, \\ x_1 - 2x_2 \geq -3, \\ 3x_1 + \ \ x_2 \leq 19, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

171. $Z = \dfrac{-5x_1 + x_2}{x_1 + 2x_2} \rightarrow \min (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -1, \\ 2x_1 + \ \ x_2 \leq 8, \\ x_1 + 3x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

172. $Z = \dfrac{2x_1 + 8x_2}{3x_1 + x_2} \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \le -3, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

173. $Z = \dfrac{4x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 15, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

174. $Z = \dfrac{2x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge -13, \\ x_1 + \ \ x_2 \ge 6, \\ 4x_1 - \ \ x_2 \le 19, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

175. $Z = \dfrac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + \ \ x_2 \ge 5, \\ -x_1 + 3x_2 \le 7, \\ 3x_1 - \ \ x_2 \le 11, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

176. $Z = \dfrac{3x_1 + 7x_2}{x_1 + x_2} \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 + \ \ x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + \ \ x_2 \le 12, \\ 5x_1 - \ \ x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

177. $Z = \dfrac{4x_1 + x_2}{2x_1 + x_2} \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 \le 8, \\ \ \ x_1 - 4x_2 \ge -10, \\ \ \ x_1 \qquad\quad \ge 2, \\ \qquad\qquad x_2 \ge 1. \end{cases}$$

178. $Z = \dfrac{5x_1 + 2x_2 - 4}{x_1 + x_2 + 1} \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \qquad \ge 1, \\ \qquad x_2 \ge 2. \end{cases}$$

179. $Z = \dfrac{x_1 + 3x_2 + 1}{2x_1 + x_2 - 3} \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 7, \\ x_1 - 3x_2 \ge -5, \\ x_1 \qquad\quad \le 4, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

180. $Z = \dfrac{2x_1 + x_2 - 10}{x_1 + 4x_2 + 2} \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \le 5, \\ \qquad\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

181. $Z = \dfrac{3x_1 + x_2 - 3}{x_1 + x_2 + 1} \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 \ge 0, \\ \ \ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

182. Для виробництва тканини певного артикулу підприємство може використовувати 2 ткацькі верстати. Продуктивність верстатів різна і становить 10 метрів на годину для верстата I і 4 метри на годину для верстата II. Витрати, пов'язані з виробництвом 1 метра тканини – 8 грош. од. для верстата I та 7 грош. од. для верстата II. У зв'язку з технічними особливостями виробництва обидва верстати не можуть працювати одночасно і, крім того, верстат II недоцільно використовувати менше 2 годин протягом зміни (8 годин).

Визначити, яку кількість тканини має виготовляти за зміну кожен верстат, щоб собівартість тканини була мінімальною, якщо підприємство має замовлення, для виконання якого необхідно виробляти не менше 50 метрів тканини за зміну.

183. Механічний завод при виготовленні деталей деякого типу використовує токарне, фрезерне та зварювальне обладнання. При цьому обробку кожної деталі можна проводити двома різними технологічними способами. Необхідні дані наведені у таблиці:

Устаткування	Час обробки 1 деталі (година)		Корисний фонд часу за зміну (верстато-години)
	I технолог. спосіб	II технолог. спосіб	
Фрезерне	1	2	160
Токарне	1	1	120
Зварювальне	1	–	90
Витрати на 1 деталь (грош. од.)	3	2	

Скласти оптимальний план завантаження обладнання, що мінімізує собівартість деталі, якщо планом передбачено випуск не менше 100 деталей за зміну.

184. Невелика фірма, що спеціалізується на виготовленні жіночого взуття, планує наступного місяця перейти на випуск двох моделей жіночих туфель, для яких використовуються три види шкіртоварів. Кількість шкіртоварів, що йде на виготовлення однієї пари туфель, собівартість та очікуваний прибуток від реалізації однієї пари кожної моделі, а також наявність шкіртоварів на складі фірми наведено в таблиці:

Модель туфель	Кількість шкіртоварів на 1 пару ($м^2$)			Собівартість (грош. од.)	Прибуток (грош. од.)
	I	II	III		
A	0,4	0,2	0,1	50	12
B	0,2	0,2	–	30	7
Запас шкіротоварів ($м^2$)	80	60	16		

Відділ збуту фірми вважає, що попит на туфлі моделі *B* не перевищуватиме попит на туфлі моделі *A* більш, ніж у 3 разу. Крім того, фірма має попереднє замовлення на виробництво 40 пар туфель моделі *B*. Визначити обсяги виробництва туфель кожної моделі, які забезпечать фірмі максимальну рентабельність виробництва.

185. Аграрна фірма, що спеціалізується на вирощуванні овочів, планує наступного року вирощувати 2 сільськогосподарські культури (капусту та моркву) та виділяє для цього до 100 га земельних угідь. Під капусту вирішено відвести ділянку не меншої площі, ніж під моркву. Водночас площа ділянки під капусту не повинна перевищувати площу ділянки під моркву більше, ніж на 70 га. Орієнтовні врожайність, собівартість та закупівельні ціни наведені в таблиці:

Показник	Капуста	Морква
Врожайність (ц/га)	300	400
Собівартість (грош. од.)	15	65
Закупівельна ціна (грош. од./ц)	20	80

Відомо також, що на обробку 1 га, зайнятого капустою, необхідно 50 людино-годин праці механізаторів, а 1 га, зайнятого морквою, – 150 людино-годин. Усього для обробки даних ділянок фірма може виділити 7500 людино-годин механізованої праці.

Визначити оптимальну структуру використання земельних угідь, взявши за критерій оптимальності рентабельність як відношення прибутку до собівартості, якщо керівництво фірми запланувало рівень валового доходу від реалізації продукції в розмірі 2400 грош. од.

8.2. Зведення задачі дробово-лінійного програмування до задачі лінійного програмування

Розглянемо задачу:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} \quad \to \min (\max)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Вважатимемо, що в області допустимих розв'язків знаменник цільової функції не дорівнює нулю і, отже, зберігає знак. Якщо $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 < 0$, чисельник і знаменник можна помножити на –1, тому у подальшому вважаємо, що $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0 > 0$ в області допустимих розв'язків.

Позначимо $y_0 = \dfrac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0}$ та введемо нові змінні:

$$y_j = y_0 x_j, \quad j = \overline{1, n}.$$

У розглянутій задачі переходимо до нових змінних:

$$Z = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} \quad \Rightarrow \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 y_0;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0;$$

$$y_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0 = 1.$$

У нових змінних вихідна задача запишеться у вигляді:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j + c_0 y_0 \quad \to \min (\max)$$

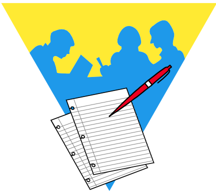
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ \sum_{j=1}^{n} d_j y_j + d_0 y_0 = 1, \\ y_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}; \quad y_0 > 0. \end{cases}$$

Отримали задачу ЛП (лінійного програмування), яка може бути розв'язана звичайним симплексним методом.

Нехай $Y_{опт} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, y_0)$.

Оптимальні значення x_j знаходимо за формулою

$$x_j = \frac{y_j}{y_0}, \quad j = \overline{1, n}.$$



ПРИКЛАД

186. Розв'язати задачу:

$$Z = \frac{x_1 + 2x_2 + x_3 - 1}{x_1 + 3x_2 + 2} \to \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 7, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases} \tag{8.1}$$

Р О З В ' Я З А Н Н Я

Позначимо: $y_0 = \dfrac{1}{x_1 + 3x_2 + 2}$; $y_j = y_0 x_j$, $j = \overline{1, 4}$. У нових змінних вихідна задача запишеться у вигляді:

$$Z = y_1 + 2y_2 + y_3 - y_0 \to \min$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 - y_0 = 0, \\ y_1 + y_2 + y_4 - 7y_0 = 0, \\ y_1 + 3y_2 + 2y_0 = 1, \\ y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}; \quad y_0 > 0. \end{cases} \tag{8.2}$$

Отримано задачу лінійного програмування. В симплексному методі обчислення починають з вихідного допустимого базисного розв'язку. Система основних обмежень задачі містить два одиничних вектори (A_3 та A_4). Потрібен третій одиничний вектор. Будуємо вихідний ДБР, після чого застосовуємо симплексний метод.

Обчислення оформляємо у вигляді таблиці:

i	базис	$C_Б$	B	1	2	1	0	-1
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_0
1	A_3	1	0	-1	1	1	0	-1
2	A_4	0	0	1	1	0	1	-7
3	–	–	1	1	3	0	0	2
1	A_3	1	$^1/_2$	$-^1/_2$	$^5/_2$	1	0	0
2	A_4	0	$^7/_2$	$^9/_2$	$^{23}/_2$	0	1	0
3	A_0	-1	$^1/_2$	$^1/_2$	$^3/_2$	0	0	1
4			0	-2	-1	0	0	0

Оскільки всі оцінки $\Delta_j \le 0$, то отримано оптимальний розв’язок задачі (8.2):

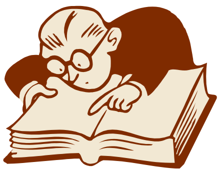
$$Y_{опт} = (0;\ 0;\ ^1/_2;\ ^7/_2;\ ^1/_2), \quad Z_{\min} = 0.$$

Оптимальні значення x_j задачі (8.1) знаходимо за формулою

$$x_j = \frac{y_j}{y_0}, \quad j = \overline{1,4}.$$

В даному випадку $y_0 = {}^1/_2$, тому $x_j = 2y_j$, $j = \overline{1,4}$.

Тому розв’язок вихідної задачі (8.1): $X_{опт} = (0;\ 0;\ 1;\ 7)$, $Z_{\min} = 0$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯННЯ

Знайти розв'язання задач із номерами **187** – **192** .

187. $Z = \dfrac{6x_1 + 6x_2 + x_3 - 9}{2x_1 + x_2 + 1} \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = -8, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

188. $Z = \dfrac{3x_1 + x_3 - 2}{2x_1 + 1} \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

189. $Z = \dfrac{x_1 - x_3 - x_4 + 2}{2x_2 - x_3 + 3} \to \max$

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 \qquad = 2, \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

190. $Z = \dfrac{3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 4}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \qquad = 2, \\ 2x_1 + \ x_2 \qquad + x_4 = 6, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

191. $Z = \dfrac{x_1 + x_2 + 2x_5 - 6}{x_2 + 2x_3 + 1} \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \qquad = 4, \\ x_1 \qquad + x_4 \qquad = 4, \\ \quad x_2 \qquad + x_5 = 3, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}. \end{cases}$$

192. $Z = \dfrac{2x_1 - 2x_2 - x_4 + 2}{x_1 + x_3 + 2} \to \min\ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - \ x_2 + x_3 \qquad = -1, \\ x_1 - 3x_2 \qquad - x_4 = -9, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

9. ЕЛЕМЕНТИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

9.1. Особливості задач нелінійного програмування

Деякі економічні задачі допускають такі математичні моделі, до яких змінні входять нелінійно. Загалом задача нелінійного програмування формулюється так:

знайти максимум або мінімум цільової функції $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ за умов: $\varphi_i\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0\ (\geq 0;\ \leq 0)$, $i = \overline{1,\ m}$, причому всі або частина заданих функцій f та φ_i є нелінійними.

На відміну від лінійного програмування в нелінійному програмуванні відсутні універсальні методи розв'язання задач типу симплексного. Порівняємо задачі лінійного та нелінійного програмування.

В задачах лінійного програмування область допустимих розв’язків є опуклою із скінченим числом крайніх точок. В задачах нелінійного програмування область допустимих розв’язків може бути неопуклою і може мати нескінченну кількість крайніх точок.

У разі лінійного програмування екстремум досягається в крайніх точках області допустимих розв’язків. У разі нелінійного програмування екстремум може досягатися не тільки в крайніх точках, а й всередині області допустимих розв’язків, причому цільова функція може мати декілька локальних екстремумів в області допустимих розв’язків, тоді як у задачах лінійного програмування локальний максимум або мінімум є одночасно і глобальним.

9.2 . Графічний метод

Графічний метод застосовується для розв’язання задач нелінійного програмування з двома змінними та обмеженнями-нерівностями. Розглянемо застосування методу на конкретному прикладі.

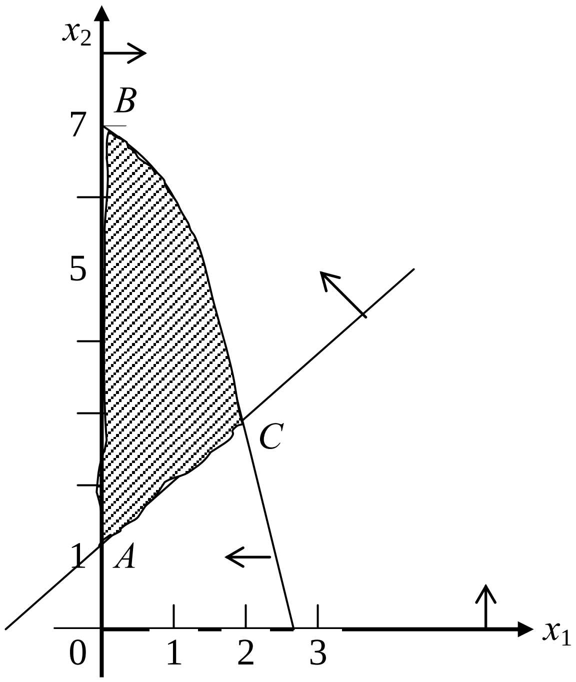
ПРИКЛАД

193. Знайти мінімальне та максимальне значення функції $Z = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 10x_2 + 26$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 - 7 \le 0, \\ x_1 - x_2 + 1 \le 0, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Р О З В ' Я З А Н Н Я

Будуємо область допустимих розв'язків задачі. Область обмежена параболою $x_2 = -\ x_1^2 + 7$, прямою $x_1 - x_2 + 1 = 0$ та віссю $0x_2$. Цільову функцію Z можна записати як $Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 5)^2$.



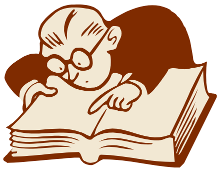
Для отримання рівняння лінії рівня вважаємо $Z = \text{const}$. Нехай $Z = \alpha \ge 0$. Отримуємо $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 5)^2 = \alpha$, Отже, лініями рівня є концентричні кола з центром в точці $M(1;\ 5)$ і радіусами, рівними $\sqrt{\alpha}$. На кожному з кіл $Z = \alpha$, тобто дорівнює квадрату радіуса кола.

Найменше значення функція Z набуває у внутрішній точці $M(1;\ 5)$. Тому

$$X_{\min} = (1;\ 5), \quad Z_{\min} = 0.$$

Коло найбільшого радіусу буде проходити через точку $A(0;\ 1)$. Тому

$$X_{\max} = (0;\ 1), \quad Z_{\max} = 17.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

Задачі з номерами **194** – **213** розв'язати графічним методом.

194. $Z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 2. \end{cases}$$

195. $Z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 1, \\ x_1 \le 3. \end{cases}$$

196. $Z = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 2, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$$

197. $Z = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 1. \end{cases}$$

198. $Z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 \le 2. \end{cases}$$

199. $Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 6)^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 \le 4, \\ x_2 \le 5. \end{cases}$$

200. $Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + \quad x_2 \le 9, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

201. $Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ \qquad x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

202. $Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 \qquad \ge 1, \\ \qquad x_2 \ge 2. \end{cases}$$

203. $Z = (x_1 - 4)^2 + x_2^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ \qquad x_2 \le 5. \end{cases}$$

204. $Z = (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 \qquad \ge 2, \\ \qquad x_2 \ge 1. \end{cases}$$

205. $Z = x_1^2 + x_2^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 \ge 2, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

206. $Z = x_1^2 + x_2^2 \to \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 + 2 \le 0, \\ x_1 - x_2 + 4 \ge 0. \end{cases}$$

207. $Z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1 \le 8, \\ x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

208. $Z = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min(\max)$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 20, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

209. $Z = x_1 \cdot x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \ge 2. \end{cases}$$

210. Фірма виготовляє два види продукції *A* та *B*, використовуючи для цього два види сировини, добовий запас якої становить відповідно 120 та 240 ум. од. Витрати сировини на виготовлення одиниці продукції кожного виду задані в таблиці:

Сировина	Витрати сировини на одиницю продукції (ум. од.)	
	A	*B*
1	1	3
2	3	4

Відділ збуту вважає, що виробництво продукції *B* має становити не більше 75% загального обсягу виробництва. Відома вартість реалізації одиниці виробленої продукції *A* і *B* – 80 грош. од. та 140 грош. од. відповідно.

Визначити оптимальний план виробництва продукції, що максимізує прибуток, якщо на основі досліджень було встановлено, що витрати c_1 і c_2 обумовлені виготовленням x_1 одиниць продукції *A* і x_2 одиниць продукції *B*, дорівнюють:

а) $c_1 = x_1^2 + 10x_1 + 100,$
$c_2 = x_2^2 + 50x_2;$

б) $c_1 = x_1^2,$
$c_2 = x_2^2 + 120x_2;$

в) $c_1 = x_1^2 + 60x_1,$
$c_2 = x_2^2 + 50.$

211. Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема випускає дві моделі книжкових полиць – *A* і *B*. Полиці обох моделей обробляються на верстатах I і II . Час обробки однієї полиці кожної моделі подано у таблиці:

Верстати	Час обробки полиці (хв)	
	A	*B*
I	30	15
II	12	36

Час роботи верстатів I та II складає відповідно 40 та 36 годин на тиждень. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі *A* ніколи не перевищує попит на полиці моделі *B* більш ніж на 30 одиниць, а попит на полиці моделі *B* не перевищує 50 одиниць на тиждень. Експериментальним шляхом встановлена залежність між цінами p_1 і p_2 однієї полиці моделей *A* та *B* та обсягами їх виробництва x_1 і x_2 відповідно:

а) $p_1 = 160 - x_1$,
$p_2 = 180 - x_2$;

б) $p_1 = 40 - x_1$,
$p_2 = 140 - x_2$;

в) $p_1 = 80 - x_1$,
$p_2 = 40 - x_2$;

г) $p_1 = 120 - x_1$,
$p_2 = 20 - x_2$;

д) $p_1 = 20 - x_1$,
$p_2 = 40$.

Визначити обсяги виробництва книжкових полиць різних моделей, що максимізують дохід фірми.

212. Цукровий завод виробляє з цукрових буряків 2 види продукції: цукор-пісок та цукор-рафінад. Техніко-економічні показники виробництва містяться у таблиці:

Ресурси	Норми витрат за 1 кг продукції		Запас ресурсів
	цукор пісок	цукор-рафінад	
Сировина (кг)	10	20	800
Електроенергія (кВт/год)	7	4	280
Устаткування (верстат-ч)	$50 - x_1$	$40 - x_2$	800
Прибуток від 1 кг (грош. од.)	2	3	

де x_1 та x_2 – обсяги виробництва цукру-піску та цукру-рафінаду відповідно. Визначити оптимальний план виробництва, що максимізує прибуток заводу.

213. Підприємство хімічної промисловості отримало замовлення на випуск двох видів продукції *A* та *B*. Виробнича потужність підприємства дозволяє виробити за місяць або 8 т продукції *A*, або 12 т продукції *B*, або будь-яку їх комбінацію в межах допустимої потужності. Забруднення довкілля, викликане виробництвом цих видів продукції, мультиплікативно залежить від їх обсягів (тобто має вигляд $x_1 \cdot x_2$, де x_1 – кількість виробленої продукції *A*, x_2 – продукції *B* (т)). Гранично допустимий рівень забруднення становить 18 ум. од. на місяць. Емпіричним шляхом встановлені залежності собівартостей c_1 та c_2 однієї тонни продукції *A* та *B* від обсягів їх виробництва:

$$c_1 = 2 + \frac{1}{x_1}, \quad c_2 = 5 + \frac{2}{x_2}.$$

За договором із замовником ціни на випущену продукцію встановлюються в залежності від обсягів їх виробництва за місяць наступним чином: якщо буде випущено 1 тонну продукції *A*, то її ціна буде 15 грош. од., якщо 2 тонни – то замовник платить по 14 грош. од. за кожну тонну, якщо 3 тонни – по 13 грош. од. тощо. Аналогічно для продукції *B*: 1 т – по 12 грош. од., 2 т – по 11 грош. од. за 1 тонну, 3 т – по 10 грош. од. за 1 тонну тощо.

Визначити оптимальний для підприємства місячний план випуску продукції, який максимізує його прибуток.

9.3. Екстремальні задачі без обмежень

Нехай потрібно знайти екстремум функції $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Використовуючи необхідну умову існування локального екстремуму, знаходимо стаціонарні точки. Для цього розв'язуємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \qquad j = \overline{1, n}.$$

Щоб визначити, чи є екстремум у стаціонарній точці, обчислюємо всі похідні другого порядку в цій точці і записуємо матрицю:

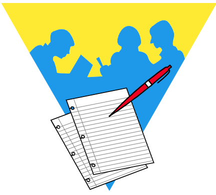
$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо головні мінори матриці:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1{}^2}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}; \qquad \ldots \qquad \Delta_n = \det H.$$

Якщо $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, …, $\Delta_n > 0$, то в стаціонарній точці локальний мінімум; якщо ж $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, … (тобто знаки мінорів чергуються, причому $\Delta_1 < 0$), то у стаціонарній точці локальний максимум.

Якщо серед головних мінорів матриці є рівні нулю, потрібні додаткові дослідження.



ПРИКЛАД

214. Дослідити на екстремум функцію

$$Z = x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - x_1{}^2 - x_2{}^2 - 4x_3{}^2 + 4x_1.$$

Р О З В ' Я З А Н Н Я

Обчислюємо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = x_2 + 2x_3 - 2x_1 + 4; \qquad \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1 - 2x_2; \qquad \frac{\partial z}{\partial x_3} = 2x_1 - 8x_3.$$

Стаціонарні точки знаходимо із системи:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 2x_1 + 4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Система має однин розв'язок: $x_1 = 4$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$. Отримали стаціонарну точку $M(4; 2; 1)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1{}^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} = 1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_2{}^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_3{}^2} = -8.$$

Зауважимо, що значення других похідних не залежить від порядку диференціювання, тобто $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}$.

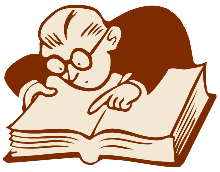
Складаємо матрицю H:

$$H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо головні мінори матриці H:

$$\Delta_1 = -2 < 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -16 < 0.$$

Отже, у точці $M(4; 2; 1)$ максимум. $Z_{max} = 8$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

У задачах з номерами **215** – **223** дослідити на екстремум наступні функції:

215. $Z = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1$.

216. $Z = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 - 4x_2$.

217. $Z = x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 + x_2$.

218. $Z = 2x_1 x_2 - 2x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 2x_2$.

219. $Z = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 + 4x_2 - 6x_3$.

220. $Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 9$.

221. $Z = x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 + 5x_1$.

222. $Z = x_1 x_3 + x_2 x_3 - 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 10x_3$.

223. $Z = e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3} - x_1 - x_2 - x_3$.

9.4. Метод множників Лагранжа

Метод множників Лагранжа дозволяє знаходити максимум або мінімум функції $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при обмеженнях-рівностях. Основна ідея методу полягає у перетворенні задачі умовної оптимізації на задачу відшукання безумовного екстремуму деякої спеціально побудованої функції Лагранжа.

Нехай потрібно розв'язати задачу:

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \to \; \min\ (\max)$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases}$$

Метод множників Лагранжа складається з наступних етапів.

1. Складаємо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, ..., x_n).$$

2. Знаходимо частинні похідні:

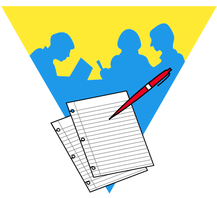
$$\frac{\partial L}{\partial x_j}, \ (j = \overline{1, n}) \quad \text{та} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1, x_2, ..., x_n), \ (i = \overline{1, m}).$$

3. Прирівняємо частинні похідні нулю та запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему рівнянь, знаходимо точки, в яких функція Z може мати екстремум.

4. Досліджуємо точки, що задовольняють систему рівнянь, на мінімум (максимум) за допомогою достатньої ознаки існування екстремуму.



ПРИКЛАД

224. Знайти екстремум функції $Z = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + 4x_3$ за умови $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$.

Р О З В ' Я З А Н Н Я

Складаємо функцію Лагранжа:

$$L\,(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + 4x_3 + \lambda(2x_1 + 2x_2 + x_3 - 7).$$

Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2 + 2\lambda; \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 + 2\lambda; \qquad \frac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 + 4 + \lambda;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 7.$$

Прирівняємо частинні похідні нулю, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2 + 2\lambda = 0, \\ 4x_2 + 2\lambda = 0, \\ 2x_3 + 4 + \lambda = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему, знаходимо $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = -1$; $\lambda = -2$.

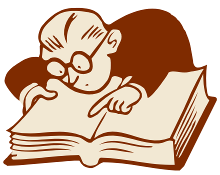
Обчислюємо похідні другого порядку в точці $M(3; 1; -1)$ і складаємо матрицю H:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо головні мінори матриці H:

$$\Delta_1 = 2 > 0; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 > 0.$$

Отже, в точці $M(3; 1; -1)$ мінімум. $Z_{\min} = 2$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

225. Знайти екстремум функції $Z = x_1^2 + x_2^2$ за умови $x_1 + x_2 = 2$.

226. Знайти екстремум функції $Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$ за умови $x_1 + x_2 = 7$.

227. Знайти екстремум функції $Z = e^{x_1} + 2e^{x_2}$ за умови $x_1 + 2x_2 = 3$.

228. Знайти екстремум функції $Z = 2x_1^2 + x_2^2$ за умови $2x_1 + x_2 = 6$.

229. Знайти екстремум функції $Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ за умови $x_1 + x_2 + x_3 = 6$.

230. Знайти екстремум функції $Z = e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}$ за умови $x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

231. Знайти екстремум функції $Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ за умови $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які економічні задачі належать до задач цілочислового програмування?
2. Які основні проблеми виникають під час розв’язання задач цілочислового програмування?
3. Які задачі цілочислового програмування можна розв’язати графічним методом і як це зробити?
4. Як скласти додаткове обмеження в методі Гоморі?
5. У яких випадках поставлена задача не має цілочислового розв’язку?
6. Сформулюйте задачу дробово-лінійного програмування.
7. Які задачі дробово-лінійного програмування можна розв’язати графічним методом та як це зробити?
8. Як задачу дробово-лінійного програмування звести до задачі лінійного програмування?
9. Сформулюйте загальну задачу нелінійного програмування.
10. У чому полягає відмінність оптимального розв'язку задачі нелінійного програмування від оптимального розв'язку задачі лінійного програмування?
11. Які методи розв'язання задач нелінійного програмування Ви знаєте?

ІНДИВІДУАЛЬНІ СЕМЕСТРОВІ ЗАВДВННЯ

Кожне індивідуальне завдання складається з двох задач. У завданні потрібно виконати наступне:

Задача 1.

1. Розв'язати задачу графічним методом.
2. Розв'язати задачу симплексним методом, попередньо побудувавши ДБР.
3. Розв'язати задачу симплексним методом зі штучним базисом.
4. Побудувати для вихідної задачі двоїсту та знайти її розв'язок за допомогою першої та другої теорем двоїстості.

Задача 2.

Фірма має 4 магазини роздрібної торгівлі, що розташовані в різних районах міста (*А*, *В*, *С*, *Д*), поставки в які здійснюються з двох складів (І та ІІ). У зв'язку із зростанням купівельного попиту фірма планує розширити площі магазинів, що дозволить завозити більше продукції зі складів. Щоб задовольнити потреби магазинів, передбачається будівництво складу ІІІ. Керівництво фірми розглядає два варіанти його розміщення. У таблиці наведено транспортні витрати, що відповідають перевезенню продукції з двох існуючих складів, два варіанти розміщення нового складу, потреби магазинів у продукції та місткість складів.

Оцінити дві транспортні моделі та прийняти рішення, який варіант розміщення нового складу більш вигідний. Розв’язати обидві транспортні задачі методом потенціалів, побудувавши початкове ДБР методом північно-західного кута для першого варіанта розміщення складу ІІІ, і методом мінімального елемента для другого варіанту.

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант 1.

Задача 1. $Z = -x_1 + x_3 - 4x_4 + x_5 + x_6 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	1	3	30
II	1	2	2	1	50
III (варіант 1)	2	2	1	2	70
III (варіант 2)	3	1	2	1	70
Потреби магазину	25	25	40	60	

Варіант 2.

Задача 1. $Z = 4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	1	3	60
II	2	4	3	1	30
III (варіант 1)	3	1	4	2	60
III (варіант 2)	3	3	2	2	60
Потреби магазину	35	25	55	35	

Варіант 3.

Задача 1. $Z = 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_4 + x_6 = 4, \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3, \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	5	5	4	3	70
II	2	4	3	4	40
III (варіант 1)	2	4	4	3	40
III (варіант 2)	4	5	2	2	40
Потреби магазину	30	40	50	30	

Варіант 4.

Задача 1. $Z = 6x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 10, \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	4	3	4	40
II	5	5	4	3	70
III (варіант 1)	2	4	4	3	40
III (варіант 2)	4	3	2	3	40
Потреби магазину	45	25	30	50	

Варіант 5.

Задача 1. $Z = x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25, \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	4	3	2	2	50
II	5	2	3	1	50
III (варіант 1)	1	3	5	2	50
III (варіант 2)	4	2	2	4	50
Потреби магазину	40	30	30	50	

Варіант 6 .

Задача 1. $Z = -3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	4	1	3	2	50
II	3	1	4	2	40
III (варіант 1)	3	3	2	5	60
III (варіант 2)	4	5	2	2	60
Потреби магазину	45	25	30	50	

Варіант 7.

Завдання 1. $Z = -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_5 \;\rightarrow\; \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_2 + x_4 - x_5 = 1, \\ -5x_1 + x_5 + x_6 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Завдання 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	3	3	5	4	45
II	1	2	5	2	60
III (варіант 1)	2	3	1	4	45
III (варіант 2)	3	2	2	3	45
Потреби магазину	40	20	30	60	

Варіант 8 .

Задача 1. $Z = x_1 + 4x_2 \;\rightarrow\; \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -3x_1 + x_2 + x_6 = 0, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	4	1	60
II	4	2	5	3	20
III (варіант 1)	5	1	3	4	70
III (варіант 2)	4	2	4	3	70
Потреби магазину	40	30	45	35	

Варіант 9.

Задача 1. $Z = -x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	4	1	40
II	2	1	3	4	70
III (варіант 1)	2	2	4	4	40
III (варіант 2)	3	4	2	3	40
Потреби магазину	30	40	50	30	

Варіант 10.

Задача 1. $Z = 3x_1 - 2x_2 - 9x_3 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ -2x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	3	1	60
II	2	2	3	1	40
III (варіант 1)	1	2	1	2	50
III (варіант 2)	3	1	2	1	50
Потреби магазину	20	55	20	55	

Варіант 11.

Задача 1. $Z = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Завдання 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*У*	*З*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	1	3	60
II	1	3	4	1	50
III (варіант 1)	2	4	5	3	40
III (варіант 2)	5	1	3	3	40
Потреби магазину	45	25	45	35	

Варіант 12.

Задача 1. $Z = -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_5 + x_6 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Завдання 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	2	1	50
II	2	2	1	2	70
III (варіант 1)	1	2	1	3	30
III (варіант 2)	2	3	1	2	30
Потреби магазину	40	25	60	25	

Варіант 13.

Задача 1. $Z = 3x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_6 \;\to\; \min$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_6 = 0, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Завдання 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	4	3	3	5	70
II	2	2	3	4	30
III (варіант 1)	2	3	2	5	50
III (варіант 2)	3	4	3	2	50
Потреби магазину	25	50	50	25	

Варіант 14.

Задача 1. $Z = -5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6 \;\to\; \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3, \\ -2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ 2x_2 + x_3 + x_6 = 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Завдання 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	1	3	2	2	45
II	2	2	1	3	60
III (варіант 1)	1	2	3	1	45
III (варіант 2)	2	1	2	2	45
Потреби магазину	30	20	60	40	

Варіант 15.

Задача 1. $Z = 11x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Завдання 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	1	3	30
II	2	1	1	4	50
III (варіант 1)	2	1	3	1	70
III (варіант 2)	4	2	1	2	70
Потреби магазину	25	40	60	25	

Варіант 16.

Задача 1. $Z = -5x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Завдання 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	4	2	60
II	3	3	2	4	40
III (варіант 1)	2	4	2	4	50
III (варіант 2)	4	3	2	3	50
Потреби магазину	30	40	30	50	

Варіант 17.

Задача 1. $Z = -x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_5 \;\to\; \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_4 + x_6 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Завдання 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	3	2	50
II	3	4	2	5	40
III (варіант 1)	2	3	1	4	60
III (варіант 2)	3	2	4	2	60
Потреби магазину	35	55	30	30	

Варіант 18.

Задача 1 . $Z = -2x_1 - 6x_2 + x_4 \;\to\; \min$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Завдання 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	2	3	55
II	2	3	3	4	40
III (варіант 1)	2	2	3	3	55
III (варіант 2)	3	4	2	1	55
Потреби магазину	40	30	65	15	

Варіант 19.

Задача 1. $Z = 10x_1 + 6x_2 \quad \rightarrow \text{ max}$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 + x_6 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Завдання 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	3	4	4	2	30
II	3	4	5	5	70
III (варіант 1)	4	3	2	4	50
III (варіант 2)	3	2	5	3	50
Потреби магазину	30	45	35	40	

Варіант 20.

Задача 1. $Z = -x_1 - 12x_2 \quad \rightarrow \text{ min}$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_5 + x_6 = 4, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ -x_1 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	2	1	45
II	1	3	2	2	50
III (варіант 1)	3	1	2	3	55
III (варіант 2)	2	2	1	3	55
Потреби магазину	50	30	40	30	

Варіант 21.

Задача 1 . $Z = -4x_1 - 10x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 \qquad - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 \qquad + 2x_4 = 8, \\ -x_1 \qquad + x_3 \qquad + x_5 = 1, \\ -2x_1 + x_2 \qquad - x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	1	3	4	70
II	2	2	3	3	35
III (варіант 1)	3	1	2	4	45
III (варіант 2)	1	4	3	2	45
Потреби магазину	35	25	45	45	

Варіант 22.

Задача 1 . $Z = -2x_1 + 12x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ \qquad 3x_2 \qquad + x_4 - x_5 = 1, \\ -2x_1 - x_2 \qquad + x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	1	2	50
II	3	2	3	1	60
III (варіант 1)	2	2	3	1	40
III (варіант 2)	1	3	1	3	40
Потреби магазину	55	20	55	20	

Варіант 23.

Задача 1 . $Z = -x_1 + 3x_2 + 12x_3 - x_4 \quad \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*У*	*З*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	2	3	60
II	1	4	1	3	55
III (варіант 1)	3	1	2	1	40
III (варіант 2)	1	2	3	2	40
Потреби магазину	65	20	20	50	

Варіант 24.

Задача 1 . $Z = -4x_1 + 13x_2 + 3x_3 - x_4 \quad \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	2	1	3	60
II	1	3	2	2	45
III (варіант 1)	1	2	3	1	45
III (варіант 2)	2	1	2	2	45
Потреби магазину	20	30	60	40	

Варіант 25.

Задача 1. $Z = -x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 7x_5 \;\to\; \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 2, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_3 - x_6 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	4	4	2	30
II	3	4	5	5	70
III (варіант 1)	4	3	2	4	50
III (варіант 2)	4	2	5	1	50
Потреби магазину	30	45	35	40	

Варіант 26.

Задача 1 . $Z = -9x_1 - 10x_2 \;\to\; \min$

$$\begin{cases} -7x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_6 = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	4	1	3	55
II	1	2	2	3	60
III (варіант 1)	3	1	2	1	40
III (варіант 2)	2	2	1	3	40
Потреби магазину	50	20	65	20	

Варіант 27.

Задача 1. $Z = -3x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_6 = 0, \\ 2x_1 + x_4 - x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	5	3	4	50
II	2	3	2	5	80
III (варіант 1)	4	3	4	3	20
III (варіант 2)	2	3	3	5	20
Потреби магазину	55	30	35	30	

Варіант 28.

Задача 1. $Z = 2x_1 - 7x_2 - 2x_3 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_2 + x_4 - x_5 = 1, \\ -5x_1 + x_5 + x_6 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	2	4	5	45
II	3	3	5	4	45
III (варіант 1)	1	2	5	4	60
III (варіант 2)	4	3	2	3	60
Потреби магазину	20	40	60	30	

Варіант 29.

Задача 1. $Z = x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	5	2	3	2	50
II	4	3	2	2	50
III (варіант 1)	5	3	3	4	50
III (варіант 2)	4	2	4	5	50
Потреби магазину	30	40	50	30	

Варіант 30.

Задача 1 . $Z = 6x_1 + 10x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_4 + x_6 = 3, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*У*	*З*	*Д*	Місткість складу
I	2	4	3	2	70
II	4	2	3	3	35
III (варіант 1)	4	2	3	1	45
III (варіант 2)	2	3	4	2	45
Потреби магазину	40	30	30	50	

Варіант 31.

Задача 1. $Z = 12x_1 + x_2 \quad \rightarrow \ \max$

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ -3x_1 - x_2 + 2x_5 + x_6 = 4, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	2	1	50
II	2	2	1	2	70
III (варіант 1)	1	2	1	3	30
III (варіант 2)	3	1	1	2	30
Потреби магазину	25	40	25	60	

Варіант 32.

Задача 1 . $Z = 3x_1 + 5x_2 \quad \rightarrow \ \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*У*	*З*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	1	1	55
II	2	2	3	1	50
III (варіант 1)	1	4	2	2	45
III (варіант 2)	2	3	1	2	45
Потреби магазину	40	30	50	3 0	

Варіант 33.

Задача 1. $Z = 3x_1 - 9x_2 - 2x_3 + x_5 \;\; \rightarrow \;\; \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -2x_1 - x_2 - x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	1	2	1	40
II	1	4	1	3	55
III (варіант 1)	1	2	2	3	60
III (варіант 2)	1	2	4	2	60
Потреби магазину	20	65	20	50	

Варіант 34.

Задача 1. $Z = -4x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \;\; \rightarrow \;\; \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	2	3	3	35
II	3	1	2	4	45
III (варіант 1)	2	1	3	4	70
III (варіант 2)	4	2	3	2	70
Потреби магазину	35	45	25	45	

Варіант 35.

Задача 1. $Z = 4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	4	2	60
II	3	3	2	4	40
III (варіант 1)	2	4	2	4	50
III (варіант 2)	3	2	4	3	50
Потреби магазину	40	40	40	30	

Варіант 36 .

Задача 1. $Z = 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_5 + x_6 = 4, \\ -x_1 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	1	4	50
II	2	3	1	3	55
III (варіант 1)	2	2	3	3	45
III (варіант 2)	4	1	2	2	45
Потреби магазину	40	30	20	60	

Варіант 37.

Задача 1. $Z = 3x_2 + 6x_3 - x_4 \quad \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 10, \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	2	3	40
II	4	2	3	5	50
III (варіант 1)	3	3	4	5	60
III (варіант 2)	5	2	4	3	60
Потреби магазину	25	45	55	25	

Варіант 38.

Задача 1. $Z = 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 \quad \to \min$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_5 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25, \\ 6x_1 + x_3 + x_4 = 36, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_5 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	1	2	1	60
II	2	1	1	2	35
III (варіант 1)	1	2	3	2	55
III (варіант 2)	2	2	1	2	55
Потреби магазину	50	30	30	40	

Варіант 39.

Задача 1. $Z = 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_5 \quad \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + x_6 = 3, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	4	3	70
II	2	4	3	1	45
III (варіант 1)	2	1	3	2	35
III (варіант 2)	4	2	1	2	35
Потреби магазину	20	60	40	30	

Варіант 40.

Задача 1. $Z = -x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 2x_5 \quad \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_4 = 1, \\ -x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_1 - 5x_5 + x_6 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_5 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	1	2	4	45
II	2	2	3	3	35
III (варіант 1)	2	1	3	4	70
III (варіант 2)	2	4	2	2	70
Потреби магазину	25	35	45	45	

Варіант 41.

Задача 1. $Z = 4x_1 + x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_6 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	3	2	2	40
II	4	3	2	4	50
III (варіант 1)	2	4	3	4	60
III (варіант 2)	3	4	4	2	60
Потреби магазину	30	40	45	35	

Варіант 42.

Задача 1. $Z = -6x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	4	1	3	55
II	3	1	2	1	40
III (варіант 1)	1	2	2	3	60
III (варіант 2)	3	4	1	2	60
Потреби магазину	65	20	50	20	

Варіант 43.

Задача 1. $Z = 3x_1 - 9x_2 - 2x_3 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	4	1	3	2	50
II	2	3	2	1	40
III (варіант 1)	4	1	3	2	60
III (варіант 2)	3	3	2	2	60
Потреби магазину	40	30	35	45	

Варіант 44.

Задача 1. $Z = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1, \\ 2x_2 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	4	4	5	5	70
II	2	3	6	5	60
III (варіант 1)	2	4	5	3	20
III (варіант 2)	4	2	3	3	20
Потреби магазину	40	40	4 0	30	

Варіант 45.

Задача 1. $Z = x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_5 + x_6 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	2	2	1	2	70
II	1	2	2	1	50
III (варіант 1)	1	2	1	3	30
III (варіант 2)	2	1	2	2	30
Потреби магазину	40	25	60	25	

Варіант 46.

Задача 1. $Z = -x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 - x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	1	1	40
II	2	2	3	3	60
III (варіант 1)	1	3	1	3	50
III (варіант 2)	3	2	1	2	50
Потреби магазину	30	40	5 0	30	

Варіант 47.

Задача 1. $Z = -5x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	3	2	4	40
II	2	4	2	4	50
III (варіант 1)	3	2	4	3	60
III (варіант 2)	2	4	4	3	60
Потреби магазину	30	45	35	40	

Варіант 48.

Задача 1. $Z = -6x_1 + 11x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 2, \\ 2x_2 + x_4 + x_5 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 + 2x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	3	4	40
II	2	2	3	2	90
III (варіант 1)	4	5	6	4	20
III (варіант 2)	4	3	3	5	20
Потреби магазину	50	20	60	20	

Варіант 49.

Задача 1. $Z = -5x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 10x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 - x_5 = 5, \\ -x_1 + x_3 + x_5 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	4	3	5	2	55
II	3	2	4	1	60
III (варіант 1)	3	2	2	3	35
III (варіант 2)	4	2	1	3	35
Потреби магазину	30	20	60	40	

Варіант 50.

Задача 1. $Z = -x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_5 + x_6 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	4	4	3	3	65
II	5	4	5	3	4 0
III (варіант 1)	4	5	3	4	45
III (варіант 2)	5	2	5	4	45
Потреби магазину	55	25	45	25	

Варіант 51.

Задача 1. $Z = -2x_1 + x_4 - 6x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_5 - x_6 = 2, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_6 = 1, \\ -x_1 + x_3 + x_6 = 1, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	1	3	60
II	2	4	3	1	30
III (варіант 1)	3	1	4	2	60
III (варіант 2)	2	2	2	4	60
Потреби магазину	35	25	55	35	

Варіант 52.

Задача 1. $Z = -10x_2 - 6x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_2 + x_4 - 2x_5 + x_6 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	2	2	3	4	30
II	2	3	2	5	50
III (варіант 1)	4	3	3	5	70
III (варіант 2)	3	4	4	3	70
Потреби магазину	50	25	50	25	

Варіант 53.

Задача 1. $Z = -12x_2 - x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -3x_2 - x_3 + 2x_5 + x_6 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 2x_1 - x_3 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	2	4	3	4	40
II	5	5	4	3	70
III (варіант 1)	2	4	4	3	40
III (варіант 2)	4	5	2	2	40
Потреби магазину	45	25	30	50	

Варіант 54.

Задача 1 . $Z = -4x_1 - 10x_2 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	2	1	1	2	35
II	1	2	3	2	55
III (варіант 1)	3	1	2	1	60
III (варіант 2)	2	2	1	2	60
Потреби магазину	30	50	40	30	

Варіант 55.

Задача 1. $Z = 12x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_4 - x_5 = 1, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	1	3	65
II	3	1	4	1	50
III (варіант 1)	3	2	2	1	40
III (варіант 2)	1	4	2	2	40
Потреби магазину	40	35	20	60	

Варіант 56.

Задача 1. $Z = -x_1 + 12x_2 - x_4 + 3x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	4	5	6	4	20
II	3	2	3	4	40
III (варіант 1)	2	2	3	2	90
III (варіант 2)	3	2	2	3	90
Потреби магазину	60	50	20	20	

Варіант 57.

Задача 1. $Z = -x_1 + 13x_2 + 3x_3 - 4x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 12, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	4	3	5	70
II	2	2	3	4	40
III (варіант 1)	3	4	3	5	40
III (варіант 2)	5	3	5	3	40
Потреби магазину	50	40	30	30	

Варіант 58.

Задача 1. $Z = -x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_3 - x_6 = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	4	3	2	5	40
II	2	3	1	4	60
III (варіант 1)	2	3	3	2	50
III (варіант 2)	1	4	2	3	50
Потреби магазину	55	35	30	30	

Варіант 59.

Задача 1. $Z = -10x_1 - 9x_2 \quad \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + x_3 + 2x_6 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_6 = 1, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	4	1	3	2	50
II	3	1	4	2	40
III (варіант 1)	3	3	2	5	60
III (варіант 2)	3	4	5	1	60
Потреби магазину	45	25	30	50	

Варіант 60.

Задача 1. $Z = x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 + x_6 \quad \to \max$

$$\begin{cases} x_2 - 3x_5 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_5 + x_6 = 2, \\ -x_3 + x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	2	2	3	1	40
II	3	2	3	1	60
III (варіант 1)	1	2	1	2	50
III (варіант 2)	2	3	1	2	50
Потреби магазину	55	20	55	20	

Варіант 61.

Задача 1. $Z = 2x_1 - 2x_2 - 7x_3 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ -5x_1 + x_5 + x_6 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	3	1	3	50
II	2	2	3	3	60
III (варіант 1)	1	3	1	1	40
III (варіант 2)	2	1	2	1	40
Потреби магазину	40	30	50	30	

Варіант 62.

Задача 1 . $Z = x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + x_4 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	4	4	4	60
II	2	4	5	3	45
III (варіант 1)	3	5	5	3	45
III (варіант 2)	5	3	4	4	45
Потреби магазину	45	25	50	30	

Варіант 63.

Задача 1. $Z = 6x_1 + 10x_5 \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_5 = 2, \\ -2x_1 + x_4 - 2x_5 + x_6 = 3, \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	2	3	3	55
II	3	2	2	3	55
III (варіант 1)	2	3	3	4	40
III (варіант 2)	4	2	4	2	40
Потреби магазину	40	30	15	65	

Варіант 64.

Задача 1. $Z = x_2 + 12x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 = 4, \\ -x_2 - 3x_3 + 2x_5 + x_6 = 4, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	4	1	40
II	2	1	3	4	70
III (варіант 1)	2	2	4	4	40
III (варіант 2)	4	2	2	4	40
Потреби магазину	30	40	50	30	

Варіант 65.

Задача 1. $Z = 3x_1 + 5x_4 \quad \to \text{ max}$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ -2x_1 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	4	3	4	60
II	3	4	2	4	50
III (варіант 1)	3	3	2	2	40
III (варіант 2)	2	4	2	3	40
Потреби магазину	40	30	45	35	

Варіант 66.

Задача 1. $Z = 3x_1 - 9x_2 - 2x_3 + x_5 \quad \to \text{ min}$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_3 + x_6 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	3	4	70
II	3	2	4	2	40
III (варіант 1)	2	2	4	4	40
III (варіант 2)	4	3	3	2	40
Потреби магазину	30	50	40	30	

Варіант 67.

Задача 1. $Z = x_1 + x_3 - x_4 - 4x_5 + x_6 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = 5, \\ x_1 + x_4 - x_5 + x_6 = 5, \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 7, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	4	5	3	20
II	2	3	6	5	60
III (варіант 1)	4	4	5	5	70
III (варіант 2)	5	6	4	3	70
Потреби магазину	40	30	40	40	

Варіант 68.

Задача 1. $Z = x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 - x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_4 + x_5 = 8, \\ -x_2 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	5	4	60
II	3	3	5	4	45
III (варіант 1)	2	2	4	5	45
III (варіант 2)	4	3	3	4	45
Потреби магазину	40	20	60	30	

Варіант 69.

Задача 1. $Z = -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + 2x_5 + x_6 = 4, \\ -x_2 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	2	4	4	3	4 0
II	5	5	4	3	70
III (варіант 1)	2	4	3	4	40
III (варіант 2)	4	3	5	3	40
Потреби магазину	40	30	50	30	

Варіант 70.

Задача 1. $Z = -x_1 + 6x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_1 - x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	1	3	4 0
II	2	2	3	3	35
III (варіант 1)	3	2	1	4	75
III (варіант 2)	2	3	4	2	75
Потреби магазину	50	45	35	20	

Варіант 71.

Задача 1. $Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \quad \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -\ x_2 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 10, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_6 = 25, \\ x_1 + 6x_2 + x_3 = 36, \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	3	2	50
II	3	4	2	5	40
III (варіант 1)	2	3	1	4	60
III (варіант 2)	5	2	2	3	60
Потреби магазину	35	55	30	30	

Варіант 72.

Задача 1. $Z = -x_1 + 7x_2 + 2x_3 - 3x_5 \quad \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_2 + x_4 - 2x_5 + x_6 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	5	4	5	3	40
II	4	4	3	3	65
III (варіант 1)	4	5	3	4	45
III (варіант 2)	4	3	4	5	45
Потреби магазину	25	45	55	25	

Варіант 73.

Задача 1. $Z = 2x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_5 \quad \to \max$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_2 + x_4 - x_5 = 1, \\ -5x_3 + x_5 + x_6 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	4	3	4	3	20
II	3	5	3	4	50
III (варіант 1)	2	3	2	5	80
III (варіант 2)	4	3	4	2	80
Потреби магазину	30	55	35	30	

Варіант 74.

Задача 1. $Z = x_1 + 4x_2 \quad \to \max$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 1, \\ 2x_2 + x_4 + x_6 = 4, \\ -3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	2	1	5 0
II	2	2	1	2	70
III (варіант 1)	1	2	1	3	30
III (варіант 2)	3	1	2	1	30
Потреби магазину	40	25	60	25	

Варіант 75.

Задача 1. $Z = -x_1 + x_2 - 2x_3 - 6x_5 \quad \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 6, \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	4	3	2	3	80
II	2	3	2	2	40
III (варіант 1)	4	6	5	4	30
III (варіант 2)	3	6	4	6	30
Потреби магазину	20	45	40	45	

Варіант 76.

Задача 1. $Z = 3x_1 - 9x_2 + x_5 - 2x_6 \quad \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_4 - x_6 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_6 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	4	2	4	50
II	3	3	2	4	40
III (варіант 1)	2	3	4	2	60
III (варіант 2)	3	4	2	3	60
Потреби магазину	30	45	35	40	

Варіант 77.

Задача 1. $Z = 5x_1 + x_2 \quad \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*У*	*З*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	4	1	60
II	4	3	5	2	5 5
III (варіант 1)	3	2	2	3	3 5
III (варіант 2)	2	4	3	1	3 5
Потреба магазину	30	20	40	60	

Варіант 78 .

Завдання 1 . $Z = - x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 \quad \rightarrow \quad \min$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ -2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_5 + x_6 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	1	3	4	70
II	2	2	3	3	35
III (варіант 1)	3	1	2	4	45
III (варіант 2)	2	3	2	3	45
Потреби магазину	35	25	45	45	

Варіант 79.

Задача 1. $Z = 3x_1 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \;\rightarrow\; \min$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_3 - x_6 = 0, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	4	2	60
II	3	3	2	4	40
III (варіант 1)	2	4	2	4	50
III (варіант 2)	2	4	4	2	50
Потреби магазину	30	40	30	50	

Варіант 80.

Задача 1. $Z = x_1 - 5x_2 - x_3 - x_5 - x_6 \;\rightarrow\; \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_4 + x_6 = 3, \\ -x_2 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ -2x_2 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	1	2	70
II	1	2	2	1	50
III (варіант 1)	1	4	1	3	30
III (варіант 2)	2	3	4	2	30
Потреби магазину	40	30	20	60	

Варіант 81.

Задача 1. $Z = -6x_1 + 11x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	5	5	4	3	70
II	2	4	4	3	40
III (варіант 1)	2	4	3	4	40
III (варіант 2)	3	2	2	5	40
Потреби магазину	30	40	50	30	

Варіант 82.

Задача 1. $Z = -5x_1 + 10x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_3 + x_5 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_4 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	1	3	55
II	3	2	1	4	50
III (варіант 1)	2	2	3	3	45
III (варіант 2)	4	3	2	2	45
Потреби магазину	40	30	60	20	

Варіант 83.

Задача 1. $Z = -x_1 + 3x_3 - x_4 + 8x_5 \quad \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_5 + x_6 = 4, \\ x_1 + x_4 + x_5 = 3, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	5	3	3	4	50
II	4	3	2	2	50
III (варіант 1)	5	2	3	2	50
III (варіант 2)	3	4	4	3	50
Потреби магазину	40	30	50	30	

Варіант 84.

Задача 1. $Z = -2x_1 + x_2 - 6x_4 \quad \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 8, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	4	3	60
II	3	4	5	3	60
III (варіант 1)	3	3	4	4	30
III (варіант 2)	5	4	2	3	30
Потреби магазину	25	35	35	55	

Варіант 85.

Задача 1. $Z = -6x_1 - 10x_2 \quad \to \min$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	4	2	3	3	35
II	2	4	3	1	45
III (варіант 1)	2	4	3	2	70
III (варіант 2)	3	2	4	2	70
Потреби магазину	30	40	50	30	

Варіант 86.

Задача 1. $Z = 12x_1 + x_2 \quad \to \max$

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_5 + 2x_6 = 4, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ -x_2 + 2x_3 + x_6 = 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	2	3	2	90
II	3	2	3	4	40
III (варіант 1)	4	5	6	4	20
III (варіант 2)	5	4	5	4	20
Потреби магазину	50	60	20	2 0	

Варіант 87.

Задача 1. $Z = -4x_1 - 10x_4 \quad \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 8, \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_1 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	4	4	2	30
II	3	4	5	5	70
III (варіант 1)	4	3	2	4	50
III (варіант 2)	5	2	2	4	50
Потреби магазину	30	4 5	35	40	

Варіант 88.

Задача 1. $Z = -2x_1 + 4x_2 + 12x_3 - 2x_4 + x_5 \quad \to \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ -2x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	4	6	5	4	20
II	4	3	2	3	90
III (варіант 1)	2	3	2	2	40
III (варіант 2)	1	2	3	2	40
Потреби магазину	45	20	40	45	

Варіант 89.

Задача 1. $Z = -x_1 + 12x_2 + 3x_3 - x_4 \quad \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	3	1	4	1	50
II	1	2	1	3	65
III (варіант 1)	3	2	2	1	40
III (варіант 2)	1	4	1	2	40
Потреби магазину	35	40	60	20	

Варіант 90.

Задача 1. $Z = -4x_1 + 13x_2 - x_4 + 3x_6 \quad \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_4 + x_6 = 7, \\ -x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_4 + x_5 + x_6 = 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	3	2	60
II	4	1	5	2	40
III (варіант 1)	1	3	1	4	55
III (варіант 2)	3	2	3	2	55
Потреби магазину	10	35	60	50	

Варіант 91.

Задача 1. $Z = 4x_1 + 7x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -x_2 - 2x_3 + x_5 + x_6 = 2, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_2 + x_3 + x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_3 - x_6 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	3	3	4	4	30
II	3	4	5	3	60
III (варіант 1)	2	3	4	3	60
III (варіант 2)	5	2	2	4	60
Потреби магазину	35	65	25	25	

Варіант 92.

Задача 1. $Z = -9x_1 - 10x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -7x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 = 1, \\ -4x_1 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 1, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	2	2	3	1	50
II	3	2	1	1	55
III (варіант 1)	1	4	2	2	45
III (варіант 2)	3	2	1	2	45
Потреби магазину	30	40	30	50	

Варіант 93.

Задача 1. $Z = -3x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_6 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	3	3	35
II	4	3	5	2	55
III (варіант 1)	3	2	4	1	60
III (варіант 2)	2	4	3	2	60
Потреби магазину	20	30	40	60	

Варіант 94.

Задача 1. $Z = -7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_4 - x_5 = 1, \\ -5x_2 + x_5 + x_6 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	3	1	60
II	2	2	3	1	40
III (варіант 1)	1	2	1	2	50
III (варіант 2)	3	1	2	1	50
Потреби магазину	20	55	20	55	

Варіант 95.

Задача 1. $Z = x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_5 \quad \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_2 + x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	2	2	4	4	40
II	3	2	4	2	40
III (варіант 1)	2	3	3	4	70
III (варіант 2)	3	3	4	2	70
Потреби магазину	30	30	40	50	

Варіант 96.

Задача 1. $Z = 10x_1 + 6x_2 \quad \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_4 + x_6 = 3, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	2	1	45
II	1	3	2	2	50
III (варіант 1)	3	1	2	3	55
III (варіант 2)	1	3	2	2	55
Потреби магазину	50	30	40	30	

Варіант 97.

Задача 1. $Z = 12x_1 + x_3 \quad \to \ \max$

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_5 = 4, \\ -3x_1 - x_3 + 2x_5 + x_6 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	3	4	4	2	30
II	3	4	5	5	70
III (варіант 1)	4	3	2	4	50
III (варіант 2)	5	2	3	3	50
Потреби магазину	30	45	35	40	

Варіант 98.

Задача 1. $Z = 5x_2 + 3x_4 \quad \to \ \max$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ -x_2 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + 3x_4 + x_5 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*A*	*B*	*C*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	4	3	70
II	2	4	3	1	45
III (варіант 1)	2	1	3	2	35
III (варіант 2)	2	1	2	4	35
Потреби магазину	20	60	40	30	

Варіант 99.

Задача 1. $Z = -9x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_5 \quad \to \min$

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ -x_1 - 2x_2 - x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	1	3	30
II	2	1	1	4	50
III (варіант 1)	2	1	3	1	70
III (варіант 2)	3	2	1	1	70
Потреби магазину	25	40	60	25	

Варіант 100.

Задача 1. $Z = x_1 + 3x_2 + 2x_4 - x_5 \quad \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + x_3 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25, \\ 6x_2 + x_4 + x_5 = 36, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_5 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*У*	*З*	*Д*	Місткість складу
I	2	2	3	3	35
II	3	2	1	4	75
III (варіант 1)	2	3	1	3	40
III (варіант 2)	2	3	2	2	40
Потреби магазину	45	50	35	20	

Варіант 101.

Задача 1. $Z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 + x_6 \;\to\; \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 + x_6 = 10, \\ x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	5	5	4	3	70
II	2	4	3	4	40
III (варіант 1)	2	4	4	3	40
III (варіант 2)	3	2	3	5	40
Потреби магазину	30	40	50	30	

Варіант 102.

Задача 1. $Z = 3x_1 + x_4 - x_5 - x_6 \;\to\; \min$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_4 - x_6 = 6, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	4	3	2	2	50
II	5	2	3	1	50
III (варіант 1)	1	3	5	2	50
III (варіант 2)	3	4	3	2	50
Потреби магазину	40	30	30	50	

Варіант 103.

Задача 1. $Z = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25, \\ 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_6 = 11, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 9, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	1	3	30
II	1	2	2	1	50
III (варіант 1)	2	2	1	2	70
III (варіант 2)	1	1	3	2	70
Потреби магазину	25	25	40	60	

Варіант 104.

Задача 1. $Z = -4x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 2x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ -3x_1 + 4x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

Задача 2.

Магазин / Торговий склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	3	5	4	45
II	1	2	5	2	60
III (варіант 1)	2	3	1	4	45
III (варіант 2)	4	1	3	3	45
Потреби магазину	40	20	30	60	

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вітлінський, В. В., Наконечний, С. І. та Терещенко, Т. О. (2017). *Математичне програмування.* Київ: КНЕУ, 248 с.
2. Вовк, В. М., Зомчак, Л. М. (2019). *Оптимізаційні методи і моделі*. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 360 с.
3. Григорків, В. С. (2017). *Оптимізаційні методи та моделі: вибрані завдання для тематичного контролю.* Чернівці: ДрукАрт, 168 с.
4. Зайченко, О. Ю., Зайченко, Ю. П. (2016). *Досліждення операцій. Збірник задач.* 2-ге вид. Київ: Видавничий дім «Слово», 472 с.
5. Негрей, М. В., Артим-Дрогомирецька, З. Б. (2018). *Дослідження операцій.* Львів: ЛНУ ім. І.Франка, 312 с.
6. Фещур, Р. В., Кічор, В. П. та Олексів, І. Я. (2017). *Економіко-математичне моделювання.* Львів: Бухгалтерський центр «Ажур», 340 с.

ВІДПОВІДІ

Розділ 2.

10. $X_{min} = (1; 1)$, $Z_{min} = 5$; $X_{max} = (4; 5)$, $Z_{max} = 22$.

11. $X_{min} = (0; 2)$, $Z_{min} = 2$; $X_{max} = (2; 3)$, $Z_{max} = 7$.

12. min на відрізку AB, де A(0; 3), B(3; 0), $Z_{min} = 6$; $X_{max} = (3; 5)$, $Z_{max} = 16$.

13. min на відрізку AB, де A(1; 2), B(5; 6), $Z_{min} = -3$; $X_{max} = (5; 0)$, $Z_{max} = 15$.

14. min на відрізку AB, де A(1; 5), B(5; 1); $Z_{min} = 6$.

15. $X_{опт} = (2; 2)$, $Z_{max} = -4$.

16. max на промені AB, де A(5; 1); $Z_{max} = 8$.

17. min на промені AB де A(8; 1); $Z_{min} = -7$.

18. 1) $X_{min} = (1; 1)$, $Z_{min} = 2$; $X_{max} = (5; 5)$, $Z_{max} = 10$;

2) $X_{min} = (4; 0)$, $Z_{min} = -4$; $X_{max} = (5; 5)$, $Z_{max} = 5$;

3) $X_{min} = (5; 5)$, $Z_{min} = -15$; $X_{max} = (1; 1)$, $Z_{max} = -3$;

4) $X_{min} = (1; 1)$, $Z_{min} = 2$; $X_{max} = (5; 2)$, $Z_{max} = 13$;

5) min на відрізку AB, де A(1; 1), B(4; 0), $Z_{min} = 4$;

$X_{max} = (5; 5)$, $Z_{max} = 20$.

19. при $\lambda > 4$ $X_{опт} = (2; 5)$;

при $\lambda = 4$ max на відрізку AB, де A(2; 5), B(12; 0);

при $\lambda < 4$ $X_{опт} = (12; 0)$;

20. при $\lambda < 0$ $X_{опт} = (0; 0)$;

при $\lambda = 0$ max на відрізку AB де A(0; 2); B(0; 0);

при $0 < \lambda < 1$ $X_{опт} = (0; 2)$;

при $\lambda = 1$ max на промені AK, де A(0; 2);

при $\lambda > 1$ max не існує.

21. $X_{опт} = (70; 30)$, $Z_{max} = 13{,}5$ млн грош. од.

22. $X_{опт} = (6; 4)$, $Z_{max} = 14$.

23. max на відрізку AB, де A(800; 0; 0), B(0; 1000; 0), $Z_{max} = 800$ грош. од.

24. $X_{опт} = (0{,}375; 0{,}125)$, $Z_{min} = 0{,}525$ грош. од.

25. $X_{опт} = (5; 7)$, $Z_{max} = 6\,858$ пасажирів.

26. $X_{опт} = (200; 1000)$, $Z_{max} = 270$.

27. max на відрізку AB, де A(2; 2); B($^{10}/_{3}$; $^{4}/_{3}$), $Z_{max} = 12\,000$ грош. од.

29. $X_{опт} = (1; 1; 0; 0)$, $Z_{min} = 2$.

30. $X_{опт} = (2; 1; 0; 0)$, $Z_{max} = 6$.

31. max на відрізку X_1X_2, де $X_1 = (0; 3; 2; 0)$, $X_2 = (2; 1; 0; 0)$, $Z_{max} = 3$.

32. max на відрізку X_1X_2, де $X_1 = (0; 3; 2; 0)$, $X_2 = (2; 1; 0; 0)$, $Z_{max} = 3$.

33. $X_{опт} = (2; 2; 4; 0; 0)$, $Z_{max} = 14$.

34. $X_{опт} = (3; 5; 6; 0; 0)$, $Z_{min} = –8$.

35. max на відрізку X_1X_2, де $X_1 = (3; 0; 9; 0; 3)$, $X_2 = (4; 1; 7; 0; 0)$, $Z_{max} = 3$.

36. $X_{опт} = (8; 9; 0; 16; 0)$, $Z_{min} = –25$.

37. max на відрізку X_1X_2, де $X_1 = (3; 6; 0; 0; 3; 7)$, $X_2 = (6; 5; 6; 0; 0; 0; 3)$, $Z_{max} = 21$.

38. $X_{опт} = (0{,}25; 0; 0; 0{,}5; 0{,}25)$, $Z_{min} = 42{,}5$ грош. од.

39. $X_{max} = \left(\frac{4}{39};\ 0;\ \frac{5}{39};\ \frac{30}{39}\right)$.

40. max на відрізку X_1X_2, де $X_1 = (200; 0; 0; 320; 0)$, $X_2 = (0; 200; 0; 0; 600)$, $Z_{max} = 960$ тис. грош. од.

41. min на відрізку X_1X_2, де $X_1 = (0; 40; 60; 50; 30; 0)$, $X_2 = (40; 0; 60; 10; 70; 0)$, $Z_{min} = 290$ грош. од.

Розділ 3.

43. $X_{опт} = (1; 3)$, $Z_{min} = –7$.

44. $X_{опт} = (1; 4)$, $Z_{max} = 13$.

45. безліч розв'язків; один з них $X_{опт} = (1; 5)$, $Z_{max} = 6$.

46. безліч розв'язків; один з них $X_{опт} = (3; 2)$, $Z_{min} = –5$.

47. $Z_{max} = \infty$.

48. $Z_{max} = \infty$.

49. $X_{опт} = (1; 0; 2; 0; 1)$, $Z_{max} = 9$.

50. $X_{опт} = (5; 1; 0; 0; 12)$, $Z_{min} = –2$.

51. $X_{опт} = (1; 6; 14; 0; 0)$, $Z_{max} = –7$.

52. $X_{опт} = (0; 0; 1; {}^1/_2; 0; 0)$, $Z_{max} = – 6$.

53. $X_{опт} = (0; 1; 2; 0)$, $Z_{min} = –5$.

54. $X_{опт} = (0; 14; 3; 0; 0)$, $Z_{min} = –11$.

55. $X_{опт} = (18; 0; 23; 25)$, $Z_{max} = 157$.

56. $X_{опт} = (7; 2; 0; 0)$, $Z_{max} = 21$.

57. $X_{опт} = (2; 7; 4)$, $Z_{min} = -17$.

58. $X_{опт} = (0; 15; 15; 45)$, $Z_{max} = 180$ грош. од., не єдиний розв'язок.

59. $X_{опт} = (280; 540; 120)$, $Z_{max} = 1\,620$ грош. од.

60. $X_{опт} = (50\,000; 0; 50\,000)$, $Z_{max} = 18\,000$ грош. од.

61. $X_{опт} = (7\,000; 1\,000; 2\,000)$, $Z_{max} = 45\,000$ грош. од.

62. $X_{опт} = (80; 130; 20)$, $Z_{max} = 2\,320$ грош. од.

64. $X_{опт} = (0; 4; 0; 1; 4)$, $Z_{min} = 2$, не єдиний розв'язок.

65. $X_{опт} = (4; 9; 13; 0; 0)$, $Z_{max} = 23$.

66. $X_{опт} = (2; 0; 1; 9; 0)$, $Z_{min} = -23$.

67. $X_{опт} = (2; 2)$, $Z_{min} = -6$.

68 . $X_{опт} = (5; 3)$, $Z_{max} = 28$.

69. $X_{опт} = (4; 3; 0; 4; 0)$, $Z_{min} = -3$.

70. $X_{опт} = (5; 4; 0; 12; 0)$, $Z_{max} = 6$.

71. $X_{опт} = (18; 0; 1; 0; 0; 10)$, $Z_{max} = 42$.

72. $X_{опт} = (1; 0; 2)$, $Z_{min} = -1$.

73. $X_{опт} = (6; 1; 6)$, $Z_{min} = -8$.

74. $X_{опт} = (1; 1; 7)$, $Z_{min} = 6{,}65$ грош. од.

75. $X_{опт} = (0; 55; 50; 10)$, $Z_{min} = 770$ грош. од.

76. 1) $X_{опт} = (30; 129; 10\,000)$, $Z_{max} = 1\,675$ грош. од.

2) $X_{опт} = (30; 40; 1\,100)$, $Z_{max} = 1\,120$.

77. $X_{опт} = (200; 0; 1\,400; 1\,200)$, $Z_{max} = 11\,400$ грош. од.

79. $X_{опт} = (4; 0; 2; 0; 4)$, $Z_{min} = -10$.

80. $X_{опт} = (2; 1; 0; 0; 4)$, $Z_{min} = 1$, не єдиний розв'язок.

81. $X_{опт} = (^9/_2; 0; ^1/_2)$, $Z_{min} = -^{13}/_2$.

82. $X_{опт} = (0; ^1/_3; ^8/_3)$, $Z_{min} = 28$.

83. $X_{опт} = (3; 2)$, $Z_{max} = 8$.

84. $X_{опт} = (1; 2)$, $Z_{max} = -2$.

85. $X_{опт} = (0; ^7/_3; ^1/_3; 0)$, $Z_{min} = -^{13}/_3$.

86. $X_{опт} = (4; 0; 2)$, $Z_{max} = 14$, не єдиний розв'язок.

87. $X_{опт} = (0; 0; 3; 1)$, $Z_{min} = 9$.

88. $X_{опт} = (4; 0; 0)$, $Z_{min} = 4$.

89. $X_{опт} = (4; 1; 9)$, $Z_{max} = 2$.

90. $X_{опт} = (200\,000; 50\,000; 125\,000; 125\,000)$, $Z_{max} = 76\,000$ \$.

91. $X_{опт} = (108; 324; 648)$, $Z_{max} = 2\,376$ грош. од.

92. $X_{опт} = (200; 10; 50; 40)$, $Z_{max} = 1\,920\,000$ грош. од., не єдиний розв'язок.

Розділ 4.

106. $X_{опт} = (1; 0; 2; 0; 1)$, $Y_{опт} = (3; 4; 1)$, $Z_{max} = f_{min} = 9$.

107. $X_{опт} = (0; {}^{1}/_{3}; 0; {}^{11}/_{3}; 4; 0)$, $Y_{опт} = (-{}^{19}/_{3}; -{}^{11}/_{3}; -{}^{1}/_{3})$, $Z_{min} = f_{max} = -{}^{46}/_{3}$.

108. $X_{опт} = ({}^{3}/_{2}; {}^{9}/_{2}; 0)$, $Y_{опт} = (0; {}^{1}/_{2}; {}^{3}/_{2}; 0)$, $Z_{min} = f_{max} = {}^{21}/_{2}$.

109. $X_{опт} = ({}^{9}/_{2}; 0; {}^{1}/_{2})$, $Y_{опт} = ({}^{1}/_{2}; {}^{7}/_{2}; 0)$, $Z_{min} = f_{max} = {}^{23}/_{2}$.

110. $X_{опт} = ({}^{17}/_{5}; 0; {}^{8}/_{5})$, , $Y_{опт} = ({}^{22}/_{5}; 0; {}^{2}/_{5}; 0)$, $Z_{min} = f_{max} = {}^{116}/_{5}$.

111. $X_{опт} = (7; 4; 9; 0; 0)$, $Y_{опт} = (-1; 3; 4)$, $Z_{max} = f_{min} = 23$.

112. $X_{опт} = (3; 0; 0; {}^{1}/_{2})$, $Y_{опт} = (2{,}5; 0{,}75)$, $Z_{max} = f_{min} = -14{,}5$.

113. $X_{опт} = (1; 2; 0)$, $Y_{опт} = (4; 3)$, $Z_{min} = f_{max} = 10$.

114. $X_{опт} = ({}^{1}/_{2}; 0; {}^{3}/_{2})$, $Y_{опт} = (6; 3)$, $Z_{max} = f_{min} = 6$.

115. $X_{опт} = (2; 1; 0)$, $Y_{опт} = (4; 2)$, $Z_{max} = f_{min} = 20$.

Розділ 5.

117. $X_{опт} = (5; 4; 6; 0; 0)$, $Z_{min} = -7$.

118. $X_{опт} = (3; 6; 0; 0; 5)$, $Z_{max} = 2$.

119. $X_{опт} = (5; 0; 1)$, $Z_{min} = -5$.

120. $X_{опт} = (7; 4; 9; 0; 0)$, $Z_{max} = 23$.

121. $X_{опт} = (3; 5; 5; 5; 0; 0)$, $Z_{max} = 18$.

122. $X_{опт} = (4; 3)$, $Z_{min} = -10$.

123. $X_{опт} = (3; 5)$, $Z_{max} = 21$.

124. $X_{опт} = (4; 6)$, $Z_{max} = -22$.

125. $X_{опт} = (2; 3; 0)$, $Z_{min} = 11$.

126. $X_{опт} = (20; 0; 40)$, $Z_{min} = 680$ грош. од.

Розділ 6.

128. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 50 & 150 & 100 \\ 200 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$; $Z_{min} = 1\,450$ грош. од.

129. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 20 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $Z_{min} = 140$ грош. од., не єдиний розв'язок.

130. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \\ 30 & 0 & 10 \end{pmatrix}$; $Z_{min} = 430$ грош. од., не єдиний розв'язок.

131. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $Z_{min} = 1370$ грош. од., не єдиний розв'язок.

132. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 100 \\ 30 & 20 & 30 & 0 \end{pmatrix}$; $Z_{min} = 1150$ грош. од.

133. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}$; $Z_{min} = 160$ грош. од.

134 . Якщо вартість c_{21} перевезення з другої філії до міста А більше 2 грош. од., то $X_{опт} = \begin{pmatrix} 200 & 200 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \end{pmatrix}$; $Z_{min} = 1700$ грош. од.

Якщо $c_{21} < 2$ грош. од., то $X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 400 & 0 \\ 200 & 100 & 100 \end{pmatrix}$;

$Z_{min} = 1300 + 200c_{21}$ грош. од.

Якщо $c_{21} = 2$, то є декілька розв'язків, зокрема, $X^1_{опт} = \begin{pmatrix} 200 & 200 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \end{pmatrix}$, $X^2_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 400 & 0 \\ 200 & 100 & 100 \end{pmatrix}$; $Z_{min} = 1700$ грош. од.

135. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 20 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; Z_{min} = 130 грош. од.

136. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \\ 15 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$; Z_{min} = 95 грош. од.

137. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 30 \\ 0 & 15 & 5 & 0 \end{pmatrix}$; Z_{min} = 240 грош. од.

138. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 5 \\ 0 & 30 & 5 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix}$; Z_{min} = 165 грош. од.

141. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 80 & 60 & 10 \\ 0 & 0 & 100 \\ 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}$; Z_{min} = 440 грош. од., не єдиний розв’язок.

142. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 2000 & 0 \\ 0 & 3000 & 0 \\ 4000 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; Z_{min} = 25 грош. од., не єдиний розв’язок.

143. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 60 & 220 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 60 & 30 \end{pmatrix}$; Z_{min} = 1210 грош. од.

144. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 90 & 130 & 0 & 20 \\ 0 & 10 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 110 \end{pmatrix}$; Z_{min} = 2070 грош. од., не єдиний розв’язок.

145. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 \\ 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}$, Z_{min} = 140 грош. од., не єдиний розв’язок.

146. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 40 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}$, Z_{min} = 200 грош. од., не єдиний розв’язок.

147. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 90 & 0 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 & 30 \end{pmatrix}$, $Z_{min} = 470$ грош. од.

148. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 25 \\ 0 & 10 & 25 \end{pmatrix}$, $Z_{min} = 280$ грош. од., розв'язок не єдиний.

149. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 17 & 15 & 0 \\ 28 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & 5 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}$; $Z_{min} = 380$ грош. од.

150. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 25 & 35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 35 \end{pmatrix}$; $Z_{max} = 965$.

151. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$; $Z_{max} = 3020$.

152. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $Z_{max} = 323$ м^3 за 1 годину, розв'язок не єдиний.

153. $X_{опт} = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 5 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 0 & 20 \end{pmatrix}$; $Z_{max} = 525\,000$ ккал, розв'язок не єдиний.

Розділ 7.

155. $X_{опт} = (1; 2)$, $Z_{max} = 1$.

156. $X_{опт} = (4; 5)$, $Z_{max} = 14$.

157. $X_{опт} = (4; 0)$, $Z_{max} = 360$ грош. од.

158. $X_{опт} = (8; 2)$, $Z_{min} = 49$ грош. од./год.

159. $X_{опт} = (0; 2; 4; 2)$, $Z_{max} = 0$.

160. $X_{опт}$ = (3; 1; 1; 0; 0), Z_{min} = 5.

161. $X_{опт}$ = (0; 1; 2; 14), Z_{max} = 42.

162. $X_{опт}$ = (1; 2; 2; 0), Z_{max} = 7.

163. $X_{опт}$ = (0; 0; 11; 3; 1), Z_{max} = 24.

164. $X_{опт}$ = (9; 4; 0; 1; 32), Z_{max} = 35.

165. $X_{опт}$ = (2; 5), Z_{max} = 38 тис. од. продукції за зміну.

166. Декілька розв'язків, один з них $X_{опт}$ = (0; 2; 3), Z_{max} = 13 грош. од.

167. Декілька розв'язків, один з них $X_{опт}$ = (2; 17; 0), Z_{min} = 19 аркушів.

168. Декілька розв'язків, один з них $X_{опт}$ = (0; 30; 6), Z_{min} = 36 аркушів.

Розділ 8.

170. X_{min} = (1; 2), $Z_{min} = -^1/_{10}$; X_{max} = (6; 1), Z_{max} = 1.

171. X_{min} = (4; 0), Z_{min} = –5; X_{max} = (1; 1), $Z_{max} = -^4/_3$.

172. X_{min} = (3; 2), Z_{min} = 2; max на відрізку AB, де A(0; 1), B(0; 4), Z_{max} = 8.

173. X_{min} = (1; 3), $Z_{min} = {}^1/_4$; max на відрізку AB, де A(2; 0), B(5; 0), Z_{max} = 4.

174. X_{min} = (1; 5), $Z_{min} = -^1/_2$; X_{max} = (5; 1), $Z_{max} = {}^3/_2$.

175. X_{min} = (2; 3), $Z_{min} = {}^3/_5$; X_{max} = (4; 1), $Z_{max} = {}^{11}/_5$.

176. X_{min} = (3; 1), Z_{min} = 4; X_{max} = (2; 8), Z_{max} = 6,2.

177. X_{min} = (2; 3), $Z_{min} = {}^{11}/_7$; $X_{max} = ({}^9/_2; 1)$, $Z_{max} = {}^{19}/_{10}$.

178. X_{min} = (1; 2), $Z_{min} = {}^5/_4$; X_{max} = (3; 2), $Z_{max} = {}^5/_2$.

179. X_{min} = (4; 1), $Z_{min} = {}^4/_3$; X_{max} = (1; 2), Z_{max} = 8.

180. X_{min} = (3; 0), $Z_{min} = -^4/_5$; X_{max} = (7; 2), $Z_{max} = {}^6/_{17}$.

181. X_{min} = (0; 0), Z_{min} = –3; X_{max} = (4; 2), $Z_{max} = {}^{11}/_7$.

182. X_{min} = (30; 20), Z_{min} = 7,6 грош. од./метр.

183. X_{min} = (40; 60), Z_{min} = 2,4 грош. од.

184. X_{max} = (160; 40), Z_{max} = 0,24.

185. X_{max} = (80; 10), Z_{max} = 0,29.

187. X_{min} = (0; 0; 8; 9), Z_{min} = –1; X_{max} = (3; 0; 11; 0), $Z_{max} = {}^{20}/_7$.

188. $X_{опт}$ = (0; 3; 5; 0), Z_{max} = 3.

189. $X_{опт}$ = (2; 3; 0; 0), $Z_{max} = {}^4/_9$.

190. $X_{опт}$ = (2; 0; 0; 2), $Z_{max} = {}^4/_3$.

191. $X_{опт}$ = (4; 0; 0; 0; 3), Z_{max} = 4.

192. $X_{min} = (0; 1; 0; 6)$, $Z_{min} = –3$; $X_{max} = (3; 4; 0; 0)$, $Z_{max} = 0$.

Розділ 9.

194. $X_{min} = (1; 2)$, $Z_{min} = 5$; $X_{max} = (1; 5)$, $Z_{max} = 26$.

195. $X_{min} = (1; 1)$, $Z_{min} = 2$; $X_{max} = (3; 6)$, $Z_{max} = 45$.

196. $X_{min} = (2; 1)$, $Z_{min} = 4$; $X_{max} = (6; 1)$, $Z_{max} = 36$.

197. $X_{min} = (2; 1)$, $Z_{min} = 1$; $X_{max} = (1; 5)$, $Z_{max} = 26$.

198. $X_{min} = (2; 2)$, $Z_{min} = 1$; $X_{max} = (1; 2)$, $Z_{max} = 4$.

199. $X_{min} = (2; 5)$, $Z_{min} = 1$; $X_{max} = (4; 2)$, $Z_{max} = 20$.

200. $X_{min} = (2; 3)$, $Z_{min} = 0$; $X_{max} = (9; 0)$, $Z_{max} = 58$.

201. $X_{min} = (1; 2)$, $Z_{min} = 0$; $X_{max} = (4; 3)$, $Z_{max} = 10$.

202. $X_{min} = (2; 3)$, $Z_{min} = 0$; $X^{(1)}_{max} = (1; 5)$, $X^{(2)}_{max} = (4; 2)$, $Z_{max} = 5$.

203. $X_{min} = (4; 2)$, $Z_{min} = 4$; $X^{(1)}_{max} = (1; 5)$, $X^{(2)}_{max} = (7; 5)$, $Z_{max} = 34$.

204. $X_{min} = (4; 4)$, $Z_{min} = 2$; $X_{max} = (2; 1)$, $Z_{max} = 25$.

205. $X_{min} = (1; 1)$, $Z_{min} = 2$; $X_{max} = (6; 0)$, $Z_{max} = 36$.

206. $X_{min} = (0; 2)$, $Z_{min} = 4$; $X_{max} = (2; 6)$, $Z_{max} = 40$.

207. $X^{(1)}_{min} = (1; 4)$, $X^{(2)}_{min} = (4; 1)$, $Z_{min} = 17$; $X_{max} = (8; 0{,}5)$, $Z_{max} = 64{,}25$.

208. $X_{min} = (0; 0)$, $Z_{min} = 0$; $X_{max} = (4; 2)$, $Z_{max} = 10$.

209. $X_{опт} = (1; 2)$, $Z_{min} = 2$.

210. а) $X_{опт} = (30; 30)$, $Z_{max} = 2\,900$ грош. од.;
б) $X_{опт} = (40; 10)$, $Z_{max} = 1\,700$ грош. од.;
в) $X_{опт} = (12; 36)$, $Z_{max} = 3\,840$ грош. од.;

211. а) $X_{опт} = (60; 40)$, $Z_{max} = 11\,600$ грош. од.;
б) $X_{опт} = (20; 50)$, $Z_{max} = 4\,900$ грош. од.;
в) $X_{опт} = (40; 20)$, $Z_{max} = 2\,000$ грош. од.;
г) $X_{опт} = (50; 20)$, $Z_{max} = 3\,500$ грош. од.;
д) $X_{опт} = (10; 50)$, $Z_{max} = 2\,100$ грош. од.

212. $X_{опт} = (16; 32)$, $Z_{max} = 128$ грош. од.

213. $X_{опт} = (6; 3)$, $Z_{max} = 60$.

215. $X_{опт} = (2; 1)$, $Z_{min} = –2$.

216. $X_{опт} = (2; 4)$, $Z_{min} = –8$.

217. $X_{опт} = (1; 1)$, $Z_{max} = 1$.

218. $X_{опт} = (0; 1)$, $Z_{max} = 1$.

219. $X_{опт} = (-1; -1; 3)$, $Z_{min} = -12$.

220. $X_{опт} = (1; 4; -1)$, $Z_{min} = -9$.

221. $X_{опт} = (4; 1; 2)$, $Z_{max} = 10$.

222. $X_{опт} = (2; 4; 8)$, $Z_{max} = 40$.

223. $X_{опт} = (0; 0; 0)$, $Z_{min} = 3$.

225. $X_{опт} = (1; 1)$, $Z_{min} = 1$.

226. $X_{опт} = (3; 4)$, $Z_{min} = 2$.

227. $X_{опт} = (1; 1)$, $Z_{min} = 3e$.

228. $X_{опт} = (2; 2)$, $Z_{min} = 12$.

229. $X_{опт} = (2; 2; 2)$, $Z_{min} = 12$.

230. $X_{опт} = (1; 1; 1)$, $Z_{min} = 3e$.

231. $X_{опт} = (1; 2; 1)$, $Z_{min} = 5$.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Серія «МАТЕМАТИКА ДЛЯЕКОНОМІСТІВ»

МИХАЙЛЕНКО Світлана Василівна
СВІЩОВА Євгенія Віталіївна

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МЕТОДІ ТА МОДЕЛІ

Навчальний посібник

для самостійного вивчення дисципліні

В авторській редакції
Комп'ютерний набір і верстка *Є. В. Свіщова*

Підписано до друку . .2024. Формат 60 ×84/16.
Папір офсетний. Гарнітура "Таймс".
умов. друк. арк. 10,69. Обл.-вид. арк. 12,82.
Тираж 50 пр. Зам №

План 2023/2024 навч. р., поз. № 1 у переліку робіт кафедри

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво №1153 від 16.12.2002.

Надруковано у видавництві Народної української академії

Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Лермонтовська, 27