НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

Серія «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ ТА СОЦІОЛОГІВ»

С. В. Михайленко, Є. В. Свіщова, А. А. Янцевич

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Видавництво НУА

НАРОДНА УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ

С. В. Михайленко, Є. В. Свіщова, А. А. Янцевич

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник
для самостійного вивчення дисципліни

Видання друге, виправлене та доповнене

Харків
Видавництво НУА
2022

УДК 519.22/.25(075.8)
М69

Затверджено на засіданні
кафедри інформаційних технологій та математики
Протокол № 2 від 05.09.2022

Рецензент канд. фіз.-мат. наук *О. Г. Ніколаєва*
(ХНУ ім. В. Н. Каразіна)

Посібник містить задачі з курсу теорії ймовірностей та математичної статистики і охоплює розділи: основні теореми теорії ймовірностей, дискретні та неперервні випадкові величини, закони розподілу, варіаційні ряди, побудова закону розподілу за вибіркою, кореляція та регресія. З кожної теми наводяться необхідні теоретичні відомості та докладні розв'язання типових задач.

Михайленко, Світлана Василівна.
М69 Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посібник для самостійного вивчення дисципліни / С. В. Михайленко, Є. В. Свіщова, А. А. Янцевич; Нар. укр. акад. [каф. інформ. технологій та математики]. – 2-е вид., випр. – Харків : Вид-во НУА, 2022. – 180 с.

УДК 519.22/.25(075.8)

ВСТУП

Перехід до ринкових відносин призвів до необхідності підготовки економістів, які володіють відповідним математичним апаратом економічних і соціологічних досліджень та вміють застосовувати його на практиці.

Коли ми говоримо про застосування математики в економіці, то маємо на увазі не просто проведення різноманітних економічних розрахунків, а використання математики для вивчення економічних закономірностей, отримання нових теоретичних висновків, знаходження найкращих соціально-економічних рішень. Економіко-математичні методи, що базуються на сучасних досягненнях в галузі економічної теорії, математики та інформаційних технологій, збагачують економічну науку та сприяють її переходу на новий, більш високий рівень. Це не тільки задовольняє безпосередні запити практики, а й дає новий плідний підхід до вирішення різноманітних теоретичних проблем у економічній науці.

У вивчаючих математику майбутніх економістів найбільші труднощі викликає розв’язання задач. В математичній літературі недостатньо посібників для практичних занять з цього курсу, які б систематично і досить докладно знайомили студентів з методами розв’язання і допомогли б їм набути необхідних навичок.

Мета цього посібника – заповнити певною мірою цю прогалину, допомогти студентам навчитися самостійно розв’язувати основні типи задач з теорії ймовірностей та математичної статистики.

Весь матеріал посібника розділений на окремі параграфи. На початку кожного параграфа вміщено означення, теореми, формули та інші короткі відомості з теорії ймовірностей та математичної статистики, необхідні для розв’язання наступних задач. Потім наводяться докладні розв’язання типових задач з короткими поясненнями теоретичних положень. Наприкінці кожного параграфа міститься достатня кількість задач для самостійного розв’язання.

Така побудова навчального посібника дозволяє використовувати його як для роботи під керівництвом викладача, так і для самостійного вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики.

Студенти отримають велику користь, якщо будуть активно працювати над посібником. Це означає, що перш ніж приступити до розв’язання задач, варто ґрунтовно вивчити теоретичний матеріал, що відноситься до відповідного параграфу. Потім треба уважно, детально, з виконанням всіх дій на папері, розібрати розв’язані задачі і обов’язково закріпити знання розв’язанням задач, призначених для самостійної роботи. Ще краще, якщо студенти, засвоївши теорію, одразу приступають до самостійного розв’язання задач, звертаючись до розв’язків в тексті лише у разі ускладнень.

Для роботи з посібником достатньо володіти нескладною математикою в рамках шкільного курсу. І лише для роботи з деякими темами потрібно володіти математикою на більш високому рівні. Так, наприклад, для вивчення теми «Неперервна випадкова величина» необхідні знання з математичного аналізу, зокрема, вміння диференціювати, інтегрувати функції, знаходити їх границі. Для вивчення регресійного аналізу та теми «Геометричні ймовірності» потрібні знання з лінійної алгебри та аналітичної геометрії, зокрема, вміння розв'язувати системи лінійних рівнянь, графічно розв'язувати системи лінійних нерівностей тощо.

Враховуючи, що навчальний посібник призначений для студентів-економістів, у ньому розглядається значна кількість задач з економічним підґрунтям, які допоможуть набути навичок застосування математичного аналізу прикладних задач в економіці та соціології.

Посібник написаний в повній відповідності з програмою дисципліни «Теорія ймовірностей та математична статистика». Він розрахований як на студентів очної форми навчання, так і на студентів-заочників.

Таким чином, даний навчальний посібник може бути використаний як довідник, розв'язник і в той же час як задачник, що дуже зручно для студентів та надає їм широкі можливості для активної самостійної роботи.

Теорія ймовірностей є, власне кажучи, тільки перекладення здорового глузду на формули, вона дає засіб для точної оцінки того, що осягає розум вірний, хоча часто несвідомо.

П'єр Лаплас
(З книги «Аналітична теорія ймовірностей»)

1. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. Елементи комбінаторики

Комбінаторика – розділ математики, в якому вивчаються питання про те, скільки різних комбінацій, підпорядкованих тим чи іншим умовам, можна скласти із заданих об'єктів. Іншими словами, це розділ математики, в якому вивчаються завдання вибору елементів із заданої скінченої множини і розташування цих елементів в будь-якому порядку.

Перестановками з n елементів називаються всілякі сукупності з n елементів, що відрізняються одна від одної тільки порядком розташування елементів.

Число всіх різних перестановок з n різних елементів позначається P_n і обчислюється за формулою:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$$

Розміщеннями з n елементів по m називаються всілякі сукупності m елементів з цих n, що відрізняються одна від одної або самими елементами, або порядком розташування елементів.

Число всіх різних розміщень з *n* елементів по *m* позначається A_n^m та обчислюється за формулою:

$$A_n^m = \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}_{m \text{ множників}} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Сполученнями з *n* елементів по *m* називаються всілякі сукупності *m* елементів з цих *n*, що відрізняються одна від одної хоча б одним елементом.

Число всіх сполучень з *n* різних елементів по *m* позначається C_n^m і обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}.$$

З формули для обчислення C_n^m випливають властивості:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$; 2) $C_n^0 = C_n^n = 1$; 3) $C_n^{k+1} = \frac{n-k}{k+1}C_n^k$.

Цілі числа C_n^m ще називаються біноміальними коефіцієнтами, тому що вираз $(a+b)^n$, який називається біномом Ньютона, можна подати у вигляді розкладання:

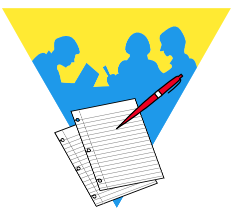
$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^n b^n = \\ = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m}b^m.$$

$(m + 1)$-й доданок в цьому розкладі має вигляд $C_n^m a^{n-m}b^m$ і називається загальним (*m*-м) членом розкладання.

Якщо в розкладі бінома Ньютона покласти $a = b = 1$, то отримаємо формулу:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^m + \ldots + C_n^n = 2^n,$$

яка застосовується в теорії ймовірностей.



ПРИКЛАДИ

1. Студентам групи необхідно скласти в сесію іспити з 5 дисциплін. Скількома способами може бути складено розклад іспитів, якщо враховувати тільки послідовність їх складання?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо через А, В, С, Д і Е дисципліни, за якими необхідно скласти іспити. Припустимо, що першим буде іспит за дисципліною В, другим – Д, третім – Е, четвертим – А і п'ятим – С. Тоді розклад іспитів буде мати вигляд ВДЕАС. Аналогічно, за іншої послідовності складання іспитів отримуємо сукупність тих же п'яти букв, але з іншим порядком їх розташування. Отже, кожному варіанту розкладу іспитів відповідає деяка перестановка з п'яти елементів: А, В, С, Д і Е. Загальне число цих перестановок, а отже, і кількість способів складання розкладу іспитів дорівнює:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

2. Студенти вивчають 8 предметів. Щодня у них по 3 пари занять. Скількома способами може бути складено розклад занять на 1 день?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо через A, B, C, D, E, F, G, H предмети, які вивчають студенти. Якщо на першій парі буде заняття з предмета D, на другій – з B, на третій – з F, то розклад занять набуде вигляду DBF. При іншому виборі предметів отримаємо іншу сукупність трьох букв з даних восьми. При цьому важливий порядок розташування букв. Наприклад, розклад BFD означає, що на першій парі заняття буде по предмету B, на другій – по предмету F, на третій – по предмету D. Це, очевидно, відрізняється від розкладу DBF. Отже, кожному розкладу занять відповідає деяке розміщення з 8 елементів по 3. Загальна кількість таких розміщень:

$$A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 .$$

3. Із 6 спецкурсів студент зобов'язаний скласти іспити з 3 спецкурсів, які він вибирає на свій розсуд. Скільки різних виборів має студент?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай A, B, C, D, E, F – спецкурси, які може складати студент. Якщо він обрав для складання спецкурси A, C і E, то його вибір можна записати ACE. Причому порядок розташування букв неістотний. Справді, EAC, CAE, AEC і т. п. означають вибір студентом тих же спецкурсів A, C і E. Отже, кожному вибору студента відповідає сполучення з 6 елементів по 3. Їх загальна кількість:

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 .$$

4. Скільки шестизначних чисел, кратних 5, можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 за умови, що в числі немає однакових цифр?

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Число, кратне 5, повинно закінчуватись або цифрою 0, або цифрою 5. Якщо останньою цифрою числа служить 0, то інші 5 цифр можна розташовувати в будь-якому порядку. Таким чином, шестизначних чисел, що закінчуються цифрою 0, є стільки, скільки можна зробити перестановок з 5 елементів 1, 2, 3, 4, 5, тобто P_5. Якщо останньою цифрою числа є 5, то решту п’ять цифр знову можна розташувати P_5 способами, але з цих способів недійсними є ті, при яких на першому місці виявиться цифра 0 (число не може починатися з цифри 0). Тому з P_5 перестановок потрібно відняти ті, які починаються цифрою 0. Таких перестановок стільки, скількома способами можна розташувати цифри 1, 2, 3, 4 на другому, третьому, четвертому та п’ятому місцях шестизначного числа, тобто P_4. Отже, кількість чисел, кратних 5 і тих, що закінчуються цифрою 5, дорівнює $P_5 - P_4$. Остаточно отримуємо, що всього маємо P5 + (P5 – P4) шестизначних чисел, що складаються з різних цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 і кратних п’яти. Зробимо обчислення:

$$P_5 + (P_5 - P_4) = 2P_5 - P_4 = 2(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 216.$$

5. У речовій лотереї розігрується 8 предметів. Перший підійшов до урни, виймає з неї 5 квитків. Якою кількістю способів він може їх вийняти, щоб: 1) рівно 2 з них виявилися виграшними; 2) хоча б 3 з них виявилися виграшними. Усього в урні 50 квитків.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

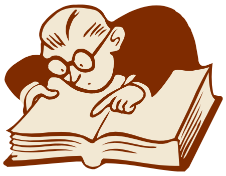
1) Якщо серед вийнятих 5 квитків повинно бути рівно 2 виграшних, то інші три мають бути невиграшні. Із 8 виграшних квитків можна вибрати два C_8^2 способами, а три невиграшних квитка можна вибрати з: 50 – 8 = 42 квитків – C_{42}^3 способами. Кожен спосіб вибору 2 виграшних квитків може поєднуватися з будь-яким із способів вибору 3 невиграшних. Тому загальна кількість способів дорівнює:

$$C_8^2 \cdot C_{42}^3 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \frac{42 \cdot 41 \cdot 40}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 321440\,.$$

2) Число способів вибору 5 квитків, з яких хоча б 3 будуть виграшними, дорівнює сумі кількості способів, за яких виймаються рівно 3 виграшних, рівно 4 виграшних і рівно 5 виграшних квитків. Отже, це число дорівнює:

$$C_8^3 \cdot C_{42}^2 + C_8^4 \cdot C_{42}^1 + C_8^5 \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{42 \cdot 41}{1 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{42}{1} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} =$$

$$= 48216 + 2940 + 56 = 51212.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

6. Скількома способами можна розставити 6 книг на книжковій полиці?

7. Зі складу конференції, на якій присутні 52 людини, треба обрати делегацію, що складається з 5 осіб. Скількома способами це можна зробити?

8. Скількома способами можна вибрати 4 людини на 4 різні посади з 9 кандидатів на ці посади?

9. Скількома способами можна вибрати 3 різні фарби з 5?

10. Скількома способами можна скласти трикольоровий смугастий прапор, якщо є матеріал 5 різних кольорів?

11. Зі спортивного клубу, який налічує 30 осіб, треба зібрати команду з 4 чоловік для участі в бігу на 1000 м. Скількома способами можна це зробити? А скількома способами можна скласти команду з 4 осіб для участі в естафеті на 1000 м: 100 + 200 + 300 + 400 м?

12. Є 6 предметів. Вони розподіляються на дві групи так, що в одній виявляються 2, а в іншій 4 предмети. Скільки таких розподілів можливо?

13. Скільки чисел, що починаються з цифри 5, можна отримати, переставляючи всілякими способами цифри числа 19058?

14. Скільки різних чотиризначних чисел можна записати за допомогою цифр 2, 3, 5, 0, якщо кожна з цих цифр до запису числа може входити лише один раз?

15. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складені різні п’ятизначні числа, що не містять однакових цифр. Скільки серед цих чисел таких, що:

1) починаються цифрою 3?
2) не починаються цифрою 5?
3) починаються з числа 54?
4) не починаються з числа 54?
5) є парними?
6) діляться на 4?

16. У англійців прийнято давати дітям кілька імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо загальна кількість імен дорівнює 300, а їй дають не більше 3 імен?

17. Із групи студентів, що складається з 20 осіб, необхідно виділити на недільник хоча б 15 чоловік. Скількома способами це можна зробити?

18. Один чоловік має 7 книг з математики, другий – 9. Скількома способами вони можуть обміняти:

1) книгу одного на книгу іншого?
2) 2 книги одного на 2 книги іншого?

19. Скількома способами можна вибрати зі слова «квітка»:

1) пару букв (голосну і приголосну)?
2) трійку букв (голосну і 2 приголосні)?

20. Скільки можна написати чотиризначних чисел, використовуючи цифри від 1 до 9, якщо кожна з цих цифр у записі числа може зустрічатися:

1) один раз?
2) не один раз?

21. Розв'язати задачу 20 за умови, що можна користуватися всіма цифрами від 0 до 9.

22. У скриньці 10 чорних і 6 білих кульок. Скількома способами можна дістати:

1) 7 куль?
2) 8 чорних куль?
3) 3 білих кулі?
4) 5 чорних та 2 білих кулі?

23. Із 12 слів чоловічого роду, 9 жіночого та 10 середнього треба вибрати:

1) по одному слову;
2) по два слова кожного роду.

Скількома способами може бути зроблений вибір?

24. У колоді 36 карт. Скількома способами можна отримати:

1) 6 карт?
2) 6 карт, з яких 2 тузи?
3) 6 карт, з яких 1 карта пікової масті, 2 – трефової і 3 – бубнової?
4) 6 карт, з яких 2 тузи, 2 королі і 2 дами?
5) 6 карт, серед яких не менше 3 тузів?

25. Якою кількістю способів можна розділити колоду з 36 карт навпіл так, щоб в першій і другій пачці було по 2 тузи?

26. Знайти: $\frac{P_8 - P_7}{7P_7}$, $\frac{P_{2m+1}}{P_{2m-1}}$, $\frac{(n+3)!}{n!}$.

27. Який степінь x містить сьомий член розкладу бінома $\left(x^2 - \frac{2}{x^4}\right)^{12}$?

28. Коефіцієнт другого члена розкладання $\left(x-\frac{1}{3}\right)^n$ дорівнює 5. Знайти середній член розкладу.

29. У розкладі $\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt[10]{\frac{a^7}{b^3}}\right)^n$ є член, який містить ab. Знайти цей член.

30. У розкладі $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$ знайти член, котрий містить x^3.

31. У розкладі $\left(x^2+\frac{2}{x^3}\right)^{15}$ знайти член, який не містить x.

32. Знайти другий доданок розкладання бінома $\left(\sqrt[13]{a}+\frac{a}{\sqrt{a^{-1}}}\right)^m$, якщо

$$\frac{C_m^3}{C_m^2}=4.$$

1.2. Випадкові події. Класифікація подій. Сума і добуток подій

Подія називається **випадковою**, якщо в даному випробуванні вона може відбутися або не відбутися.

Позначають події великими літерами латинського алфавіту – *A, B, C* і т. п.

Подія називається **достовірною**, якщо в даному випробуванні вона неодмінно відбудеться. Достовірну подію будемо позначати U.

Подія називається **неможливою**, якщо в даному випробуванні вона не може відбутися. Неможливу подію будемо позначати $\varnothing$.

Дві події називаються **несумісними**, якщо поява однієї з них виключає появу іншої в одному і тому ж випробуванні. В противному випадку події **сумісні**.

Сумою двох випадкових подій *A* і *B* називається подія $C=A+B$, що полягає в появі хоча б однієї з подій - доданків.

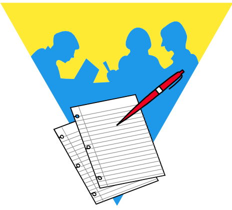
Добутком двох подій *A* і *B* називається подія $C=A\cdot B$, що полягає в одночасній появі події A і події B.

Аналогічно визначається сума та добуток будь-якого скінченного числа подій.

Дві події A і $\overline{A}$ називаються **протилежними**, якщо для них одночасно виконуються два співвідношення: $A + \overline{A} = U$; $A \cdot \overline{A} = \varnothing$. Подія $\overline{A}$ полягає в непояві події A.

Події A_1, A_2, ..., A_n утворюють **повну групу**, якщо їх сума – достовірна подія і будь-які дві події A_i и A_j є несумісними подіями, тобто:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U, \; A_i \cdot A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j.$$



ПРИКЛАДИ

33. Гральний кубик підкидають один раз. Розглядаються наступні події:

A – число очок кратне 3;
B – число очок парне;
C – число очок непарне;
D – число очок менше 7;
E – число очок більше 2, але менше 3.
Які події є випадковими, достовірними, неможливими?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Події A, B і C в результаті випробування можуть відбутися або не відбутися. Отже, A, B і C – випадкові події. Подія D в результаті випробування завжди відбувається, отже, D – достовірна подія. Подія E не може відбутися, отже, E – неможлива подія.

34. Гральний кубик підкидають один раз. Розглядаються наступні події:

A – число очок кратне 3;
B – число очок парне;
C – число очок непарне.
Які пари подій A і B, A і C, B і C є сумісними або несумісними?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Поява події A не виключає появи події B (число очок дорівнює 6), отже, A і B – сумісні події.

Поява події A не виключає появи події C (число очок дорівнює 3), отже, A і C – сумісні події.

Поява події B виключає появу події C, отже, B і C – несумісні події.

35. Гральний кубик підкидають один раз. Розглядаються наступні події:

A – число очок кратне 3;

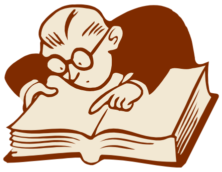
B – число очок парне;
C – число очок непарне.
З'ясувати зміст наступних подій: $\overline{B}$, $A + B$, $A \cdot C$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Подія $\overline{B}$ полягає в непояві події B, тобто число очок не є парним. Отже, $\overline{B} = C$.

Подія $A+B$ полягає в появі хоча б однієї з подій A або B, тобто кількість очок або кратне 3, або парне. Отже, подія $A+B$ – число очок дорівнює 2, 3, 4 або 6.

Подія $A \cdot C$ полягає в одночасній появі подій A і C, тобто число очок кратне 3 і в той же час непарне. Отже, подія $A \cdot C$ – число очок дорівнює 3.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

36. Гральна кістка кидається двічі. Розглядаються події:
A – сума очок не менше 2;
B – сума очок непарна;
C – сума очок дорівнює 13;
D – сума очок дорівнює 7.
Які з перелічених подій є випадковими, достовірними, неможливими?

37. Монета підкидається три рази.
A – герб випав більше 1 разу;
B – цифра випала 4 рази;
C – випало більше гербів, ніж цифр;
D – герб випав менше 5 разів.
Які з перелічених подій є випадковими, достовірними, неможливими?

38. Відбуваються два постріли по мішені. Розглядаються події:
A – жодного влучення;
B – хоча б одне влучення;
C – хоча б один промах.
Чи є несумісними пари подій A і B, A і C, B і C?

39. З колоди карт виймаються дві карти. Розглядаються події:
A – обидві карти чорної масті;
B – обидві карти тузи;
C – хоча б одна з карт дама.
Чи є перелічені події попарно сумісними?

40. Назвати протилежні для наступних подій:

A – випадання 2 гербів при киданні 2 монет;

B – поява білої кулі при вийманні однієї кулі з урни, де знаходяться білі, чорні та червоні кулі;

C – 3 попадання при 3 пострілах;

D – хоча б одне влучення при 5 пострілах;

E – не більше 2 влучень при 5 пострілах;

F – виграш першого гравця при грі в шахи.

41. В ящику знаходяться кулі з номерами від 1 до 15. Навмання виймається один шар. Розглядаються події:

A – номер кулі парний;

B – номер кулі двозначний;

C – номер кулі менше 12.

Описати події: AB, BC, $B + C$, $A\overline{C}$, $\overline{A}B$, ABC, $\overline{B}A + B\overline{C}$.

42. Підкидають два гральних кубика. Розглядаються події:

A – кількість очок на першому кубику парне;

B – кількість очок на обох кубиках однакове;

C – на другому кубику випало 6 очок.

Описати події $B + C$, AC, $\overline{A}B$, $BC + \overline{A}C$, $AB\overline{C}$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що більше: A_7^3 чи C_7^3 і чому?

2. Що з переліченого не має смислу: A_{10}^3, C_7^4, P_5, A_3^4, C_6^0, C_4^6?

3. Розв'язати рівняння $\dfrac{P_n}{(n-2)!} = 6$.

4. Наведіть приклади сумісних та несумісних подій.

5. Наведіть приклад повної групи несумісних подій.

6. Чи є протилежні події несумісними?

7. Чи можна казати, що несумісні події протилежні?

8. Подія B є окремим випадком події A, тобто з появи події B з достовірністю випливає поява події A. Знайти:

а) $A + B$; б) $A \cdot B$.

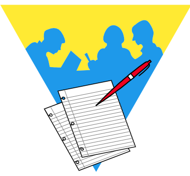
1.3. *Безпосереднє обчислення ймовірностей подій*

Якщо події попарно несумісні, рівноможливі та їх сума є достовірною подією, то вони називаються елементарними наслідками випробування або **елементарними подіями**.

Нехай m – кількість елементарних подій, в результаті яких з'явиться подія A, що нас цікавить. Ці елементарні події будемо називати сприятливими для появи події A. І нехай n – число всіх елементарних подій.

Ймовірністю появи події A називається число, яке дорівнює відношенню кількості елементарних подій, сприятливих для появи події A, до загальної кількості елементарних подій, тобто:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{m}{n}.$$



ПРИКЛАДИ

43. Знайти ймовірність того, що при киданні грального кубика випаде непарне число очок.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо через A подію – випадання непарного числа очок. Число всіх елементарних подій n = 6. Число елементарних подій, що сприяють появі події A, m = 3 (випадання 1, 3 і 5 очок). Тому:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

44. Набираючи номер телефону, абонент забув останні дві цифри і, пам'ятаючи лише те, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані потрібні цифри.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо через B подію – набрані 2 потрібні цифри. Усього можна набрати стільки пар різних цифр, скільки може бути складено розміщень з 10 цифр по 2, тобто: $A_{10}^{2}=10\cdot 9=90$. Таким чином, загальна кількість можливих елементарних подій n=90. Події B сприяє лише одна з них. Отже,

$$\mathrm{P}(B)=\frac{m}{n}=\frac{1}{90}.$$

Відповідь: $\frac{1}{90}$.

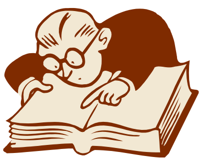
45. У партії з 10 деталей є 7 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед шести взятих навмання деталей рівно 4 стандартні.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Загальна кількість елементарних подій дорівнює кількості способів, котрими можна витягти 6 деталей з 10, тобто: $n = C_{10}^6 = C_{10}^4 = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$. Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприяють події A, що нас цікавить – серед шести взятих деталей рівно 4 стандартні. Чотири стандартні деталі можна взяти з 7 стандартних C_7^4 способами; взяти останні 6 – 4 = 2 нестандартні деталі з 10 – 7 = 3 нестандартних деталей можна C_3^2 способами.

Отже, $m = C_7^4 \cdot C_3^2 = \dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\dfrac{3\cdot 2}{1\cdot 2} = 105$. Тому: $\mathrm{P}(A) = \dfrac{105}{210} = \dfrac{1}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

46. У ящику є 50 однакових деталей, з яких 5 пофарбовані. Навмання виймається одна деталь. Знайти ймовірність того, що витягнута деталь виявиться пофарбованою.

47. Гральний кубик кидається 1 раз. Яка ймовірність того, що:

1) випаде шість очок?
2) випаде непарне число очок?
3) випаде число очок більше 4?

48. Монету кинули 2 рази. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз випаде герб.

49. З ретельно перемішаного повного набору 28 кісток доміно навмання витягли кістку. Знайти ймовірність того, що сума очок на ній буде дорівнювати:

1) чотирьом;
2) шести;
3) дванадцяти;
4) тринадцяти.

50. Обчислити ймовірність того, що задумане в межах 100 ціле число:

1) ділиться на 10 або 11;

2) не містить цифри 5.

51. Абонент забув останні дві цифри номера, але пам'ятає, що вони різні і утворюють двозначне число менше 30. З урахуванням цього він набирає замість них навмання 2 цифри. Визначити ймовірність того, що він набере потрібні цифри.

52. Що ймовірніше при киданні двох кубиків: випадання 10 або 9 очок?

53. Визначити ймовірність того, що у взятому навмання двозначному числі обидві цифри виявляться однаковими.

54. Куб, всі грані якого пофарбовані, розпиляний на тисячу кубиків однакового розміру, які потім ретельно перемішані. Знайти ймовірність того, що навмання витягнутий кубик буде мати забарвлених граней:

1) одну; 2) дві; 3) три.

55. Є 5 букв: Р, Е, Г, Й, О. Яка ймовірність того, що:

1) довільне розташування їх одна за одною утворить слово «ГЕРОЙ»?

2) довільне розташування одна за одною трьох навмання взятих букв утворить слово «РОЙ»?

56. У коробці 6 занумерованих кубиків. Навмання по одному витягають усі кубики. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих кубиків з'являться у зростаючому порядку.

57. Чотиритомний твір розташований на полиці у випадковому порядку. Знайти ймовірність того, що томи стоять у правильному порядку справа наліво або зліва направо.

58. В ліфт дев'ятиповерхового будинку на першому поверсі зайшли 3 людини. Кожен з них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірність того, що:

1) всі пасажири вийдуть на п'ятому поверсі;

2) всі пасажири вийдуть одночасно (на одному поверсі);

3) всі пасажири вийдуть на різних поверхах.

59. В ящику є 15 деталей, серед яких 10 пофарбованих. Збирач навмання витягує 3 деталі. Знайти ймовірність того, що:

1) витягнуті деталі виявляться пофарбованими;

2) витягнуті деталі виявляться непофарбованими;

3) серед витягнутих деталей - одна пофарбована.

60. Магазин отримує товар партіями по 100 штук. Якщо 5 взятих навмання зразків відповідають стандартам, партія надходить на реалізацію. У черговій партії 8 зразків товару з дефектом. Знайти ймовірність того, що товар надійде на реалізацію.

61. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 людей припадають на різні місяці року.

62. У ящику 100 деталей, з них 10 бракованих. Навмання витягнуті 4 деталі. Знайти ймовірність того, що серед витягнутих деталей:

1) немає бракованих;
2) немає придатних;
3) 2 браковані;
4) більше 2 бракованих;
5) не більше 2 бракованих.

63. Числа 1, 2, 3, 4, 5 написані на п’яти картках. Навмання послідовно вибираються три картки і ставляться зліва направо. Знайти ймовірність того, що отримане при цьому тризначне число буде парним.

64. Телефонний номер складається з п’яти цифр. Знайти ймовірність того, що всі цифри різні.

65. В урні 5 чорних і 7 білих куль. З урни виймаються 6 куль. Яка ймовірність того, що серед куль:

1) немає білих;
2) 3 білих;
3) менше 2 білих;
4) не менше 5 білих.

66. З колоди карт (36 карт) навмання витягується 4 карти. Знайти ймовірність того, що серед цих карт:

1) дама, король і 2 тузи;
2) всі однієї масті;
3) 3 дами;
4) немає королів;
5) 1 чорної масті;
6) не більше 2 червоної масті.

67. На екзамені може бути запропоновано 30 питань. Студент знає відповіді на 25. Екзаменатор задає студентові 3 питання, а для того, щоб скласти іспит, треба відповісти не менше, ніж на 2 питання. Яка ймовірність того, що студент складе іспит?

68. Експерт з управління цінними паперами розглядає 20 об’єктів для інвестування, серед яких 9 будівельних організацій, 5 туристичних фірм, 6 транспортних компаній. Тільки 10 з них будуть обрані. Яка ймовірність того, що серед обраних опиняться:

1) всі туристичні фірми;
2) 3 будівельні організації;
3) не більше 2 туристичних фірм.

69. Компанія випускає кредитні картки, які мають перед 4 цифрами дві букви латинського алфавіту. Отримується 1 кредитна картка. Знайти ймовірність того, що:

1) літери на кредитній картці будуть різні;
2) всі цифри непарні;
3) букви однакові, а серед цифр немає збіжних.

70. Дитина грає з 10 буквами абетки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Знайти ймовірність того, що він випадково складе слово МАТЕМАТИКА.

71. Рада директорів компанії складається з 2 бухгалтерів, 8 менеджерів і 6 інженерів. Планується створити комітет з 5 його членів. Яка ймовірність того, що в комітеті опиняться:

1) усі інженери;
2) 2 бухгалтери;
3) 2 менеджери і 1 інженер;
4) більш 3 менеджерів.

72. Кожну п’ятницю броньований автомобіль доставляє заробітну платню з місцевого відділення банку в 5 фірм. Як запобіжний засіб намагаються використовувати різні маршрути. Водій обирає 1 із запропонованого диспетчером варіантів. Яка ймовірність того, що:

1) теперішній маршрут не повторить попередній;
2) маршрут не повториться жодного разу протягом місяця;
3) фірми A і B будуть обслужені одна за одною протягом однієї п’ятниці.

73. У залі для глядачів кінотеатру 9 рядів, пронумерованих підряд числами від 1 до 9, а в кожному ряду по 9 крісел, також пронумерованих числами від 1 до 9. Глядач навмання займає місце. Що ймовірніше: сума номерів ряду і місця в ряду виявиться парною або непарною?

74. Кожен з двох ваших друзів живе в одному з 50 будинків з номерами від 1 до 50. У кожному з цих будинків 100 квартир з номерами від 1 до 100. Де живе кожен з ваших приятелів, ви точно не знаєте. Вам відомо лише, що:

а) номер квартири першого закінчується на 3;

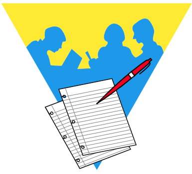
б) номер будинку другого ділиться на 5, а номер його квартири – на 2. У якому випадку ймовірність потрапити в потрібну вам квартиру з першого разу найбільша?

75. Дмитро і Тетяна домовились зустрічати Новий рік у компанії з 10 чоловік. Вони дуже бажали сидіти за святковим столом поруч. Яка ймовірність виконання їх бажання, якщо серед їхніх друзів прийнято розподіляти місця шляхом жеребкування?

1.4. Геометричні ймовірності

Геометричне визначення ймовірності зручно використовувати тоді, коли в результаті випробування можлива поява будь-якого з нескінченного числа наслідків. Множина наслідків випробування інтерпретується деякою множиною точок, причому ймовірність попадання випадкової точки в будь-яку частину області пропорційна мірі цієї частини області (довжині, площі, об’єму) і не залежить від її розташування і форми. Нехай всім можливим наслідкам випробування відповідають точки області *G*, а події А, що розглядається – точки області *g*, яка є частиною області *G*. Тоді:

$$\mathrm{P}(A) = \frac{mesg}{mesG},$$ де *mesS* – це довжина, площа або об’єм області *S*.



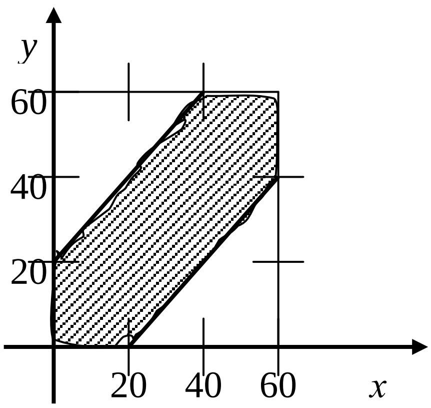
ПРИКЛАД

76. Задача про зустріч.

Двоє домовились про зустріч між 12.00 і 13.00 год, причому кожен чекає іншого 20 хв, після чого йде. Визначити ймовірність зустрічі, якщо кожний із двох приходить у випадковий момент часу цього інтервалу.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

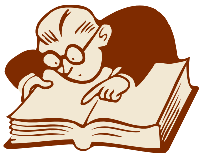
Позначимо момент приходу однієї особи через x, а другої через y. Будемо розглядати x і y як декартові координати точки на площині. Тоді можливі наслідки – це точки квадрата, оскільки $0 \le x \le 60$ хв, $0 \le y \le 60$хв. Щоб зустріч відбулася, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова: $|x - y| \le 20 \;\Rightarrow -20 \le x - y \le 20 \Rightarrow x - 20 \le y \le x + 20$. Наслідки, сприятливі для зустрічі, розташовуються в заштрихованій області.



Шукана ймовірність дорівнює відношенню площі заштрихованої області до площі всього квадрата, тобто:

$$\mathrm{P} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

Відповідь: $\frac{5}{9}$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

77. У точці C, положення якої на телефонній лінії AB довжини L рівноможливе, стався розрив. Визначити ймовірність того, що точка C віддалена від точки A на відстань, не менше l.

78. На площині проведено паралельні прямі, відстані між якими дорівнюють почергово 1,5 і 8 см. Визначити ймовірність того, що навмання кинуте на цю площину коло радіуса 2,5 см не буде перетинатися жодною прямою лінією.

79. На відрізку АВ довжиною l навмання поставлені 2 точки L і M. Найти ймовірність того, що точка L буде ближче до точки M, ніж до точки A.

80. На відрізку довжиною l навмання ставляться 2 точки, в результаті чого цей відрізок виявляється розділеним на 3 частини. Визначити ймовірність того, що з трьох отриманих частин відрізку можна побудувати трикутник.

81. Два пароплави повинні підійти до одного і того ж причалу. Час приходу обох пароплавів незалежний і рівноможливий протягом даних діб. Визначити ймовірність того, що одному з пароплавів доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого пароплаву 1 година, а другого – 2 години.

82. В одній з популярних в Америці ігор гравець кидає монету з досить великої відстані на поверхню столу, розграфлену на однодюймові квадрати. Якщо монета ($3/4$ дюйма в діаметрі) потрапляє повністю всередину квадрата, то гравець отримує нагороду, в іншому випадку він втрачає свою монету. Які шанси виграти за умови, що монета впала на стіл?

83. На площині накреслені два концентричні кола, радіуси яких 4 і 10 см відповідно. Знайти ймовірність того, що точка, кинута навмання у велике коло, потрапить в кільце, утворене побудованими колами.

84. На відрізку довжиною l навмання вибрані дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними менше $\frac{l}{2}$?

85. На відрізку AB довжиною l навмання поставлено точку C. Знайти ймовірність того, що менший з відрізків AC і CB має довжину меншу, ніж $\frac{l}{3}$.

86. Всередину кола радіуса R навмання кинута точка. Знайти ймовірність того, що точка виявиться всередині вписаного в коло квадрата.

87. Дуелі в місті Обережності рідко закінчуються сумним результатом. Справа в тому, що кожен дуелянт прибуває на місце зустрічі у довільний випадковий момент часу між 5 і 6 годинами ранку і, прочекавши суперника 5 хвилин, йде. У випадку ж прибуття останнього в ці п'ять хвилин дуель відбувається. Яка ймовірність того, що поєдинок відбудеться?

88. Протитанкові міни поставлені на прямій через 15 метрів. Танк шириною в 3 м рухається перпендикулярно цій прямій. Яка ймовірність того, що він підірветься?

1.5. Теореми додавання та множення ймовірностей

Теорема додавання ймовірностей:

- для двох сумісних подій:

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB);$$

- для двох несумісних подій:

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B);$$

- для декількох попарно несумісних подій:

$$\mathrm{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \ldots + \mathrm{P}(A_n).$$

Наслідок: $\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A})$.

Дві випадкові події називаються **незалежними**, якщо ймовірність однієї з них не змінюється при появі або непояві іншої. У протилежному випадку події називаються **залежними**.

Ймовірність події B, обчислена в припущенні, що подія A вже відбулася, називається **умовною ймовірністю** і позначається $\mathrm{P}(B/A)$. Якщо події A і B незалежні, то: $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A/B)$; $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B/A)$.

Кілька подій називаються **незалежними** в сукупності, якщо кожна із них не залежить від добутку будь-якого числа інших.

Теорема множення ймовірностей:

- для двох залежних подій:

$$\mathrm{P}(A \cdot B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B/A) \text{ або } \mathrm{P}(A \cdot B)=\mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A/B);$$

- для кількох залежних подій:

$$\mathrm{P}(A_1 A_2 \ldots A_n) = \mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(A_2/A_1)\cdot\mathrm{P}(A_3/A_1 A_2)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(A_n/A_1\cdot\ldots\cdot A_{n-1});$$

- для двох незалежних подій:

$$\mathrm{P}(A \cdot B)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B);$$

- для декількох незалежних в сукупності подій:

$$\mathrm{P}(A_1 \cdot A_2 \cdot\ldots\cdot A_n) = \mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(A_2)\cdot\ldots\cdot\mathrm{P}(A_n).$$

ПРИКЛАДИ

89. У ящику 30 куль: 10 червоних, 5 синіх і 15 білих. Знайти ймовірність появи кольорової кулі при витягуванні 1 кулі.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Поява кольорової кулі означає появу або червоної, або синьої кулі. Ймовірність появи червоної кулі (подія A): $\mathrm{P}(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$. Ймовірність появи синьої кулі (подія B): $\mathrm{P}(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.

Події A і B несумісні (поява кулі одного кольору виключає появу кулі іншого кольору), тому по теоремі додавання для несумісних подій отримуємо: $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$.

90. Знайти ймовірність випадання числа очок, кратного двом або трьом, при одноразовому підкиданні грального кубика.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Нехай A – випадання числа очок, кратного двом, B – випадання числа очок, кратного трьом. Події сумісні у разі випадання «6». У цьому випадку слід користуватися теоремою додавання ймовірностей для сумісних подій:

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB).$$

У даному випадку: $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cdot B)=\frac{1}{6}$.

Отже,

$$\mathrm{P}(A+B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{3+2-1}{6}=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$.

91. Знайти ймовірність появи 2 гербів при одному киданні 2 монет.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Ймовірність появи герба при киданні першої монети (подія A): $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$. Ймовірність появи герба при киданні другої монети (подія B): $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$. Оскільки події незалежні, то шукана ймовірність по теоремі множення дорівнює:

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Відповідь: $\frac{1}{4}$.

92. В ящику знаходяться 20 стандартних деталей і 5 нестандартних. З ящика по одній витягують дві деталі. Яка ймовірність того, що першою буде вилучена стандартна деталь, а другою - нестандартна?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Ймовірність того, що перша деталь виявиться стандартною (подія A): $\mathrm{P}(A) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$. Ймовірність того, що друга деталь виявиться нестандартною (подія B), обчислена в припущенні, що перша деталь – стандартна, тобто умовна ймовірність дорівнює: $\mathrm{P}(B/A) = \frac{5}{24}$.

Шукана ймовірність по теоремі множення ймовірностей для залежних подій дорівнює:

$$\mathrm{P}(A \cdot B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B/A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{24} = \frac{1}{6}.$$

Відповідь: $\frac{1}{6}$.

93. В партії з 10 деталей – 8 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих 2 деталей є хоча б одна стандартна.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Події «серед витягнутих деталей є хоча б одна стандартна» і «серед витягнутих деталей немає жодної стандартної» – протилежні. Позначимо першу подію через A, а другу через $\overline{A}$.

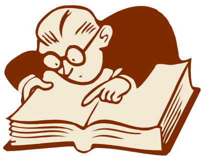
Ймовірність того, що перша витягнута деталь виявиться нестандартною, дорівнює $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Ймовірність того, що друга витягнута деталь виявиться нестандартною, за умови, що перша деталь була нестандартною, дорівнює $\frac{1}{9}$. По теоремі множення ймовірностей для залежних подій:

$$\mathrm{P}(\overline{A}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{45}.$$

Шукана ймовірність дорівнює:

$$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{45} = \frac{44}{45}.$$

Відповідь: $\frac{44}{45}$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

94. Ймовірність того, що стрілок при одному пострілі виб'є 10 очок, дорівнює 0,1; ймовірність вибити 9 очок дорівнює 0,3; ймовірність вибити 8 або менше очок дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі стрілок виб'є не менше 9 очок.

95. У партії з 50 виробів – 35 першого сорту, 10 – другого і 5 бракованих виробів. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться:

1) першого сорту; 2) другого сорту; 3) небракованою.

96. В ящику 10 деталей, серед яких 2 нестандартні. Знайти ймовірність того, що в навмання відібраних 6 деталях виявиться не більше однієї нестандартної деталі.

97. Студент прийшов на залік, знаючи з 30 питань тільки 24. Яка ймовірність здати залік, якщо після відмови відповідати на перше запитання викладач задає ще одне запитання?

98. На станції відправлення є 8 замовлень на відправлення товару: 5 – всередині країни і 3 – на експорт. Яка ймовірність того, що 2 вибрані навмання замовлення виявляться призначеними для споживання всередині країни?

99. Ймовірність того, що стрілець при одному пострілі потрапить в мішень, дорівнює 0,9. Стрілець зробив 2 постріли. Знайти ймовірність того, що з 2 пострілів:

1) 2 влучення;
2) 2 промаху;
3) 1 влучення;
4) хоча б 1 влучення.

100. У двох ящиках знаходяться деталі: у першому – 10 (з них 3 стандартні), у другому – 15 (з них 6 стандартних). З кожного ящика навмання виймають по одній деталі. Знайти ймовірність того, що:

1) обидві деталі виявляться стандартними;
2) 1 деталь стандартна;
3) обидві нестандартні;
4) принаймні 1 стандартна.

101. Ймовірність отримання кредиту для першої особи дорівнює 0,6, а для другої – 0,5. Знайти ймовірність того, що кредит отримають:

1) обидва;
2) один з двох;
3) хоча б один з двох.

102. Підприємство виготовляє 95% виробів стандартних, причому з них 86% – першого ґатунку. Знайти ймовірність того, що взятий навмання виріб виявиться першого ґатунку.

103. Тривалими спостереженнями було встановлено, що 90% підприємств перевіряються податковою інспекцією протягом певного часу. Із загальної кількості перевірених у 40% знаходять певні порушення. Знайти ймовірність того, що деяке підприємство перевірять і знайдуть порушення.

104. Серед 100 лотерейних квитків є 5 виграшних. Знайти ймовірність того, що 2 навмання вибрані квитка виявляться виграшними.

105. Студент знає 20 із 25 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає запропоновані йому екзаменатором 2 питання.

106. Ймовірності несвоєчасної сплати податків для 3 підприємців відповідно дорівнює 0,1; 0,15; 0,2. Знайти ймовірність того, що несвоєчасно сплатять податки:

1) 3 підприємці;
2) один із підприємців;
3) не більше 2 підприємців.

107. Ймовірність прибуткової діяльності для першої фірми дорівнює 0,8; для другої – 0,9; для третьої – 0,7. Знайти ймовірність того, що прибутковими будуть рівно 2 фірми.

108. Ймовірність повного розрахунку за електроенергію для першого заводу дорівнює 0,5, для другого – на 20% більше. Знайти ймовірність своєчасної оплати за електроенергію тільки одним заводом.

109. Палацовий карбувальник кладе в кожний ящик місткістю в 100 монет 1 фальшиву. Король підозрює карбувальника і піддає перевірці монети, узяті навмання по одній з кожного зі 100 ящиків. Яка ймовірність того, що карбувальника не буде викрито?

110. Кожна з букв А, А, А, А, А, Б, Б, Д, К, Р, Р написана на одній з карток розрізної абетки. Яка ймовірність того, що дитина, яка не вміє читати, складе з них слово «Абракадабра»?

111. Ймовірність того, що перший студент розв’яже задачу, дорівнює 0,75; ймовірність того, що другий студент розв’яже ту саму задачу, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що задача буде розв’язана, якщо обидва студента будуть розв’язувати її незалежно один від одного.

112. Кількість вантажних автомобілів, які проїжджають по шосе, на якому знаходиться бензоколонка, відноситься до кількості легкових автомобілів, які проїжджають по цьому ж шосе, як 3:2. Відомо, що в середньому 1 з 30 вантажних і 2 з 50 легкових автомобілів під’їдуть до бензоколонки для заправки. Чому дорівнює ймовірність того, що:

1) до бензоколонки під'їде вантажний автомобіль і буде заправлятися?

2) до бензоколонки під'їде легковий автомобіль і буде заправлятися?

3) автомобіль, який під'їде до бензоколонки, буде заправлятися?

113. У журі з трьох осіб два члени незалежно один від одного приймають правильне рішення з ймовірністю 0,8, а третій для винесення рішення кидає монету. Остаточне рішення виноситься більшістю голосів. Журі з однією людиною виносить справедливе рішення з ймовірністю 0,8. Яке з цих журі виносить справедливе рішення з більшою ймовірністю?

114. Щоб підбадьорити сина, що робить успіхи у грі в теніс, батько обіцяє йому приз, якщо він виграє підряд принаймні дві тенісні партії проти своїх батька і матері, за однією зі схем: батько – мати – батько або мати – батько – мати за вибором сина. Ймовірність виграшу у батька дорівнює 0,4; у матері – 0,7. Яку схему слід вибрати синові?

115. Ймовірність обслуговування клієнта одним оператором у банку дорівнює 0,6. Яка мінімальна кількість операторів повинна працювати в банку, щоб ймовірність обслуговування клієнта була не менш 0,95?

116. Підприємець вирішив вкласти свої кошти порівну у 2 контракти, кожен з яких принесе йому прибуток у розмірі 100%. Ймовірність того, що будь-який з контрактів не «лопне», дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що після закінчення контрактів підприємець принаймні нічого не втратить?

117. Інвестор вирішив вкласти кошти порівну у 3 підприємства за умови повернення йому через певний термін 150% від вкладеної суми кожним підприємством. Ймовірність банкрутства кожного підприємства 0,2. Знайти ймовірність того, що після закінчення терміну кредитування інвестор отримає назад принаймні вкладену суму.

118. Два гравця по черзі підкидають монету. Виграє той, у кого першим випадає герб. Знайти ймовірність виграшу кожного гравця.

1.6. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Нехай подія A може настати тільки одночасно з однією із подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу. Події $H_1, H_2, \dots, H_n$ називають гіпотезами.

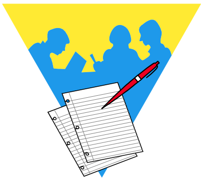
Тоді ймовірність події A обчислюється за ***формулою повної ймовірності***:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1)\cdot \mathrm{P}(A/H_1) + \mathrm{P}(H_2)\cdot \mathrm{P}(A/H_2) + \ldots + \mathrm{P}(H_n)\cdot \mathrm{P}(A/H_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(H_j) \cdot \mathrm{P}(A/H_j).$$

Нехай відомо, що подія A відбулася. Подія A може відбутися спільно тільки з однією із гіпотез. Якщо до випробування ймовірності гіпотез були $\mathrm{P}(H_1)$, $\mathrm{P}(H_2)$, ..., $\mathrm{P}(H_n)$, то після випробування, в результаті якого відбулася подія A, можуть бути обчислені умовні ймовірності за ***формулою Байєса***:

$$\mathrm{P}(H_i/A) = \frac{\mathrm{P}(H_i) \cdot \mathrm{P}(A/H_i)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(H_i) \cdot \mathrm{P}(A/H_i)}{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(H_j) \cdot \mathrm{P}(A/H_j)} \quad (i = \overline{1, n}).$$



ПРИКЛАДИ

119. На двох автоматичних верстатах виробляються однакові деталі. Ймовірність виготовлення деталі вищого ґатунку на першому верстаті дорівнює 0,92, а на другому – 0,8. Виготовлені на обох верстатах нерозсортовані деталі знаходяться на складі. Серед них деталей, виготовлених на першому верстаті, утричі більше, ніж на другому. Визначити ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться вищого ґатунку.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо через A подію – взята навмання деталь вищого ґатунку. Можна зробити два припущення: 1) гіпотеза H_1 – деталь виготовлена на першому верстаті; 2) гіпотеза H_2 – деталь виготовлена на другому верстаті. Оскільки деталей, виготовлених на першому верстаті, в три рази більше, ніж на другому, то: $\mathrm{P}(H_1) = \frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(H_2) = \frac{1}{4}$.

За умовою задачі маємо: $\mathrm{P}(A/H_1) = 0{,}92$ (умовна ймовірність того, що деталь буде вищого ґатунку, якщо вона виготовлена на першому верстаті); $\mathrm{P}(A/H_2) = 0{,}8$ (умовна ймовірність того, що деталь буде вищого ґатунку, якщо вона виготовлена на другому верстаті).

Шукану ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться вищого ґатунку, знаходимо за формулою повної ймовірності:

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(H_1) \cdot \mathrm{P}(A/H_1) + \mathrm{P}(H_2) \cdot \mathrm{P}(A/H_2) = \frac{3}{4} \cdot 0{,}92 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}8 = 0{,}89.$$

Відповідь: 0,89.

120. У першій коробці міститься 20 деталей, з них 18 стандартних; в другій коробці – 10 деталей, з них 9 стандартних. З другої коробки навмання взято деталь і перекладено в першу. Знайти ймовірність того, що деталь, навмання витягнута після цього з першої коробки, буде стандартною.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Позначимо через A подію – з першої коробки вилучено стандартну деталь. З другої коробки могла бути вилучена і перекладена в першу або стандартна деталь (гіпотеза H_1), або нестандартна (гіпотеза H_2). Ймовірність того, що з другої коробки вилучена стандартна деталь, дорівнює $P(H_1) = \frac{9}{10}$. Ймовірність того, що з другої коробки вилучена нестандартна деталь, дорівнює $P(H_2) = \frac{1}{10}$.

Умовна ймовірність того, що з першої коробки вилучена стандартна деталь, за умови, що з другої коробки в першу була перекладена стандартна деталь, дорівнює $P(A/H_1) = \frac{19}{21}$.

Умовна ймовірність того, що з першої коробки вилучена стандартна деталь, за умови, що з другої коробки в першу була перекладена нестандартна деталь, дорівнює $P(A/H_2) = \frac{18}{21}$.

Шукана ймовірність того, що з першої коробки буде вилучена стандартна деталь, за формулою повної ймовірності дорівнює:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0{,}9.$$

Відповідь: 0,9.

121. У трьох ящиках знаходиться по 20 куль. У першому ящику 20 білих куль, у другому 10 білих і 10 чорних куль, в третьому – 20 чорних куль. З вибраного навмання ящика вийнято кулю, яка виявилася білою. Обчислити ймовірність того, що кулю вийнято з першого ящика.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

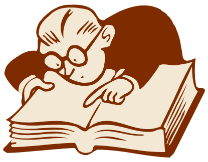
Нехай подія A – витягання білої кулі; H_1, H_2, H_3 – гіпотези, що полягають у виборі відповідно першого, другого чи третього ящика. Оскільки вибір будь-якого з ящиків рівноможливий, то: $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$. Ймовірність витягання білої кулі з першого ящика: $P(A/H_1) = \frac{20}{20} = 1$. Ймовірність витягання білої кулі з другого ящика: $P(A/H_2) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$. Ймовірність витягання білої кулі з третього ящика: $P(A/H_3) = 0$.

Шукану ймовірність знаходимо за формулою Байєса:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)+P(H_3)\cdot P(A/H_3)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0}=\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $\frac{2}{3}$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

122. Податкові інспектори роблять перевірку діяльності підприємств: перший обслуговує 30 підприємств, серед яких 25% не мають заборгованостей, другий – 70 підприємств, з них 40% без заборгованості. Яка ймовірність того, що навмання взяте на перевірку підприємство не має заборгованостей?

123. Тираж популярної газети друкується у 2 друкарнях. Потужності двох друкарень відносяться як 3:4, причому перша дає в середньому 3% браку, а друга – 2%. Яка ймовірність того, що навмання вибраний екземпляр газети буде бракованим?

124. У групі спортсменів 20 лижників, 6 велосипедистів і 4 бігуни. Ймовірність виконати кваліфікаційну норму така: для лижника – 0,9, для велосипедиста – 0,8 і для бігуна – 0,75. Знайти ймовірність того, що спортсмен, вибраний навмання, виконає норму.

125. Студент знає не всі екзаменаційні питання. У якому випадку ймовірність витягнути невідоме питання буде для нього найменшою: коли він тягне квиток першим, другим ... або останнім?

126. Є урни трьох складів куль:

1) 3 урни по 2 білих та 1 чорній кулі в кожній;
2) 1 урна з 10 чорними кулями;
3) 2 урни по 3 білих і 1 чорній кулі в кожній.

Навмання вибирається урна і з неї куля. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

127. Один володар, якому набрид міністр зі своїми невдалими порадами, вирішив стратити його. Проте він надав можливість міністру вижити. Йому було наказано розподілити по двох урнах 2 білі і 2 чорні кулі. Кат вибере навмання урну і з неї дістане кулю. Якщо куля буде чорною, міністра стратять, білою – помилують. Яким чином міністр повинен розподілити кулі в урнах, щоб забезпечити собі найбільшу ймовірність залишитися в живих?

128. Є дві урни: в першій 7 білих і 3 чорних кулі, у другій – 7 білих і 6 чорних куль. З першої урни в другу перекладають не дивлячись 1 кулю. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою.

129. З урни, яка містить 3 білі і 2 чорні кулі, перекладено 2 кулі в урну, яка містить 4 білі і 4 чорні кулі. Яка ймовірність вийняти після цього з другої урни білу кулю?

130. У ящику лежить 20 тенісних м'ячів: 12 нових і 8 граних. З ящика навмання витягуються 2 м'ячі для гри і після неї повертають в ящик. Потім з ящика виймають 2 м'ячі для наступної гри. Знайти ймовірність того, що ці обидва м'ячі будуть неграними.

131. В урну, яка містить 2 кулі, опущено білу кулю, після чого з неї навмання витягли 1 кулю. Знайти ймовірність того, що витягнута куля виявиться білою, якщо рівноймовірні всі можливі припущення про початковий склад куль (за кольором).

132. У ящик, що містить 3 однакові деталі, кинули стандартну деталь, а потім навмання витягли одну деталь. Знайти ймовірність того, що витягнута стандартна деталь, якщо рівноймовірні всі можливі припущення про число стандартних деталей, що спочатку знаходилися в ящику.

133. Два економісти заповнюють документи, які складаються в загальну папку. Ймовірність зробити помилку в документі для першого економіста – 0,1, для другого – 0,3. Перший економіст заповнив 40 документів, другий – 60. Навмання взятий з папки документ виявився з помилкою. Визначити ймовірність того, що його заповнив перший економіст.

134. Два автомати виробляють однакові деталі, які поступають на загальний конвеєр. Продуктивність першого автомата вдвічі більше продуктивності другого. Перший автомат виробляє в середньому 60% деталей відмінної якості, а другий – 84%. Навмання взята з конвеєра деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь вироблена першим автоматом.

135. У хлопчика в лівій кишені 3 цукерки «Білочка» та одна цукерка «Маска», а у правому – 2 «Білочки» і 2 «Маски». Він дістав 2 цукерки з однієї кишені і виявилося, що одна з них «Білочка», а інша «Маска». Чому дорівнює ймовірність того, що він дістав цукерки з лівої кишені? З правої?

136. Три мисливці зробили по одному пострілу, в результаті чого вовк був убитий однією кулею. Відомо, що перший мисливець стріляє успішно в 80%, другий – у 60%, а третій – у 50% випадків. Шкіру вовка продали за 390 гривень. Як мисливцям розділити між собою виручку, якщо вони не знають, ким з них був убитий вовк?

137. У касу підприємства надійшли банкноти у пачках від двох банків: 50 пачок від першого і 70 – від другого. Відомо, що касири першого банку помиляються при формуванні пачок у середньому 1 раз з 1000, а касири другого – 1 раз з 500. Яка ймовірність того, що:

а) навмання вибрана пачка сформована без помилок?

б) пачка була сформована касирами другому банку, якщо вона виявилася сформованою без помилок?

138. У рекламному агентстві працює три групи дизайнерів: перша обслуговує 25 фірм, друга – 45, третя – 40. Відомо, що в середньому 40% фірм, що обслуговуються дизайнерами першої групи, повертають гроші, витрачені на рекламу, протягом першого місяця. Для дизайнерів другої і третьої груп – відповідно 45% і 35% фірм. Яка ймовірність того, що:

а) навмання вибрана фірма поверне витрачені на рекламу гроші протягом місяця?

б) фірма, яка повернула гроші протягом місяця, обслуговувалася дизайнерами третьої групи?

139. Ймовірність виготовлення виробів із дефектом дорівнює 0,08. Після виготовлення всі вироби перевіряються, в результаті чого вироби без браку визнаються придатними з ймовірністю 0,95, а вироби з дефектом – з ймовірністю 0,06. Знайти ймовірність того, що:

а) взятий навмання виріб визнано придатним;

б) визнаний придатним виріб дійсно не містить дефекту.

140. Статистика видачі кредитів у банку така: 10% − державним органом, 30% − іншим банкам, решта − фізичним особам. Ймовірності неповернення взятого кредиту відповідно такі: 0,01; 0,05; 0,2.

1) знайти ймовірність неповернення кредиту.

2) начальнику кредитного відділу доповіли, що отримано повідомлення про неповернення кредиту, але у факсовому повідомленні ім’я клієнта було погано надруковано. Яка ймовірність того, що цей кредит не повертає якийсь банк?

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чим відрізняються теореми додавання для сумісних та несумісних подій?

2. Чи можна перенести теореми додавання та множення ймовірностей на випадок декількох подій? Як вони формулюються?

3. Які з перерахованих тверджень вірні?

а) $P(A\cdot\overline{A})=0$; б) $P(A\cdot\overline{A})=1$;

в) $\mathrm{P}(A+\overline{A})=0$; г) $\mathrm{P}(A+\overline{A})=1$.

4. Для яких подій A і B, справедлива рівність

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A)+ \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)?$$

5. Розташуйте наступні події в порядку спадання їх ймовірностей:

$$\varnothing,\ U,\ A,\ A+B,\ A\cdot B.$$

6. Дано: $\mathrm{P}(A)> 0{,}5$; $\mathrm{P}(B) > 0{,}8$. Чи вірно, що $\mathrm{P}(AB) >0{,}2$?

7. В сім'ї двоє дітей. Що більш ймовірно: вони різностатеві або одностатеві?

8. Чому дорівнює ймовірність настання хоча б однієї з подій повної групи несумісних подій?

9. Сумісні або несумісні події A і B, якщо $\mathrm{P}(A)= 2/3$, $\mathrm{P}(B) = 1/2$?

10. Залежні або незалежні події A і B, якщо:

а) $\mathrm{P}(A)= 2/9$, $\mathrm{P}(B)= 3/4$, $\mathrm{P}(AB) = 1/6$;

б) $\mathrm{P}(A) = 3/7$, $\mathrm{P}(B) = 7/9$, $\mathrm{P}(AB) = 1/4$?

11. Дано: $\mathrm{P}(A)=0{,}6$; $\mathrm{P}(A+B)=0{,}8$; $\mathrm{P}(AB)=0{,}5$. Знайти $\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(B/A)$, $\mathrm{P}(A/B)$. Чи залежні події A і B?

1.7. Повторення випробувань. Формула Бернуллі

Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких може з'явитися подія A. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні одна й та ж і дорівнює p.

Тоді ймовірність того, що при n випробуваннях подія A з'явиться рівно k разів, може бути обчислена за ***формулою Бернуллі***:

$$\mathrm{P}_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}, \quad \text{де } q = 1-p.$$

Найімовірніше число k появи події A в серії з n незалежних випробувань задовольняє нерівності:

$$np - q \le k \le np + p.$$

Якщо $np - q$ не є цілим числом, то значення k – єдине. Якщо $np - q$ і, як наслідок, $np + p$ – цілі числа, то найімовірнішими є два значення:

$$k_1 = np - q; \quad k_2 = np + p.$$

ПРИКЛАДИ

141. У випадково обраної сім’ї 5 дітей. Вважаючи ймовірності народження хлопчика і дівчинки однаковими, визначити ймовірність того, що в даній сім’ї:

1) 3 дівчинки і 2 хлопчика;
2) не більше 3 дівчаток.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Нехай A – подія, що полягає в народженні дівчинки. Її ймовірність: $p=\frac{1}{2}$; ймовірність народження хлопчика: $q=1-p=\frac{1}{2}$.

1) Шукана ймовірність того, що в сім’ї з n = 5 дітей буде k = 3 дівчинки, обчислюється за формулою Бернуллі:

$$\text{P}_5(3)=C_5^3\cdot p^3\cdot q^{5-3}=C_5^3\cdot p^3\cdot q^2=\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}=0{,}3125.$$

2) Якщо позначити через A подію – у родині не більше 3 дівчаток, то протилежне $\overline{A}$ – у родині більше 3 дівчаток (тобто 4 або 5). Маємо:

$\text{P}_5(4)=C_5^4\cdot p^4\cdot q^{5-4}=C_5^1\cdot p^4\cdot q^1=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32}$ (ймовірність того, що в сім’ї 4 дівчинки);

$\text{P}_5(5)=C_5^5\cdot p^5\cdot q^{5-5}=1\cdot p^5\cdot q^0=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot1=\frac{1}{32}$ (ймовірність того, що в сім’ї 5 дівчат).

Отже, $\text{P}(A)=1-\text{P}(\overline{A})=1-\left(\text{P}_5(4)+\text{P}_5(5)\right)=1-\frac{6}{32}=\frac{26}{32}=\frac{13}{16}=0{,}8125$.

Відповідь: 1) 0,3125; 2) 0,8125.

142. У скриньці 10 білих і 40 чорних куль. Виймають послідовно n кульок, причому колір вийнятої кулі реєструють, а потім кулю повертають в урну. Визначити найімовірніше число появ білої кулі, якщо:

1) n = 13, 2) n = 19.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Ймовірність витягти білу кулю з урни при кожному випробуванні дорівнює $p=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$. Тоді $q=1-p=\frac{4}{5}$. Знайдемо найімовірніше число k з подвійної нерівності: $np-q\le k\le np+p$.

1) Підставивши дані задачі, отримаємо:

$$13\cdot\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\le k\le13\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5},$$

$$\frac{9}{5}\le k\le\frac{14}{5}\quad\Rightarrow\quad1{,}8\le k\le2{,}8.$$

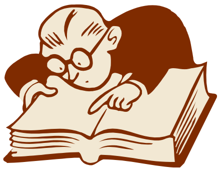
Оскільки k - ціле число, то шукане найімовірніше число $k = 2$.

2) Підставивши $n = 19$, $p = \frac{1}{5}$, $q = \frac{4}{5}$, отримаємо:

$$\frac{19}{5} - \frac{4}{5} \le k \le \frac{19}{5} + \frac{1}{5}, \text{ тобто: } 3 \le k \le 4.$$

Таким чином, існує два найімовірніші значення: $k_1 = 3$ та $k_2 = 4$.

Відповідь: 1) $k = 2$; 2) $k_1 = 3$, $k_2 = 4$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

143. Гральний кубик кидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що 2 рази з'явиться число очок, яке кратне трьом.

144. Знайти ймовірність того, що у родині з 5 дітьми число хлопчиків відрізняється від числа дівчаток на 1.

145. Кожен сьомий клієнт банку приходить в банк брати проценти з вкладу. Зараз у банку очікують своєї черги обслуговування 6 осіб.
Знайти ймовірність того, що з них будуть брати відсотки:

а) тільки 2 особи;
б) не менше 5 осіб;
в) хоча б 1особа.

146. Припустимо, ви вирішили летіти до міста N на літаку й у вас є вибір: летіти на двомоторному або на чотиримоторному літаку. Мотори у літаків однакові, і кожен з ймовірністю p може відмовити під час польоту. Від знайомих авіаторів ви знаєте, що двомоторний літак здатний долетіти до N і на одному моторі, а чотиримоторний – на 3 або навіть на 2 моторах, а на одному вже не може. Який літак надійніший? Розв'язати задачу за умови, що:

а) $p = 0{,}3$; б) $p = 0{,}4$.

147. Митниця дає офіційну оцінку того, що в середньому зі 100 осіб, які повертаються з-за кордону, 20 осіб не декларують весь товар, який підлягає оподаткуванню. Випадково відібрано 7 осіб, які повертаються з-за кордону. Яка ймовірність того, що:

а) всі вони задекларують весь товар;
б) не менше 3 осіб задекларують;
в) не більше 2 осіб задекларують.

148. Два шахіста домовились зіграти 10 результативних партій. Перший гравець виграє у другого в два рази частіше, ніж другий у першого. У скільки разів ймовірність виграшу всієї гри першим гравцем більше ймовірності виграшу всієї гри другим гравцем?

149. В агентство нерухомості звертаються з приводу оренди та продажу квартир у співвідношенні 7:5. Яка ймовірність того, що серед 6 випадково відібраних заявок, буде:

а) 4 на продаж квартир?

б) не менше 4 на оренду квартир?

150. Імпортер поставляє горизонтальні та вертикальні жалюзі для вікон, причому горизонтальних в 3 рази більше, ніж вертикальних. Яка ймовірність того, що серед 4 відібраних жалюзі буде:

а) 3 горизонтальних?

б) не менше 3 горизонтальних?

151. Додаткового оснащення нового автомобіля вимагає кожний сьомий покупець автосалону. Яка ймовірність того, що серед 8 навмання вибраних покупців авто:

а) буде не більше 2 з додатковими вимогами?

б) хоча б 1 не вимагатиме додаткового оснащення?

152. Банк має 5 відділень. З ймовірністю 0,1 незалежно від інших кожне відділення може замовити на завтра велику суму грошей. В кінці робочого дня один із віце-президентів банку знайомиться з отриманими заявками. Яка ймовірність того, що буде:

а) 4 заявки?

б) хоча б 1 заявка?

в) заявка від першого відділення, якщо надійшло 2 заявки?

153. Підприємство виготовляє аудіотехніку, 3% якої має дефекти. Для контролю з партії апаратури навмання вибирається 5 виробів. Якщо виріб має дефект, то при перевірці його виявляють у 94 випадках зі 100. Яка ймовірність того, що дефект буде виявлено:

а) тільки в 1 виробу?

б) хоча б в 1 виробу?

154. Скільки разів необхідно кинути гральну кістку, щоб з ймовірністю не менше $1/2$ можна було очікувати появу шести очок хоча б в одному випадку?

155. Кафе обслуговує відвідувачів, 15% яких є постійними клієнтами. Яку мінімальну кількість відвідувачів треба відібрати, щоб з ймовірністю не менше 0,9 зафіксувати хоча б 1 постійного клієнта?

156. Автоматичний верстат виготовляє $2/3$ деталей першого сорту і $1/3$ – другого сорту. Визначити найімовірніше число виробів першого сорту:

1) серед 5 випадково відібраних деталей;

2) серед 10 деталей.

157. За наявними даними в середньому 90% числа виготовлених цехом виробів не мають дефектів. Яке найімовірніше число виробів, що не мають дефектів, виявиться серед відібраних випадковим чином:

1) 19 зразків?
2) 30 зразків?

158. У середньому кожна двадцята податкова накладна містить помилку. Скільки податкових накладних потрібно взяти, щоб найімовірніше число накладних без помилок було 70?

159. Два стрілки одночасно стріляють по мішені. Ймовірність промаху при одному пострілі для першого стрільця дорівнює 0,2, а для другого – 0,4. Знайти найімовірніше число залпів, за яких не буде жодного попадання в мішень, якщо стрілки зроблять по 25 пострілів кожен.

1.8. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа. Формула Пуассона

Локальна теорема Муавра-Лапласа

Якщо в кожному з n незалежних випробувань подія A з'являється з однієї і тієї ж сталою, відмінною від 0 та 1 ймовірністю p, а число випробувань n достатньо велике, то ймовірність $\mathrm{P}_n(k)$ того, що подія A з'явиться рівно k разів, приблизно дорівнює:

$$\mathrm{P}_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \; x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції $\varphi(x)$ для невід'ємних значень $x \in [0; 4)$ наведені в Додатку 2. Для всіх значень $x \geq 4$ будемо вважати $\varphi(x) = 0$. Для від'ємних значень x використовуємо ту ж таблицю, так як функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Якщо в кожному з n незалежних випробувань подія A з'являється з однією і тією ж сталою, відмінною від 0 та 1 ймовірністю p, а число випробувань n достатньо велике, то ймовірність того, що подія A з'явиться k разів, де k знаходиться між k_1 і k_2, приблизно дорівнює:

$$\mathrm{P}_n(k_1 \leq k \leq k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

$$\text{де } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції $\Phi(x)$ для $x \in [0; 4)$ наведені в Додатку 3. Для значень $x \geq 4$ будемо вважати $\Phi(x) = 0.5$. Для від'ємних значень x застосовуємо ту ж саму таблицю, використовуючи те, що функція $\Phi(x)$ непарна, тобто:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

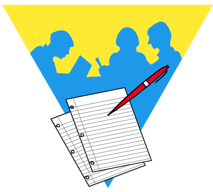
Формула Пуассона

Якщо ймовірність p настання події в окремому випробуванні близька до нуля, то навіть при великому числі випробувань n, але при невеликому значенні добутку np, одержані за формулою Лапласа значення ймовірностей $P_n(k)$ виявляються недостатньо точними і виникає необхідність в іншій наближеній формулі.

Теорема. Якщо ймовірність p настання події A в кожному випробуванні незмінна, але мала, кількість незалежних випробувань n досить велика, але значення добутку $np = \lambda$ залишається невеликим (не більше десяти), то ймовірність того, що в цих випробуваннях подія A настане k раз наближено дорівнює:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Для спрощення розрахунків із застосуванням формули Пуассона складена таблиця значень функції Пуассона: $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = F(k, \lambda)$ (див. Додаток 1).



ПРИКЛАДИ

160. Ймовірність ураження мішені при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена рівно 75 разів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За умовою $n = 100$, $k = 75$, $p = 0,8$, $q = 1-p = 0,2$. Оскільки n велике, скористаємося локальною теоремою Муавра-Лапласа: $P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$.

Обчислимо x: $$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -\frac{5}{4} = -1,25.$$

Функція $\varphi(x)$ – парна, тому $\varphi(-1,25) = \varphi(1,25)$.

По таблиці (див. Додаток 2) знайдемо: $\varphi(1,25)=0,1826$. Шукана ймовірність:

$$P_{100}(75) \approx \frac{0{,}1826}{4} = 0{,}04565.$$

Відповідь: $P_{100}(75) = 0{,}04565$.

161. Ймовірність того, що деталь не пройшла перевірку ВТК, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей виявиться неперевіреними від 70 до 100 деталей.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За умовою $n = 400$, $k_1 = 70$, $k_2 = 100$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - p = 0{,}8$.

Скористаємося інтегральною теоремою Муавра-Лапласа:

$$P_{400}(70 \le k \le 100) \approx \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Обчислимо x' і x'':

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -\frac{10}{8} = -1{,}25.$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{20}{8} = 2{,}5.$$

Враховуючи, що функція Лапласа непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, отримаємо: $P_{400}(70 \le k \le 100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25)$. По таблиці (див. Додаток 3) знаходимо: $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$, $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$. Шукана ймовірність: $P_{400}(70 \le k \le 100) \approx 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$.

Відповідь: $P_{400}(70 \le k \le 100) = 0{,}8882$.

162. Пристрій складається з 1000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Ймовірність відмови будь-якого елемента протягом часу T дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що за час T відмовлять:

1) три елементи;
2) менше трьох елементів;
3) хоча б один елемент.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Необхідну ймовірність обчислимо за формулою Пуассона, оскільки число $n = 1000$ велике, а ймовірність відмови елемента $p = 0{,}002$ мала. Вирахуємо $\lambda = n \cdot p = 1000 \cdot 0{,}002 = 2$. По таблиці (див. Додаток 1) знаходимо шукану ймовірність ($\lambda = 2$, $k = 3$):

$$P_{1000}(3) = F(3; 2) = 0{,}1804.$$

2) Знайдемо ймовірність того, що за час T відмовлять менше 3 елементів:

$$P_{1000}(k < 3) = P_{1000}(0) + P_{1000}(1) + P_{1000}(2) = F(0; 2) + F(1; 2) + F(2; 2).$$

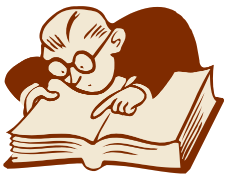
По таблиці (див. Додаток 1) знаходимо ймовірності $F(0;2)$, $F(1;2)$, $F(2;2)$ ($\lambda = 2$, $k = 0; 1; 2$):

$$\text{P}_{1000}(k < 3) = 0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707 = 0{,}6767.$$

3) Знайдемо ймовірність того, що відмовить хоча б один елемент. Розглянемо протилежну подію: за час T відмови елемента не буде. Обчислюємо ймовірність цієї події: $\text{P}_{1000}(0) = F(0;2) = 0{,}1353$.

Оскільки сума ймовірностей $\text{P}(A) + \text{P}(\overline{A}) = 1$, то шукана ймовірність $\text{P} = 1 - \text{P}_{1000}(0) = 1 - 0{,}1353 = 0{,}8647$.

Відповідь: 1) 0,1804; 2) 0,6767; 3) 0,8647.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

163. Монета кинута 400 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде рівно 220 разів.

164. За даними технічного контролю в середньому 10% виготовлених на заводі годинників потребують додаткового регулювання. Чому дорівнює ймовірність того, що з 400 виготовлених годинників 350 штук не будуть мати потребу в додатковому регулюванні?

165. З 300 випечених Фрекен Бок плюшок кожна з ймовірністю 0,75 діставалася Карлсону. Знайти ймовірність того, що іншим членам сім'ї дісталося рівно 85 булочок.

166. Ймовірність звернення клієнта в банк за поверненням депозиту дорівнює 0,2. Знайти:

а) ймовірність того, що з 400 клієнтів, що відвідали банк, рівно 100 зажадають повернення депозиту;

б) найімовірніше число таких клієнтів.

167. Податкова служба визначила, що в середньому половина всіх декларацій про дохід містить принаймні 1 помилку. На столі інспектора лежить папка, в якій 100 декларацій. Яка ймовірність того, що рівно 40 з них містять помилки?

168. Кожен двадцятий кредит, виданий банком, не повертається в строк. Цього року банк планує видати близько 1900 кредитів. Знайти ймовірність того, що в термін не будуть повернені:

а) не більше 90 кредитів;

б) не менше 80, але не більше 120 кредитів;

в) більше 125 кредитів.

Знайти найімовірніше число неповернених в термін кредитів.

169. Банк видає кредитні картки VISA. Було встановлено, що 40% всіх рахунків оплачується повністю з їх допомогою. Було вибрано навмання 600 рахунків. Яка ймовірність того, що за допомогою карток VISA сплачено:

а) менше 220 рахунків?

б) від 200 до 250 рахунків?

в) більше 275 рахунків?

170. У середньому кожен десятий абонент пейджингового зв'язку не отримує надісланого йому повідомлення. Знайти ймовірність того, що серед 900 відправлених повідомлень буде:

а) 790 отриманих;

б) не більше 60 отриманих.

171. Фірма виконує поліграфічні роботи, причому в середньому чверть усіх замовлень припадає на виготовлення візитних карток. Знайти ймовірність того, що серед 300 клієнтів:

а) 85 замовлять візитні картки;

б) не більше 60 замовлять візитні картки.

172. Якщо в середньому лівші становлять 1% загального числа студентів, то які шанси на те, що серед 200 студентів другого курсу виявиться: а) 4 студентів лівші;

б) не менше 4.

173. На факультеті 700 студентів. Знайти:

а) найбільш ймовірне число студентів, які народилися 31 грудня;

б) ймовірність того, що в цей день народилися 3 студенти;

в) хоча б 1 студент.

174. Власники кредитних карток цінують їх і втрачають дуже рідко. Нехай ймовірність втратити протягом тижня кредитну картку для довільного власника дорівнює 0,001. Усього банк видав картки 2000 клієнтам. Знайти ймовірність того, що наступного тижня буде втрачена:

а) хоча б 1 картка;

б) рівно 1 картка.

Знайти найімовірніше число карток, втрачених за тиждень.

175. Локальна мережа складається зі 100 комп'ютерів. Ймовірність збою в роботі протягом доби для кожного з них дорівнює 0,002. Яка ймовірність того, що протягом доби відбудеться збій в роботі не більше ніж 3 комп'ютерів?

176. Енергетична компанія обслуговує 800 споживачів електроенергії. Перебої в подачі енергії протягом доби виникають з ймовірністю 0,005. Яка ймовірність того, що протягом доби буде отримано не більше 9, але не менше 4 повідомлень про перебої?

177. При транспортуванні виробів зі скла в середньому з кожної сотні пошкоджується 3 вироби. Яка ймовірність того, що партія з 250 виробів після транспортування зі складу в магазин:

а) не буде містити пошкоджених виробів?

б) буде містити не більше 2 пошкоджених виробів?

Знайти найімовірніше число пошкоджених виробів.

178. У страховому товаристві застраховано 10000 осіб. Ймовірність нещасного випадку протягом року для кожної особи дорівнює 0,006. Кожний застрахований вносить 1 січня 20 гривень страхових, а у разі нещасного випадку отримає від товариства 1000 гривень. Знайти ймовірність того, що:

а) товариство зазнає збитку;

б) товариство отримає прибуток не менше 40 000 гривень.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Як визначити ймовірність того, що в серії з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі подія настане:

а) k разів;

б) менш k разів;

в) більш k разів;

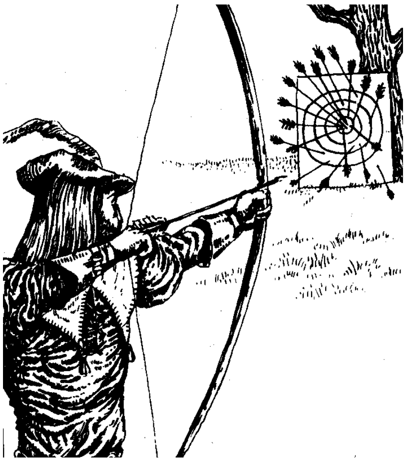
г) не менш k разів;

д) не більше k разів;

е) хоча б 1 раз.

2. Чим схожі і чим відрізняються локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа?

3. Чим схожі і в чому відмінність умов застосування теорем Муавра-Лапласа та формули Пуассона?



Випадкові величини

Випадкова величина – змінна величина, конкретне значення якої залежить від випадку.

Наприклад, температура повітря в 13 годин 1 червня в Києві; номер грані, що випадає, при киданні кістки; швидкість літака в даний момент часу і т. п.

1.9. *Дискретна випадкова величина*

Дискретною випадковою величиною називається випадкова величина, можливі значення якої можуть бути пронумеровані (число можливих значень скінченне або зчисленне).

Для характеристики випадкової величини необхідно знати множину можливих значень цієї величини та ймовірності, з якими вона може приймати ці значення. Ці дані утворюють **закон розподілу** випадкової величини.

Наприклад, розподіл числа очок при киданні грального кубика описується рівними ймовірностями $1/6$ для кожного значення від 1 до 6.

Найпростішою формою завдання закону розподілу дискретної випадкової величини є таблиця, перший рядок якої містить усі можливі значення x_i випадкової величини X, а другий – ймовірності $p_i = P(X = x_i)$. В випадку скінченного числа можливих значень таблиця має вигляд:

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

У зв’язку з тим, що випадкова величина X в результаті випробування обов’язково приймає одне і лише одне з можливих значень x_i, події $X = x_i$ утворюють повну групу і, отже, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Випадкова величина може приймати нескінченне число значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$. У цьому випадку: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, що визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше x, тобто: $F(x) = P(X < x)$.

Властивості функції розподілу:

1. $0 \le F(x) \le 1$ при всіх значеннях x.

2. $F(x)$ – неспадна функція, тобто, якщо $b > a$, то $F(b) \ge F(a)$.

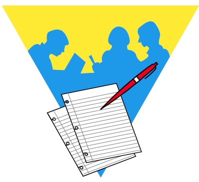
3. $F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$, де $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x), F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

4. Ймовірність потрапляння випадкової величини X на проміжок [a, b) визначається формулою: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Для дискретних випадкових величин функція розподілу є розривною ступінчастою функцією, неперервною зліва:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i),$$

де підсумовування виконується по всіх значеннях індексу i, для яких $x_i < x$.



ПРИКЛАД

179. Монета підкидається 2 рази. Випадкова величина X – число появ герба. Потрібно:

1) скласти закон розподілу випадкової величини;

2) знайти функцію розподілу та побудувати її графік;

3)обчислити ймовірність попадання випадкової величини X на проміжок [0,5; 3).

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Дискретна випадкова величина X може приймати наступні значення: $x_1 = 0$ (герб не випав жодного разу), $x_2 = 1$ (герб випав один раз), $x_3 = 2$ (герб випав два рази). Ймовірність цих значень обчислюємо за формулою Бернуллі:

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

В даному випадку: $n = 2, p = 0{,}5;\ q = 1 - p = 0{,}5;$

$$p_1 = P(X = 0) = P_2(0) = C_2^0 \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^2 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}25 = 0{,}25;$$

$$p_2 = P(X = 1) = P_2(1) = C_2^1 \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^1 = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}5;$$

$$p_3 = P(X = 2) = P_2(2) = C_2^2 \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^0 = 1 \cdot 0{,}25 \cdot 1 = 0{,}25.$$

Отримуємо наступний закон розподілу випадкової величини:

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

Контроль обчислень: $\sum_{i=1}^{3} \mathrm{p}_i = 0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}25 = 1$.

2) Знайдемо функцію розподілу випадкової величини *X*.

Якщо $x \le 0$, то $F(x) = P(X < x) = 0$.

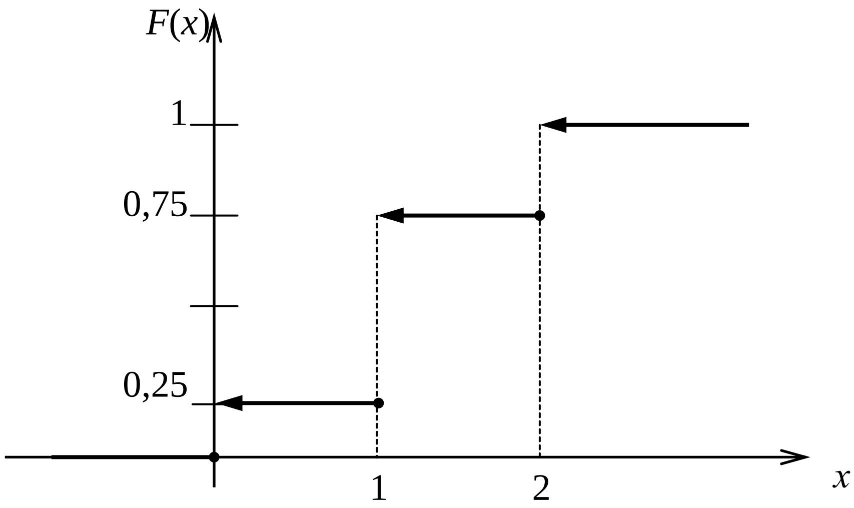
Якщо $0 < x \le 1$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0{,}25$.

Якщо $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}75$.

Якщо $x > 2$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$.

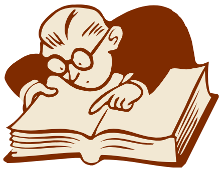
Таким чином: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо} \quad x \le 0, \\ 0{,}25 & \text{якщо} \quad 0 < x \le 1, \\ 0{,}75 & \text{якщо} \quad 1 < x \le 2, \\ 1 & \text{якщо} \quad x > 2. \end{cases}$

Побудуємо графік функції розподілу $F(x)$:



3) Ймовірність попадання випадкової величини X на проміжок [0.5;3) обчислюємо за формулою: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$. В даному випадку $a = 0{,}5, b = 3$.

Отримуємо: $P(0{,}5 \le X < 3) = F(3) - F(0{,}5) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

180. Ймовірність підвищення курсу акцій першого підприємства дорівнює 0,4; другого – 0,6; третього – 0,7. Випадкова величина X – число підприємств, курс акцій яких підвищився. Знайти закон розподілу випадкової величини X.

181. Ймовірність того, що банкомат при введенні коду спрацює правильно, дорівнює 0,97. Скласти закон розподілу кількості введення коду в банкомат до першого правильного спрацьовування банкомату.

182. Згідно зі статистичними даними, 7% працездатного населення – безробітні. Навмання вибрано 4 людини. Побудувати закон розподілу випадкової величини X, яка визначає число безробітних серед цих 4 осіб.

183. Партія задекларованого товару, що нараховує 100 виробів, містить 4 вироби, які не відповідають стандартам. Митник вибирає з партії 1 виріб і перевіряє його якість. Якщо цей виріб не відповідає вимогам, то партія затримується і перевірка далі вже не проводиться. Якщо виріб відповідає вимогам, то митник для перевірки бере наступні вироби і т. п. Всього він перевіряє не більше 3 виробів. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа перевірених виробів.

184. В партії з 25 виробів, серед яких 5 бракованих, випадковим чином обрані 3 вироби для перевірки їхньої якості. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа бракованих виробів.

185. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	–2	0	1	2
P	0,2	a	0,3	0,1

Потрібно:

1) визначити параметр a;

2) побудувати функцію розподілу $F(x)$;

3) обчислити ймовірність попадання випадкової величини X на проміжок $[-1; 1{,}5)$.

186. Дискретна випадкова величина Y задана законом розподілу:

Y	–1	0	2	3
p	0,3	0,1	0,3	a

Потрібно:

1) визначити параметр a;

2) побудувати функцію розподілу $F(x)$;

3) обчислити ймовірність попадання випадкової величини Y на проміжок $[0{,}5; 4{,}2)$.

187. Дискретна випадкова величина Z задана законом розподілу:

Z	0	1	3	5
p	a	0,2	0,1	0,2

Потрібно:

1) визначити параметр a;

2) побудувати функцію розподілу $F(x)$;

3) обчислити ймовірність попадання випадкової величини Z на проміжок $[-2; 4)$.

188. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	1	2	4	6
p	0,1	0,4	a	0,2

Потрібно:

1) визначити параметр a;

2) побудувати функцію розподілу $F(x)$;

3) обчислити ймовірність попадання випадкової величини X на проміжок $[0; 3)$.

189. Ймовірнісний прогноз для величини X – процентного зростання вартості акцій відносно їх поточного курсу протягом 6 місяців – подано у вигляді закону розподілу:

X	5	10	15	20	25	30
p	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1

Знайти ймовірність того, що купівля акцій буде більш вигідна, ніж розміщення грошей на банківський депозит під 36% річних.

190. Із двох гармат по черзі ведеться стрільба по цілі до першого попадання однією з гармат. Ймовірність улучання в ціль першою гарматою дорівнює 0,3, а другою – 0,7. Починає стрілянину перша гармата. Скласти закони розподілу дискретних випадкових величин X та Y – числа витрачених снарядів відповідно першою і другою гарматами.

191. Два бомбардувальники по черзі скидають бомби на ціль до першого влучення. Ймовірність улучання в ціль першим бомбардувальником дорівнює 0,7, а другим – 0,8. Починає скидати бомби перший бомбардувальник. Скласти перші чотири члени закону розподілу дискретної випадкової величини X – числа скинутих бомб обома бомбардувальниками.

1.10. Дії над випадковими величинами

1. Множення на константу

Добутком випадкової величини X на сталу величину C називається випадкова величина $Y = C \cdot X$, всі значення якої дорівнюють значенням X, помноженим на C, з ймовірностями, рівними ймовірностям відповідних значень X.

2. Піднесення до степеня

***n*-м степенем** випадкової величини X називається випадкова величина $Y = X^n$, всі значення якої дорівнюють n-му степеню значень X, а відповідні ймовірності ті ж, що і у значень X.

3. Додавання випадкових величин

Дві дискретні випадкові величини X та Y називаються **незалежними**, якщо незалежні події $X = x_i$ та $Y = y_i$ при будь-яких можливих i та j. В іншому випадку величини називаються **залежними**.

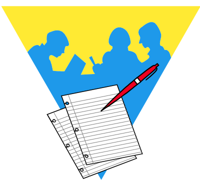
Сумою двох дискретних випадкових величин X та Y називається випадкова величина $Z = X + Y$, що приймає значення всіляких сум $x_i + y_i$ із ймовірностями, що дорівнюють $p_{ij} = p(X = x_i) \cdot p(Y = y_j)$ у випадку незалежних X та Y, та з ймовірностями $p_{ij} = p(X = x_i) \cdot p(Y = y_j / X = x_i)$ у випадку залежності.

4. Різниця випадкових величин

Різницею $X - Y$ двох випадкових величин X та Y називається сума двох випадкових величин X та $-Y$, тобто: $X - Y = X + (-Y)$.

5. Множення випадкових величин

Добутком двох випадкових величин називається випадкова величина $X \cdot Y$, що приймає значення будь-яких добутків $x_i \cdot y_j$ з ймовірностями $p_{ij} = p(X = x_i) \cdot p(Y = y_j)$ у випадку незалежних X та Y, та з ймовірностями $p_{ij} = p(X = x_i) \cdot p(Y = y_j / X = x_i)$ у випадку їх залежності.



ПРИКЛАДИ

192. Задані закони розподілу незалежних випадкових величин X та Z:

X	–1	1	2
P	0,4	0,3	0,3

Z	0	1
P	0,4	0,6

Знайти закони розподілу випадкових величин:

$$Y_1 = 2 \cdot X, Y_2 = X^2, Y_3 = X + Z, Y_4 = X \cdot Z, Y_5 = 2X - 4Z.$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Розглянемо $Y_1 = 2 \cdot X$

Знаходимо закон розподілу випадкової величини Y_1:

Y_1	$2 \cdot (-1)$	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$
P	0,4	0,3	0,3

Після обчислень отримуємо таблицю:

Y_1	–2	2	4
P	0,4	0,3	0,3

2) Розглянемо $Y_2 = X^2$.

Знаходимо закон розподілу випадкової величини Y_2:

Y_2	$(-1)^2$	1^2	2^2
P	0,4	0,3	0,3

Після обчислень отримуємо таблицю:

Y_2	1	1	4
P	0,4	0,3	0,3

Ми отримали однакові значення x_1^2 та x_2^2. Отже, подія $Y_2 = 1$ є сума несумісних подій: $X^2 = x_1^2 = (-1)^2$ та $X^2 = x_2^2 = 1^2$, тому $P(Y_2 = 1) = P(X^2 = (-1)^2) + P(X^2 = 1^2) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$.

Остаточно отримуємо закон розподілу випадкової величини Y_2:

Y_2	1	4
P	0,7	0,3

3) Розглянемо $Y_3 = X + Z$.

Знаходимо закон розподілу випадкової величини Y_3:

Y_3	–1 + 0	–1+1	1 + 0	1 + 1	2 + 0	2 + 1
P	$0{,}4 \cdot 0{,}4$	$0{,}4 \cdot 0{,}6$	$0{,}3 \cdot 0{,}4$	$0{,}3 \cdot 0{,}6$	$0{,}3 \cdot 0{,}4$	$0{,}3 \cdot 0{,}6$

Після обчислень і об'єднання однакових значень отримуємо таблицю:

Y_3	–1	0	1	2	3
P	0,16	0,24	0,12	0,30	0,18

Перевіримо правильність написання закону розподілу:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = 0,16 + 0,24 + 0,12 + 0,30 + 0,18 = 1$$

4) Знаходимо закон розподілу випадкової величини Y_4:

Y_4	$-1\cdot 0$	$-1\cdot 1$	$1\cdot 0$	$1\cdot 1$	$2\cdot 0$	$2\cdot 1$
P	$0,4\cdot 0,4$	$0,4\cdot 0,6$	$0,3\cdot 0,4$	$0,3\cdot 0,6$	$0,3\cdot 0,4$	$0,3\cdot 0,6$

Після обчислень і об'єднання однакових значень отримуємо таблицю:

Y_4	–1	0	1	2
P	0,24	0,40	0,18	0,18

Перевіримо правильність складеного закону розподілу:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 0,24 + 0,40 + 0,18 + 0,18 = 1.$$

5) Знаходимо закон розподілу випадкової величини $Y_5 = 2X - 4Z$.

Для цього спочатку знайдемо закони розподілу випадкових величин $2X$ та $4Z$:

$2X$	–2	2	4
P	0,4	0,3	0,3

$4Z$	0	4
P	0,4	0,6

Знаходимо закон розподілу випадкової величини Y_5:

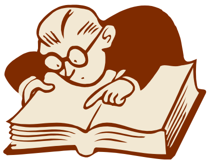
Y_5	–2– 0	–2– 4	2– 0	2– 4	4 – 0	4 – 4
P	$0,4\cdot 0,4$	$0,4\cdot 0,6$	$0,3\cdot 0,4$	$0,3\cdot 0,6$	$0,3\cdot 0,4$	$0,3\cdot 0,6$

Після об'єднання однакових значень і впорядкування по зростанню значень Y_5 отримуємо:

Y_5	–6	–2	0	2	4
P	0,24	0,34	0,18	0,12	0,12

Перевіримо правильність складеного закону розподілу:

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = 0.24 + 0.34 + 0.18 + 0.12 + 0.12 = 1.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

193. Задано закон розподілу випадкової величини X:

X	–2	–1	0	2
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Знайти закони розподілу випадкових величин $Y_1 = 3X$, $Y_2 = -4X$, $Y_3 = X^2$, $Y_4 = X^3$.

194. Задано закон розподілу випадкової величини X:

X	–1	0	1	2
P	0,3	0,2	0,3	0,2

Знайти закони розподілу випадкових величин $Y_1 = -3X$, $Y_2 = 5X$, $Y_3 = 2X^2$, $Y_4 = X^3$.

195. Задані закони розподілу незалежних випадкових величин X та Z:

X	–2	1
P	0,4	0,6

Z	–1	0	2
P	0,2	0,3	0,5

Знайти закони розподілу випадкових величин: $Y_1 = X + Z$ та $Y_2 = X \cdot Z$.

196. Задані закони розподілу незалежних випадкових величин X та Z:

X	–3	0	1
P	0.3	0,5	0,2

Z	–1	3
P	0,7	0,3

Знайти закони розподілу випадкових величин: $Y_1 = X + Z$ та $Y_2 = X \cdot Z$.

197. Задані закони розподілу незалежних випадкових величин X та Z:

X	–1	0
P	0,4	0,6

Z	1	2
P	0,3	0,7

Знайти закон розподілу випадкової величини: $Y = 2X + 3Z$.

198. Задані закони розподілу незалежних випадкових величин X та Z:

X	0	2
P	0,8	0,2

Z	–2	1
P	0,5	0,5

Знайти закон розподілу випадкової величини: $Y = 3X - 2Z$.

199. Задані закони розподілу незалежних випадкових величин X та Z:

X	1	2
P	0,5	0,5

Z	–1	0	1
P	0,2	0,5	0,3

Знайти закон розподілу випадкової величини: $Y = 2X^2 + Z^2$.

200. Задані закони розподілу незалежних випадкових величин X та Z:

X	–2	1	2
p	0,3	0,4	0,3

Z	–1	0
p	0,6	0,4

Знайти закон розподілу випадкової величини: $Y = X^2 - 3Z^2$.

1.11. Числові характеристики дискретної випадкової величини

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називається сума добутків її можливих значень на відповідні ймовірності, тобто:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n .$$

Властивості:

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій:

$$\mathrm{M}(c) = c .$$

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$\mathrm{M}(c \cdot X) = c \cdot \mathrm{M}(X).$$

3. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків:

$$\mathrm{M}(X + Y) = \mathrm{M}(X) + \mathrm{M}(Y).$$

4. Математичне сподівання різниці двох випадкових величин дорівнює різниці математичних сподівань доданків:

$$\mathrm{M}(X - Y) = \mathrm{M}(X) - \mathrm{M}(Y).$$

5. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних очікувань:

$$\mathrm{M}(X \cdot Y) = \mathrm{M}(X) \cdot \mathrm{M}(Y).$$

Дисперсією випадкової величини називається математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання:

$$\mathrm{D}(X) = \mathrm{M}[X - \mathrm{M}(X)]^2 .$$

Використовуючи визначення математичного сподівання для дискретної випадкової величини, отримуємо інше представлення:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - M(X)]^2 p_i .$$

Властивості:

1. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю:

$$D(c) = 0.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії в квадраті:

$$D(c \cdot X) = c^2 \cdot D(X).$$

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

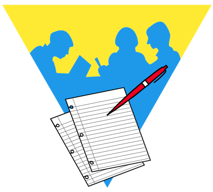
4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

5. Дисперсія випадкової величини дорівнює математичному сподіванню квадрату цієї випадкової величини без квадрату її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини називається квадратний корінь з дисперсії: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.



ПРИКЛАДИ

201. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, яка задана законом розподілу:

X	–2	0	1
P	0,2	0,3	0,5

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Обчислимо математичне сподівання за формулою:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i \cdot p_i = -2 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}1.$$

Для обчислення дисперсії скористаємося властивістю:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Обчислюємо:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot p_i = (-2)^2 \cdot 0{,}2 + 0^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}5 = 4 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 = 1{,}3.$$

Тоді: $D(X) = 1{,}3 - (0{,}1)^2 = 1{,}3 - 0{,}01 = 1{,}29$.

Середнє квадратичне відхилення обчислюємо за формулою:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

В даному випадку: $\sigma(X)=\sqrt{1{,}29}=1{,}136$.

Відповідь: $\mathrm{M}(X)=0{,}1$; $\mathrm{D}(X)=1{,}29$; $\sigma(X)=1{,}136$.

202. Дано закон розподілу випадкової величини *X*:

X	1	2	4
p	0,2	a	b

Знайти *a* і *b*, якщо $M(X)=2{,}8$.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

За визначенням $\mathrm{M}(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. В даному випадку $M(X)=1\cdot 0.2+2\cdot a+4\cdot b=2.8$, тобто: 2*a* + 4*b* = 2,6 чи *a* + 2*b* = 1,3.

Отримали рівняння, що зв’язує невідомі *a* і *b*. Друге рівняння отримуємо, використовуючи властивість $\sum_{i=1}^{n} p_i=1$.

В даному випадку 0,2 + *a* + *b* = 1, тобто: *a* + *b* = 0,8.

Об’єднаємо отримані рівняння в систему:

$$\begin{cases} a+2b=1{,}3 \\ a+\ \ b=0{,}8 \end{cases}.$$

Розв’язав систему, отримаємо: *a* = 0,3; *b* = 0,5.

203. Два стрілка стріляють кожний по своїй мішені, роблячи незалежно один від одного по одному пострілу. Ймовірність попадання для першого стрільця дорівнює 0,8, для другого – 0,7. Розглядаються дві випадкові величини: *X* – число влучень першого стрілка; *Z* – число попадання другого стрілка.

Знайти закон розподілу випадкової величини *Y* = *X* – *Z*. Обчислити $M(Y), D(Y)$.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Випадкова величина *X* може приймати два значення: 0 (влучень у мішень немає) та 1 (є влучення в мішень). За умовою задачі ймовірність попадання в мішень для першого стрілка дорівнює 0,8. Отже, ймовірність промаху дорівнює 0,2. Таким чином, випадкова величина *X* має наступний закон розподілу:

X	0	1
P	0,2	0,8

Аналогічно випадкова величина Z може приймати два значення 0 та 1 з ймовірністю 0,3 і 0,7.

Випадкова величина Z має наступний закон розподілу:

Z	0	1
P	0,3	0,7

Знаходимо закон розподілу випадкової величини $Y = X - Z$:

Y	$0-0$	$0-1$	$1-0$	$1-1$
P	$0{,}2\cdot 0{,}3$	$0{,}2\cdot 0{,}7$	$0{,}8\cdot 0{,}3$	$0{,}8\cdot 0{,}7$

Після обчислень та об'єднання однакових значень отримуємо:

Y	-1	0	1
P	0,14	0,62	0,24

Контроль обчислень: $\sum\limits_{i=1}^{3} p_i = 0{,}14 + 0{,}62 + 0{,}24 = 1.$

Математичне сподівання $M(Y)$ та дисперсію $D(Y)$ можна обчислювати двома способами:

1) по закону розподілу випадкової величини Y обчислюємо $M(Y)$ за формулою: $M(Y) = \sum\limits_{i=1}^{3} y_i \mathrm{p}_i$.

У даному випадку: $M(Y) = -1\cdot 0{,}14 + 0\cdot 0{,}62 + 1\cdot 0{,}24 = 0{,}1.$

Для обчислення дисперсії $D(Y)$ знаходимо $M(Y^2)$:

$$M(Y^2) = (-1)^2\cdot 0{,}14 + 0^2\cdot 0{,}62 + 1^2\cdot 0{,}24 = 0{,}38,$$

$$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2 = 0{,}38 - (0{,}1)^2 = 0{,}37;$$

2) розглядаємо випадкову величину $Y = X - Z$, де X і Z незалежні випадкові величини. Обчислюємо $M(X), D(X), M(Z), D(Z)$:

$$M(X) = 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}8 = 0{,}8;$$

$$M(X^2) = 0^2\cdot 0{,}2 + 1^2\cdot 0{,}8 = 0{,}8;$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0{,}8 - 0{,}64 = 0{,}16;$$

$$M(Z) = 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}7 = 0{,}7;$$

$$M(Z^2) = 0^2\cdot 0{,}3 + 1^2\cdot 0{,}7 = 0{,}7;$$

$$D(Z) = M(Z^2) - [M(Z)]^2 = 0{,}7 - 0{,}49 = 0{,}21.$$

За властивостями математичного сподівання та дисперсії маємо:

$$M(Y) = M(X - Z) = M(X) - M(Z) = 0{,}8 - 0{,}7 = 0{,}1;$$

$$D(Y) = D(X - Z) = D(X) + D(Z) = 0{,}16 + 0{,}21 = 0{,}37\,.$$

204. Математичне сподівання випадкової величини X дорівнює 1, дисперсія дорівнює 5. Обчислити математичне сподівання та дисперсію випадкових величин:

а) $X+3$; б) $6X$; в) $4X+1$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

а) При обчисленні використовуємо властивості математичного сподівання та дисперсії: $M(X+Z)=M(X)+M(Z)$; $M(C)=C$; $D(X+Z)=D(X)+D(Z)$ для незалежних доданків: $D(C)=0$. Тоді:

$$M(X+3)=M(X)+M(3)=1+3=4;$$

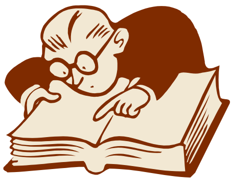
$$D(X+3)=D(X)+D(3)=5+0=5.$$

б) Використаємо властивості: $M(c\cdot X)=c\cdot M(X)$; $D(c\cdot X)=c^2\cdot D(X)$. Отримаєм: $M(6\cdot X)=6\cdot M(X)=6$; $D(6\cdot X)=6^2\cdot D(X)=36\cdot 5=210$.

в) Використовуючи перераховані вище властивості, отримаєм:

$$M(4X+1)=M(4X)+M(1)=4M(X)+1=4\cdot 1+1=5;$$

$$D(4X+1)=D(4X)+D(1)=4^2\cdot D(X)=16\cdot 5=80.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

205. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, заданої законом розподілення:

X	–3	–1	1
P	0,4	0,3	0,3

206. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, заданої законом розподілення:

X	–2	0	1	2
P	0,2	0,1	0,3	0,4

207. Знайти параметр a, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, заданої законом розподілу:

X	0	1	3	4
P	0,1	0,3	a	0,4

208. Знайти параметр c, математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, заданої законом розподілу:

X	0	0,5	1	2
P	0,3	c	0,2	0,3

209. Задано закон розподілу випадкової величини X:

X	–2	–1	1
P	a	0,4	b

Знайти a та b, якщо $M(X) = -0{,}7$.

210. Задано закон розподілу випадкової величини X:

X	–1	0	1	2
P	0,3	a	0,2	b

Знайти a та b, якщо $M(X) = 0{,}5$.

211. Нехай щоденні витрати на обслуговування та рекламу автомобілів в деякому автосалоні складають 800 гривень, а число продажів X автомобілів протягом дня має наступний закон розподілу:

X	0	1	2	3	4	5
P	0,5	0,3	0,1	0,05	0,03	0,02

Знайти середній щоденний прибуток салону, якщо продаж одного автомобіля приносить прибуток 2000 гривень.

212. Дмитро запропонував Олексію гру за наступними правилами: «Візьми з колоди карт навмання 1 карту і відклади в сторону. Після цього візьми навмання з колоди ще одну карту. Якщо у взятих тобою карт збігається масть, то я даю тобі 2 гривні, якщо збігається старшинство – 3 гривні. В іншому випадку ти даєш мені 1 гривню». Чи варто Олексію погоджуватися на ці умови гри? Розглянути випадки, коли колода містить:

а) 36 карт;

б) 52 карти.

213. Інвестор має 10 000 доларів для купівлі акцій або хімічної компанії, або пивоварної. Його брокер привів йому наступні дані про ймовірну віддачу грошей в наступні 12 місяців:

Ймовірний річний прибуток	–2000	–1000	0	1000	2000	3000	4000
Хімічна компанія	0,05	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,05
Пивоварна компанія	0,03	0,05	0,2	0,3	0,2	0,2	0,02

Яке вкладення грошей більш прибуткове? Яке вкладення грошей менш ризиковане?

214. Розглядаються дві операції, прибутки яких є випадковими величинами X та Y:

X	–5	0	5	10
P	0.1	0,2	0,5	0,2

Y	–5	0	5	10
P	0,2	0,2	0,2	0,4

Яка з операцій більш прибуткова? Яка з операцій менше ризикована?

215. В XIX столітті на північноамериканському Далекому Заході грали в гру «Спробувати щастя». Бармен пропонував нудьгуючому відвідувачу поставити долар і назвати одне з чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. «Зараз ти кидаєш три гральні кості, – продовжував він. – Якщо на одній з них випаде назване тобою число, то забирай свій долар і ще один мій на додачу. Якщо це число випаде на двох кістках, то я до твого долара доплачу ще 2. А якщо на всіх трьох, то я даю 3 долари ». Кому вигідна ця гра?

216. Банк видав кредит 100 тис. гривень на рік під заставу житлового будинку під 8% річних (сам будинок був оцінений саме в 100 тис. гривень). Для зменшення ризику банк придбав страховий поліс на 100 тис. гривень на цей будинок, заплативши 3% від страхової суми. В страховій компанії ймовірність згоріти будинку такого типу за рік оцінюють в 0,01 (в цьому випадку позичальник не поверне банку нічого). Знайти середній прибуток банку.

217. Команда складається з двох стрільців. Число очок, що вибивається кожним із них при одному пострілі, є випадковими величинами X та Z, які задаються наступними законами розподілу:

X	3	4	5
P	0,3	0,4	0,3

Z	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

Результати стрільби одного стрілка не впливають на результат іншого. Скласти закон розподілу випадкової величини Y – числа очок, що вибиваються командою, якщо стрілки зроблять по одному пострілу. Обчислити $M(Y)$, $D(Y)$.

218. Відомо, що $M(X) = 3$; $D(X) = 1$. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкових величин:

а) $X - 2$; б) $5X$; в) $3 - 6X$.

219. Відомо, що $M(X) = -1$; $D(X) = 2$. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкових величин:

а) $X + 4$; б) $2X$; в) $7 + 3X$.

1.12. *Основні закони розподілу дискретної випадкової величини*

Біноміальний закон розподілу

Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, в кожному з яких може з'явитися подія A. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні стала і не залежить від результатів інших випробувань. Нехай ця ймовірність дорівнює p.

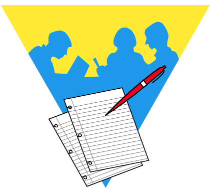
Розглянемо випадкову величину X – число появ події A в серії з n випробувань. Очевидно, що X може приймати всі цілі значення від нуля до n. Ймовірність цих можливих значень можна обчислити за формулою Бернуллі: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

Таким чином, закон розподілу випадкової величини X задається таблицею:

X	0		1	2	…	k	…	n
p	q^n		$C_n^1 \cdot p \cdot q^{n-1}$	$C_n^2 \cdot p^2 \cdot q^{n-2}$	…	$C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$	…	p^n

Отриманий закон називається ***біноміальним***.

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини X, розподіленої за біноміальним законом, обчислюються за наступними формулами: $M(X) = n \cdot p$; $D(X) = n \cdot p \cdot q$.



ПРИКЛАДИ

220. Проводиться три незалежних випробування, в кожному з яких подія A з'являється з ймовірністю 0,4. Розглядається випадкова величина X –число появ події A в трьох випробуваннях. Побудувати закон розподілу випадкової величини X. Знайти її математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Випадкова величина X може набувати 4 значення: 0, 1, 2, 3. Так як досліди незалежні і в кожному досліді подія A з'являється з однією і тією ж ймовірністю $p = 0{,}4$, то випадкова величина X підпорядковується біноміальному закону розподілу. Обчислюємо ймовірності кожного з можливих значень випадкової величини за формулою Бернуллі. В даному випадку: $n = 3$; $q = 1 - p = 0{,}6$.

$$P(X = 0) = q^3 = (0{,}6)^3 = 0{,}216.$$

$$P(X = 1) = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^2 = 3 \cdot 0{,}4 \cdot (0{,}6)^2 = 0{,}432.$$

$$P(X=2)=C_3^2\cdot p^2\cdot q^1=3\cdot(0{,}4)^2\cdot 0{,}6=0{,}288.$$
$$P(X=3)=p^3=(0{,}4)^3=0{,}064.$$

Отже, закон розподілу випадкової величини задається таблицею:

X	0	1	2	3
p	0,216	0,432	0,288	0,064

Математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X можна обчислити двома способами:

1. Обчислюємо математичне сподівання, використовуючи визначення: $M(X)=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot p_i=0\cdot 0{,}216+1\cdot 0{,}432+2\cdot 0{,}288+3\cdot 0{,}064=1{,}2$.

Дисперсію обчислюємо, використовуючи властивість:

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2.$$
$$M(X^2)=0^2\cdot 0{,}216+1^2\cdot 0{,}432+2^2\cdot 0{,}288+3^2\cdot 0{,}064=2{,}16.$$
$$D(X)=2{,}16-(1{,}2)^2=2{,}16-1{,}44=0{,}72.$$

2. Математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X, розподіленої за біноміальним законом, обчислюємо за формулами:

$$M(X)=n\cdot p=3\cdot 0{,}4=1{,}2;\quad D(X)=n\cdot p\cdot q=3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}72.$$

Середнє квадратичне відхилення обчислюємо за формулою:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}72}=0{,}85.$$

Відповідь: $M(X)=1{,}2$; $D(X)=0{,}72$; $\sigma(X)=0{,}85$

221. Відбувається 100 незалежних досліджень, в кожному з яких подія A з'являється з ймовірністю 0,4. Випадкова величина X – число появ події A. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

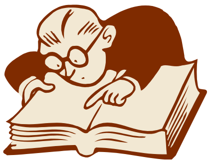
Випадкова величина X підпорядковується біноміальному закону розподілу. Так як випадкова величина X приймає 101 значення, обчислення $M(X)$ і $D(X)$ з використанням визначення математичного сподівання та дисперсії на практиці виконати важко.

Обчислимо $M(X)$ та $D(X)$, використовуючи формули:

$$M(X)=n\cdot p;\qquad D(X)=n\cdot p\cdot q.$$

Отримуємо:

$$M(X)=n\cdot p=100\cdot 0{,}4=40;$$
$$D(X)=n\cdot p\cdot q=100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=24,$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{24};\ \sigma(X)=4{,}9.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

222. В магазин увійшли 4 покупці. Ймовірність здійснити покупку для кожного покупця одна й та ж і дорівнює 0,3. Випадкова величина X – кількість покупців, що зробили покупку. Побудувати закон розподілу випадкової величини X. Знайти $M(X)$, $D(X)$.

223. Ймовірність підписання угоди в результаті ділових переговорів дорівнює 0,7. Випадкова величина X – число підписаних угод після 3 ділових зустрічей. Знайти закон розподілу випадкової величини X, $M(X)$, $\sigma(X)$.

224. Ймовірність прийому на роботу кожного з 5 претендентів дорівнює 0,3. Випадкова величина X – число претендентів, прийнятих на роботу. Знайти закон розподілу випадкової величини X, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

225. Банк видає 5 кредитів. Ймовірність неповернення кредиту дорівнює 0,2 для кожного з позичальників. Скласти закон розподілу кількості позичальників, які не повернули кредит після закінчення терміну кредитування. Знайти середнє число неповернутих кредитів.

226. Проводиться 60 пострілів по мішені. Ймовірність попадання при кожному пострілі дорівнює 0,8. Випадкова величина X – число влучень. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

227. Монета підкидається 30 разів. Випадкова величина X – кількість гербів, що випали. Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

228. Банк видав позики 1000 різним позичальникам в розмірі 10 000 гривень кожному під ставку позикового відсотка $r = 30\%$. Знайти очікуваний прибуток банку, якщо ймовірність повернення позики кожним позичальником дорівнює 0,9.

229. Компанія розглядає проект будівництва чотирьох будинків у різних місцях. Кошти для будівництва дають самі майбутні мешканці. Ймовірність набрати необхідні кошти для будівництва будинку оцінюються у 0,8 (власне, йдеться про агітацію майбутніх мешканців). Кожен побудований будинок окупає $^1\!/_3$ всіх витрат компанії за проектом. Знайти очікуваний прибуток компанії.

Закон Пуассона Дискретна випадкова величина X розподілена за законом Пуассона з параметром $\lambda > 0$, якщо її можливі значення дорівнюють 0; 1; 2; ...; k ..., а відповідні ймовірності обчислюються за формулою:

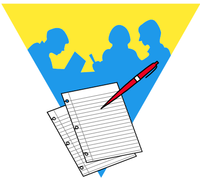
$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Характерною особливістю розподілу Пуассона є збіг математичного сподівання та дисперсії, причому:

$$M(X) = D(X) = \lambda.$$

Розподіл Пуассона є граничним для біноміального розподілу, якщо кількість випробувань n велика, а ймовірність p появи події в кожному випробуванні дуже мала (в цьому випадку $\lambda = np$). Значення ймовірностей наведені в Додатку 1.

Типовими прикладами випадкової величини, що має розподіл Пуассона, є: кількість викликів на телефонній станції за деякий час t; кількість відмов складної апаратури за час t, якщо відомо, що відмови незалежні одна від одної і в середньому на одиницю часу доводиться λ відмов тощо.



ПРИКЛАДИ

230. На телефонну станцію протягом певної години дня надходить в середньому 30 викликів. Знайти ймовірність того, що протягом хвилини надходить не більше двох викликів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Математичне сподівання кількості викликів за хвилину дорівнює: $\lambda = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$. Ймовірність того, що протягом цієї хвилини надійде не більше двох викликів, дорівнює сумі ймовірностей того, що протягом цієї хвилини буде або 0, або 1, або 2 виклика. Тому шукана ймовірність:

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = F(0;0,5) + F(1;0,5) + F(2;0,5) =$$
$$= 0,6065 + 0,3033 + 0,0758 = 0,9856.$$

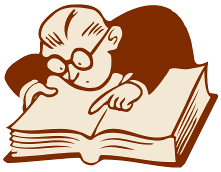
Відповідь: 0,9856.

231. Випадкова величина X має розподіл Пуассона. Знайти $P(X = 2)$, якщо: $2M(X) + 3D(X) = 15$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Для випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, $M(X) = D(X) = \lambda$. За умовою $2M(X)+3D(X) = 15$. Підставляючи $M(X)=D(X) = \lambda$, отримаємо $5\lambda = 15$, тобто $\lambda = 3$. Необхідну ймовірність $P(X=2)$ знайдемо за таблицею (див. Додаток 1) при $\lambda = 3$, $k = 2$:

$$P(x = 2) = 0,2240$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

232. Відомо, що кількість вантажівок, які прибувають на склад для розвантаження протягом години, підкоряється закону Пуассона, і їх середнє число дорівнює 3. Знайти ймовірність того, що протягом години під розвантаження прийде більше 4 машин.

233. Знайти середнє число бракованих виробів у партії виробів, якщо ймовірність того, що в цій партії міститься хоча б 1 бракований виріб, дорівнює 0,95. Передбачається, що кількість бракованих виробів розподілена за законом Пуассона.

234. У середньому за місяць бухгалтерія компанії використовує 4 коробки дискет. Припускаючи, що потреба в дискетах підпорядковується розподілу Пуассона, знайти мінімальне число коробок дискет, які бухгалтерія повинна замовляти до початку чергового місяця, таке, щоб ймовірність перевитрат не перевищувала 4%.

235. Страхова компанія за страховку будови від пожежі бере плату, що дорівнює 1,5% від суми, на яку вона застрахована. Було застраховано 1000 дачних будиночків на 4000 гривень кожен. Ймовірність згоріти протягом року для кожної дачі оцінюється в 0,01. Знайти: 1) очікуваний прибуток страхової компанії; 2) ймовірність отримати прибуток в 2 рази більше очікуваного; 3) ймовірність отримати прибуток в 3 рази менше очікуваного; 4) ймовірність зазнати збитків.

236. Серед 100-доларових купюр 1% фальшивих, зроблених настільки майстерно, що працівниця обмінного пункту десяту частину їх приймає за справжні. У день приймається приблизно 200 100-доларових купюр. а) Яка ймовірність того, що серед них є хоча б одна фальшива? б) За скільки днів роботи виправдає себе визначник фальшивих купюр, що коштує 90 дол. (він знаходить всі фальшиві купюри)?

237. Компанія має устаткування для виробництва болтів. Протягом години з ладу виходять в середньому 2 верстати. Для усунення неполадок на заводі працює спеціальний інженер. Але йому доводиться викликати асистента, якщо відбувається більше двох поломок на годину. Як часто в середньому буде потрібна допомога асистента протягом 40 годин робочого тижня?

238. Випадкова величина X має розподіл Пуассона. Знайти $P(X = 3)$, якщо $3M(X) + 2D(X) = 10$.

239. Випадкова величина X має розподіл Пуассона. Знайти $P(X = 4)$, якщо $4M(X) - D(X) = 3$.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Визначити, чи будуть дискретними наступні випадкові величини:

а) кількість вибитих очок при стрільбі по мішені;

б) відстань від точки влучення кулі до центру мішені;

в) кількість покупців, що зробили покупку в цьому магазині протягом дня.

2. Що характеризує математичне сподівання?

3. Що характеризує дисперсія випадкової величини?

4. Що більше: квадрат середнього значення випадкової величини або середнє значення квадрату випадкової величини?

5. Відомо, що середнє значення випадкової величини дорівнює 1, а дисперсія дорівнює 2. Чи може ця випадкова величина мати розподіл Пуассона?

6. Чому закон Пуассона називають законом масових рідкісних явищ?

7. Чи може для якої-небудь випадкової величини X виконуватися умови:

а) $M(X) = -2$;

б) $D(X) = -1$;

в) $\sigma(X) = 0$;

г) $M(X) = \sigma(X)$;

д) $D(X) = \sigma(X)$;

е) $\sigma(X) > D(X)$;

ж) $M(X^2) = -5$?

1.13. Неперервна випадкова величина. Функція розподілу. Щільність розподілу

Випадкова величина X називається ***неперервною***, якщо її функція розподілу неперервна на всій числової осі та диференційована скрізь, за винятком, можливо, скінченного числа точок. Можливі значення неперервної випадкової величини неперервно заповнюють якийсь проміжок.

Для неперервної випадкової величини X, так само як і для дискретної випадкової величини, визначається функція розподілу $F(x)$:

$$F(x)=P(X < x).$$

Властивості функції розподілу:

1. $0 \le F(x) \le 1$ при всіх значеннях x
2. Якщо $b > a$, то $F(b) \ge F(a)$.
3. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$, де $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.
4. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде значення, що дорівнюватиме даному фіксованому числу, дорівнює нулю, тобто:
$$\mathrm{P}(X = x_0) = 0.$$
5. Ймовірність попадання на проміжок визначається формулою:
$$P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

Щільністю розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини називається перша похідна від функції розподілу, тобто: $f(x) = F'(x)$.

Функцію розподілу $F(x)$ називають ***інтегральною функцією*** розподілу, щільність розподілу $f(x)$ – ***диференціальної функцією*** розподілу. Графік функції $f(x)$ називається ***кривою розподілу***.

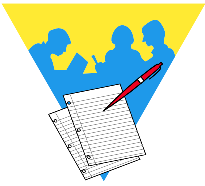
Властивості щільності розподілу:

1. Щільність розподілу невід'ємна, тобто: $f(x) \ge 0$ при всіх x.
2. Функція розподілу $F(x)$ виражається через щільність розподілу $f(x)$ формулою: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.
3. Ймовірність попадання випадкової величини X на інтервал (a, b) визначається за формулою: $\mathrm{P}(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Зокрема, якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a,b), то ця властивість запишеться у наступному вигляді:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$



ПРИКЛАДИ

240. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 1, \\ a(x-1)^2, & \text{якщо} \quad 1 < x \le 2, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 2. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметр a; 2) щільність розподілу $f(x)$;

3) ймовірність попадання випадкової величини на проміжок [1,5; 2,5].

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Функція розподілу неперервної випадкової величини повинна бути функцією неперервною. Вибираємо параметр a так, щоб в точках $x = 1$ та $x = 2$ функція $F(x)$ була неперервною (у всіх інших точках числової осі $F(x)$ неперервна). Функція $F(x)$ неперервна в точці x_0, якщо:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} F(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Розглянемо точку $x = 1$. Умова неперервності функції в точці $x = 1$ дає рівність: $a \cdot (1-1)^2 = 0$, що виконується при всіх a. Розглянемо точку $x = 2$. Умова неперервності функції $F(x)$ у точці $x = 2$ дає рівність: $a \cdot (2-1)^2 = 1$. Звідси отримуємо, $a = 1$.

Таким чином, $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 1, \\ (x-1)^2, & \text{якщо} \quad 1 < x \le 2, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 2. \end{cases}$

2) Щільність розподілу $f(x)$ дорівнює похідній від функції розподілу, тобто:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le 1,\\ 2(x-1), & \text{якщо} \quad 1<x<2,\\ 0, & \text{якщо} \quad x>2. \end{cases}$$

Зауважимо, що при $x = 2$ похідна $F'(x)$ не існує.

3) Ймовірність попадання випадкової величини на проміжок [1,5; 2,5] знаходимо, використовуючи властивість функції розподілу:

$$\mathrm{P}(a \le X \le b) = F(b) - F(a).$$

У даному випадку $a=1{,}5$; $b=2{,}5$. Тому

$\mathrm{P}(1{,}5 \le X \le 2{,}5) = F(2{,}5) - F(1{,}5) = 1 - (1{,}5 - 1)^2 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$

Відповідь: 1) a=1; 2) $f(x)=\begin{cases} 2(x-1), & \text{якщо} \quad x\in(1;\,2),\\ 0, & \text{якщо} \quad x\notin(1;\,2). \end{cases}$;

3) $\mathrm{P}(1{,}5 \le X \le 2{,}5) = 0{,}75.$

241. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le 0,\\ x^2, & \text{якщо} \quad 0<x\le 1,\\ 1, & \text{якщо} \quad x>1. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань величина X три рази набуде значення з інтервалу (0,25; 0,75).

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Знайдемо ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу (0,25; 0,75) при одному випробуванні. За властивістю функції розподілу:

$p = P\,(0{,}25 < X < 0{,}75) = F\,(0{,}75) - F\,(0{,}25) = (0{,}75)^2 - (0{,}25)^2 = 0{,}5.$

Ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань величина X рівно три рази прийме значення з інтервалу (0,25; 0,75), знаходимо по формулі Бернуллі:

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 4\cdot(0{,}5)^3\cdot 0{,}5 = 0{,}25.$$

Відповідь: 0,25.

242. Дана щільність розподілу неперервної випадкової величини:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le 0,\\ ax^2, & \text{якщо} \quad 0<x\le 1,\\ 0, & \text{якщо} \quad x>1. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметр a;

2) функцію розподілу $F(x)$;

3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал $(-0,5;\ 0,5)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Щільність розподілу $f(x)$ повинна задовольняти умові: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. У даному випадку всі можливі значення випадкової величини належать проміжку (0; 1], тому ця властивість запишеться у вигляді $\int\limits_{0}^{1} f(x)dx = 1$, тобто: $\int\limits_{0}^{1} ax^2 dx = 1$. Обчислюємо інтеграл:

$\int\limits_{0}^{1} ax^2 dx = a\cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = a\cdot\left(\frac{1^3}{3} - 0\right) = 1$, звідки: $\frac{a}{3} = 1$, тобто: $a = 3$.

Таким чином, $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0, \\ 3x^2, & \text{якщо} \quad 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$

2) Для знаходження функції розподілу $F(x)$ скористаємося формулою: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$. Функція $f(x)$ задається трьома виразами на трьох інтервалах. Розглянемо по черзі ці інтервали.

Нехай $x \le 0$. Тоді $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$.

Нехай $0 < x \le 1$. Тоді: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{x} f(x)\,dx =$

$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int\limits_{0}^{x} 3x^2\ dx = 0 + 3\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^x = x^3.$

Нехай $x > 1$. Тоді $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dx + \int\limits_{1}^{x} f(x)\,dx =$

$= \int\limits_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int\limits_{0}^{1} 3x^2\ dx + \int\limits_{1}^{x} 0\cdot dx = 0 + 3\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 + 0 = 1.$

Таким чином, $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0, \\ x^3, & \text{якщо} \quad 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$

3) Ймовірність попадання випадкової величини X на інтервал $(-0{,}5;0{,}5)$ можна обчислити двома способами:

I. Скористаємося властивістю функції розподілу:

$$\mathrm{P}(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

В даному випадку отримаємо:

$$\mathrm{P}(-0{,}5 < X < 0{,}5) = F(0{,}5) - F(-0{,}5) = (0{,}5)^3 - 0 = 0{,}125.$$

II. Скористаємося властивістю щільності розподілу:

$$\mathrm{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

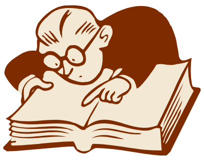
В даному випадку отримаємо:

$$\mathrm{P}(-0{,}5 < X < 0{,}5) = \int_{-0{,}5}^{0{,}5} f(x)dx = \int_{-0{,}5}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{0{,}5} f(x)dx =$$

$$= \int_{-0{,}5}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{0{,}5} 3x^2 dx = x^3\Big|_0^{0{,}5} = 0{,}125$$

Відповідь: 1) $a = 3$; 2) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0, \\ x^3, & \text{якщо} \quad 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$

3) $P(-0{,}5 < X < 0{,}5) = 0{,}125.$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

243. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 2, \\ a(x-2)^2, & \text{якщо} \quad 2 < x \le 4, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 4. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметр a; 2) щільність розподілу $f(x)$;
3) ймовірність попадання випадкової величини на проміжок [1, 3].

244. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0, \\ k\,x, & \text{якщо} \quad 0 < x \le 2, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 2. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметр k; 2) щільність розподілу $f(x)$;

3) ймовірність попадання випадкової величини на проміжок $[1, 4)$.

245. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le -1, \\ k(x+1), & \text{якщо} \quad -1 < x \le 2, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 2. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметр k; 2) щільність розподілу $f(x)$;
3) ймовірність попадання випадкової величини на проміжок $[0, 1]$.

246. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ a(1-\cos 2x), & \text{якщо} \quad 0 \le x \le \pi/2, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметр a; 2) щільність розподілу $f(x)$;
3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$

247. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 1, \\ (ax+b), & \text{якщо} \quad 1 < x \le 2, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 2. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметри a і b; 2) щільність розподілу $f(x)$;
3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал $[0{,}5;\ 1{,}5)$.

248. Неперервна випадкова величина задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ (ax^2+b), & \text{якщо} \quad 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметри a і b; 2) щільність розподілу $f(x)$;
3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал $(0{,}5;\ 4)$.

249. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 1, \\ (x-1), & \text{якщо} \quad x < x \le 2, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 2. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті п'яти незалежних випробувань величина X рівно два рази прийме значення з проміжку [1,5; 2,5].

250. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le -1, \\ (x+1)^2, & \text{якщо} \quad -1<x\le 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad x>0. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті трьох незалежних випробувань величина X два рази набуде значення з інтервалу (–0,5; 1).

251. Дана щільність розподілу неперервної випадкової величини:

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2} \quad (-\infty<x<\infty).$$

Знайти: 1) параметр a; 2) функцію розподілу $F(x)$;

3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

252. Дана щільність розподілу неперервної випадкової величини:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le 0, \\ a\cdot\cos x, & \text{якщо} \quad 0<x\le \pi/2, \\ 0, & \text{якщо} \quad x>\pi/2. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметр a; 2) функцію розподілу $F(x)$;

3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$.

253. Дана щільність розподілу неперервної випадкової величини:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le 0, \\ a\cdot\sin x, & \text{якщо} \quad 0<x\le \pi/2, \\ 0, & \text{якщо} \quad x>\pi/2. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметр a; 2) функцію розподілу $F(x)$;

3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right)$.

254. Дана щільність розподілу неперервної випадкової величини:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le 1, \\ x+a, & \text{якщо} \quad 1<x\le 2, \\ 0, & \text{якщо} \quad x>2. \end{cases}$$

Знайти: 1) параметр a; 2) функцію розподілу $F(x)$;

3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал (1,5; 2,5).

255. Дана щільність розподілу неперервної випадкової величини:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le 1,\\ ax, & \text{якщо} \quad 1<x\le 2,\\ 0, & \text{якщо} \quad x>2.\end{cases}$$

Знайти: 1) параметр a; 2) функцію розподілу $F(x)$;

3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал (0; 1,5).

256. Дана щільність розподілу неперервної випадкової величини:

$$f(x)=a\cdot e^{-|x|} \ (-\infty<x<\infty).$$

Знайти: 1) параметр a; 2) функцію розподілу $F(x)$;

3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал (–1; 0).

1.14. Числові характеристики неперервної випадкової величини

Математичне сподівання неперервної випадкової величини, заданої на інтервалі $(-\infty,\infty)$, обчислюється за формулою:

$$\mathrm{M}(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx.$$

Якщо ж всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то:

$$\mathrm{M}(X)=\int_{a}^{b} x\cdot f(x)\,dx.$$

Дисперсією неперервної випадкової величини називається математичне сподівання квадрату відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання:

$$D(X)=M(X-M(X))^2.$$

Якщо випадкова величина задана на інтервалі ($-\infty$, ∞), то:

$$\mathrm{D}(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-\mathrm{M}(X)]^2 f(x)\,dx.$$

Якщо ж можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то:

$$\mathrm{D}(X)=\int_a^b [x-\mathrm{M}(X)]^2 f(x)\,dx.$$

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює цій сталій:

$$M(c) = c.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання: $M(c \cdot X) = c \cdot M(X)$.

3. Математичне сподівання суми (різниці) двох випадкових величин дорівнює сумі (різниці) математичних сподівань доданків:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y), \qquad M(X - Y) = M(X) - M(Y).$$

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

Властивості дисперсії

1. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю: $D(c) = 0$.

2. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії в квадраті:

$$D(c \cdot X) = c^2 \cdot D(X).$$

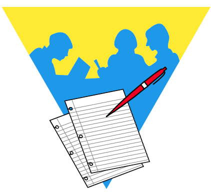
3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій: $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

5. Дисперсія випадкової величини дорівнює математичному сподіванню квадрату цієї випадкової величини без квадрата її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Середнім квадратичним відхиленням неперервної випадкової величини називається квадратний корінь з дисперсії: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{D}(X)}$.



ПРИКЛАД

257. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка задана своєї щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le 0, \\ \dfrac{1}{2}x, & \text{якщо} \quad 0<x\le 2, \\ 0, & \text{якщо} \quad x>2. \end{cases}$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Всі можливі значення випадкової величини належать проміжку (0, 2], тому для обчислення математичного сподівання використовуємо формулу:

$$\mathrm{M}(X)=\int_a^b x\cdot f(x)\,dx.$$

У даному випадку:

$$\mathrm{M}(X)=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^2 x^2\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2=\frac{4}{3}.$$

Для обчислення дисперсії обчислюємо $\mathrm{M}(X^2)$:

$$\mathrm{M}(X^2)=\int_a^b x^2\cdot f(x)\,dx=\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_0^2=2.$$

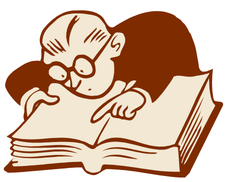
Дисперсію обчислюємо за формулою з властивості 5 для дисперсії:

$$\mathrm{D}(X)=\mathrm{M}(X^2)-[M(X)]^2=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{9}.$$

Середнє квадратичне відхилення обчислюємо за формулою:

$$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{D}(X)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}=0{,}47.$$

Відповідь: $\mathrm{M}(X)=\dfrac{4}{3}$, $\mathrm{D}(X)=\dfrac{2}{9}$, $\sigma(X)=0{,}47$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

258. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка задана своєю щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le 0, \\ 2x, & \text{якщо} \quad 0<x<1, \\ 0, & \text{якщо} \quad x\ge 1. \end{cases}$$

259. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка задана своєю щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x<0, \\ \sin x, & \text{якщо} \quad 0\le x\le \pi/2, \\ 0, & \text{якщо} \quad x>\pi/2. \end{cases}$$

260. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка задана своєю щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x<0, \\ \cos x, & \text{якщо} \quad 0\le x\le \pi/2, \\ 0, & \text{якщо} \quad x>\pi/2. \end{cases}$$

261. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка задана своєю щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x<0, \\ 3x^2, & \text{якщо} \quad 0\le x\le 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad x>1. \end{cases}$$

262. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка задана своєю щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x<1, \\ \frac{1}{4}x, & \text{якщо} \quad 1\le x\le 3, \\ 0, & \text{якщо} \quad x>3. \end{cases}$$

263. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка задана своєю функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x<1, \\ x-1, & \text{якщо} \quad 1\le x\le 2, \\ 1, & \text{якщо} \quad x>2. \end{cases}$$

264. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка задана своєю функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<1,\\ \dfrac{1}{2}(x-1), & \text{якщо} \quad 1\le x\le 3,\\ 1, & \text{якщо} \quad x>3.\end{cases}$$

265. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка задана своєю функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x<0,\\ x^2, & \text{якщо} \quad 0\le x\le 1,\\ 1, & \text{якщо} \quad x>1.\end{cases}$$

1.15. *Основні закони розподілу неперервної випадкової величини*

Рівномірний розподіл

Неперервна випадкова величина X рівномірно розподілена на інтервалі (a, b), якщо її щільність розподілу на цьому інтервалі стала, а поза цього інтервалу дорівнює нулю:

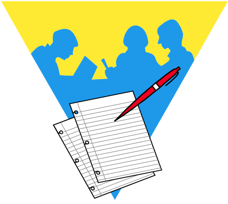
$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо} \quad a<x<b,\\ 0, & \text{якщо} \quad x\ge b.\end{cases}$$

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини, що має рівномірний розподіл, дорівнюють:

$$\mathrm{M}(X)=\frac{a+b}{2}; \qquad \mathrm{D}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Функція розподілу $F(x)$ має вигляд: $F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{якщо} \quad a<x<b,\\ 1, & \text{якщо} \quad x\ge b.\end{cases}$

Ймовірність попадання випадкової величини на заданий інтервал (α, β) дорівнює: $\mathrm{P}(\alpha<X<\beta)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$, $((\alpha, \beta)\in(a, b))$.



ПРИКЛАДИ

266. Випадкова величина *X* має рівномірний розподіл на інтервалі (1; 7). Написати вираз її щільності розподілу *f*(*x*), знайти математичне сподівання та дисперсію.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Для випадкової величини, що має рівномірний розподіл на інтервалі (1; 7), щільність розподілу дорівнює:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le 1, \\ \dfrac{1}{6}, & \text{якщо} \quad 1<x<7, \\ 0, & \text{якщо} \quad x\ge 7. \end{cases}$$

Знаходимо математичне сподівання і дисперсію:

$$\mathrm{M}(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{1+7}{2}=4;$$

$$\mathrm{D}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(7-1)^2}{12}=\frac{6^2}{12}=3;$$

Відповідь: *M* (*X*) = 4; *D*(*X*) = 3.

267. Випадкова величина *X* має рівномірний розподіл, причому $M(X)=3$, $D(X)=4/3$. Знайти щільність розподілу *f*(*x*).

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Скористаємося формулами: $\mathrm{M}(X)=\dfrac{a+b}{2}$, $\mathrm{D}(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Підставляємо *M*(*X*) = 3 і $D(X)=4/3$, отримуємо для знаходження *a* і *b* систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2}=3, \\ \dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Перетворимо отриману систему: $\begin{cases} a+b=6, \\ (b-a)^2=16 \end{cases}$ або $\begin{cases} a+b=6, \\ b-a=4. \end{cases}$

Розв'язуємо систему, отримуємо: $a = 1$, $b = 5$.

Щільність розподілу рівномірно розподіленої випадкової величини має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{якщо} \quad a < x < b, \\ 0, & \text{якщо} \quad x \ge b. \end{cases}$$

У даному випадку:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 1, \\ \dfrac{1}{4}, & \text{якщо} \quad 1 < x < 5, \\ 0, & \text{якщо} \quad x \ge 5. \end{cases}$$

268. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі (2; 6). Знайти ймовірність попадання на інтервал:

1) (3; 5); 2) (5; 7).

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі (2; 6), її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 2, \\ \dfrac{1}{4}, & \text{якщо} \quad 2 < x < 6, \\ 0, & \text{якщо} \quad x \ge 6. \end{cases}$$

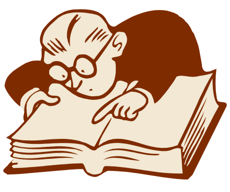
Ймовірність попадання випадкової величини X на інтервал (α, β) обчислюємо за формулою:

$$\mathrm{P}(\alpha < X < \beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

В даному випадку маємо:

$$\mathrm{P}(3 < X < 5)=\int_3^5 f(x)\,dx=\int_3^5 \tfrac{1}{4}dx=\tfrac{1}{2};$$

$$\mathrm{P}(5 < X < 7)=\int_5^7 f(x)\,dx=\int_5^6 \frac{1}{4}dx+\int_6^7 0dx=\frac{1}{4}.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

269. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі (–2; 6). Написати вираз її щільності розподілу. Знайти $M(X)$ і $D(X)$.

270. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі (0; 4). Написати вираз її щільності розподілу. Знайти $M(X)$ і $D(X)$.

271. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі $(-1; 1)$. Написати вираз її щільності розподілу. Знайти $M(X)$ і $D(X)$.

272. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі $(a-1;\ a+1)$. Написати вираз її щільності розподілу. Знайти $M(X)$ і $D(X)$.

273. Випадкова величина X має рівномірний розподіл, причому $M(X) = 2$, $D(X) = 3$. Знайти щільність розподілу $f(x)$.

274. Випадкова величина X має рівномірний розподіл, причому $M(X) = 1$. Знайти щільність розподілу $f(x)$.

275. Випадкова величина Х має рівномірний розподіл, причому $M(X) = 1$, $D(X) = 3$. Знайти щільність розподілу $f(x)$.

276. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі (2; 5). Знайти функцію розподілу $F(x)$ і ймовірність попадання на інтервал (3; 4).

277. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі

(–2; 6). Знайти функцію розподілу $F(x)$ і ймовірність попадання на інтервал (0; 13).

278. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі (0; 4). Знайти функцію розподілу $F(x)$ і ймовірність попадання на інтервал (1; 3).

279. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі (3; 7). Знайти ймовірність попадання на інтервал (2; 6).

280. Припускаючи, що індекс цін на продовольчі товари рівномірно розподілений в межах від 110 до 150%, знайти ймовірність того, що він не перевищить 135%, а також обчислити характеристики його розкиду.

281. Комерційна маржа X посередницької фірми розподілена рівномірно, причому $M(X) = 20$ тис. гривень на місяць і $\sigma(X) = 3{,}464$ тис. гривень. Знайти ймовірність того, що в наступному місяці вона перевищить 25 тис. гривень.

Показниковий розподіл

Неперервна випадкова величина X має показниковий розподіл, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}, & \text{якщо} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

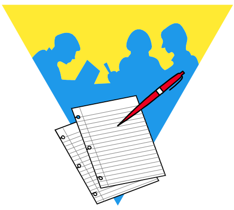
де $\lambda > 0$ – параметр розподілу.

Функція розподілу $F(x)$ має вигляд: $F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x<0, \\ 1-e^{-\lambda\cdot x}, & \text{якщо} \quad x\geq 0. \end{cases}$

Математичне сподівання та дисперсія випадкової величини, що має показниковий розподіл, відповідно дорівнюють:

$$\mathrm{M}(X)=\frac{1}{\lambda}; \qquad \mathrm{D}(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Ймовірність попадання випадкової величини X на інтервал (α, β) дорівнює: $\mathrm{P}(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta} \quad (\alpha\geq 0)$.



ПРИКЛАДИ

282. Задано щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x<0, \\ 2e^{-2x}, & \text{якщо} \quad x\geq 0. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання і дисперсію.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Порівнюючи задану щільність розподілу $f(x)$ із щільністю розподілу випадкової величини, що має показниковий розподіл, робимо висновок, що задана випадкова величина має показниковий розподіл з $\lambda=2$. Таким чином, отримуємо: $\mathrm{M}(X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{2}$; $\qquad \mathrm{D}(X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{4}$.

Відповідь: $\mathrm{M}(X)=\frac{1}{2}$; $\qquad \mathrm{D}(X)=\frac{1}{4}$.

283. Випадкова величина X має показниковий розподіл з $\mathrm{M}(X)=\frac{1}{3}$. Знайти: 1) щільність розподілу $f(x)$; 2) функцію розподілу $F(x)$.

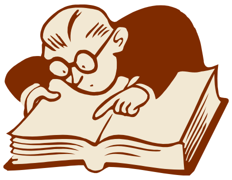
РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Математичне сподівання випадкової величини, що має показниковий розподіл, обчислюється за формулою $\mathrm{M}(X)=1/\lambda$. За умовою задачі $\mathrm{M}(X)=1/3$. Звідси: $\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{3}$, тобто $\lambda=3$. Щільність розподілу $f(x)$ має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x<0, \\ 3e^{-3x}, & \text{якщо} \quad x\geq 0. \end{cases}$$

2) Функція розподілу $F(x)$ випадкової величини, що має показниковий розподіл, при $\lambda = 3$ має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-3x}, & \text{якщо} \quad x \geq 0. \end{cases}$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

284. Задано щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ 5e^{-5x}, & \text{якщо} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти: 1) математичне сподівання і дисперсію; 2) функцію розподілу $F(x)$; 3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал (0; 1).

285. Випадкова величина X має показниковий розподіл зі щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ 0{,}2e^{-0{,}2x}, & \text{якщо} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти: 1) математичне сподівання і дисперсію; 2) функцію розподілу $F(x)$; 3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал (5; 10).

286. Випадкова величина X має показниковий розподіл з щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ 0{,}5e^{-0{,}5x}, & \text{якщо} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Знайти: 1) математичне сподівання і дисперсію; 2) функцію розподілу $F(x)$; 3) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал (2; 4).

287. Випадкова величина X має показниковий розподіл з $D(X) = \dfrac{1}{4}$. Знайти: 1) щільність розподілу $f(x)$; 2) функцію розподілу $F(x)$.

288. Випадкова величина X має показниковий розподіл з $M(X)=1$. Знайти: 1) щільність розподілу $f(x)$; 2) функцію розподілу $F(x)$.

289. Випадкова величина X має показниковий розподіл з $\sigma(X)=\frac{1}{4}$. Знайти: 1) щільність розподілу $f(x)$; 2) функцію розподілу $F(x)$.

290. Випадкова величина X має показниковий розподіл з $D(X) = 4$. Знайти: 1) щільність розподілу $f(x)$; 2) функцію розподілу $F(x)$.

291. Регулярним контролем стану овочів, завезених на склад, визначається термін їх придатності. У середньому він дорівнює 125 дням. Описати цей термін за допомогою показового закону розподілу і знайти ймовірність того, що він перевищить середній.

292. Випадкова величина X – тривалість життя чоловіків в певному регіоні – задана функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-0,02x}$, $x \ge 0$ Знайти ймовірність того, що випадково обраний чоловік:

1) доживе до 60 років;
2) проживе, принаймні, на 20 років більше середньої тривалості життя.

Нормальний закон розподілу

Неперервна випадкова величина має нормальний розподіл, якщо її щільність розподілу задається формулою:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a – математичне сподівання, σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Функція розподілу: $$F(x)=0,5+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

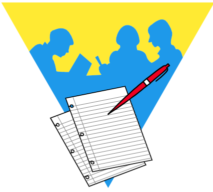
де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – ***функція Лапласа***, або інтеграл ймовірностей.

Значення функції $\Phi(x)$ наведені у Додатку 3.

Ймовірність попадання випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом, на проміжок $[x_1, x_2]$ обчислюється за формулою:

$$P(x_1 \le X \le x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).$$

Ймовірність попадання випадкової величини X на інтервал, симетричний відносно математичного сподівання a, обчислюється за формулою: $\mathrm{P}(|X-a| \le \varepsilon) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$.



ПРИКЛАДИ

293. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $\mathrm{M}(X)$ = 30 і дисперсією $\mathrm{D}(X)$=100. Знайти: 1) щільність розподілу $f(x)$;
2) ймовірність попадання випадкової величини на інтервал (10; 60).

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Щільність розподілу в даному випадку при a=M(X)=30 та $\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{100} = 10$ має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{10 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-30)^2}{2 \cdot 10^2}} = \frac{1}{10 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-30)^2}{200}}.$$

2) Ймовірність попадання випадкової величини на інтервал (10; 60) якщо a = 30 та σ = 10 обчислюється за формулою:

$$\mathrm{P}(10 < X < 60) = \Phi\left(\frac{60-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = \Phi(3) - \Phi(-2) = \Phi(3) + \Phi(2).$$

По таблицям (див. Додаток 3) знаходимо Ф(2) та Ф(3). Отримуємо:

$$\mathrm{P}(10 < X < 60) = \Phi(3) + \Phi(2) = 0{,}4986 + 0{,}4772 = 0{,}9758.$$

Відповідь: 1) $f(x) = \frac{1}{10 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-30)^2}{200}}$; 2) $\mathrm{P}(10 < X < 60) = 0{,}9758$.

294. Нормально розподілена випадкова величина має щільність розподілу:

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}.$$

Знайти: 1) $M(X)$ та $D(X)$; 2) функцію розподілу $F(x)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1) Щільність розподілу нормально розподіленої випадкової величини дорівнює:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Порівнюючи цей вираз із заданою в умові функцією $f(x)$, отримуємо:

$$M(X) = a = 3;\ D(X) = \sigma^2 = 4.$$

2) Функція розподілу $F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\delta}\right)$. Підставляємо $a = 3$ та $\sigma = 2$, отримуємо $F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-3}{2}\right)$.

Відповідь: 1) $M(X) = 3$; $D(X) = 4$; 2) $F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-3}{2}\right)$.

295. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $a = 3$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4$. Знайти ймовірність того, що X відхиляється від свого математичного сподівання по модулю не більш, ніж на 0,2.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Шукану ймовірність обчислюємо за формулою:

$$P(|X - a| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

У даному випадку $a = 3$, $\sigma = 4$, $\varepsilon = 0{,}2$.

$$P(|X - 3| \le 0{,}2) = 2\Phi\left(\frac{0{,}2}{4}\right) = 2\Phi(0{,}05).$$

По таблицям (див. Додаток 3) знаходимо: $\Phi(0{,}05) = 0{,}0199$.

Остаточно отримуємо:

$$P(|X - 3| \le 0{,}2) = 2 \cdot 0{,}0199 = 0{,}0398.$$

296. Випадкова величина X має нормальний розподіл з математичним сподіванням $M(X) = 0$. Знайти середнє квадратичне відхилення σ, якщо ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $[-1, 1]$ дорівнює 0,7.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Скористаємося формулою:

$$P(|X - a| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Підставляємо в цю формулу $a = 0$, $\varepsilon = 1$, отримуємо:

$$P(|X|\le 1)=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

За умовою задачі: $P(-1\le X\le 1)=P(|X|\le 1)=0{,}7$.

Звідси: $2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)=0{,}7$, тобто: $\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right)=0{,}35$.

За таблицями (див. Додаток 3) знаходимо значення аргументу, при якому функція Лапласа $\Phi(x)$ дорівнює 0,35, тобто: $x=\frac{1}{\sigma}\approx 1{,}04$.

Остаточно отримуємо: $\sigma\approx\frac{1}{1{,}04}=0{,}96$.

297. В нормальному розподілі з параметрами $a = 3$ та $\sigma = 2$ знайти значення x таке, щоб ймовірність попадання в інтервал $[x; 5]$ дорівнювала 0,5.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[x_1;\ x_2]$ обчислюється за формулою:

$$P(x_1\le X\le x_2)=\Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right).$$

Підставляємо в цю формулу: $x_1 = x$, $x_2 = 5$, $a = 3$, $\sigma = 2$, отримуємо:

$$P(x\le X\le 5)=\Phi\left(\frac{5-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{x-3}{2}\right)=\Phi(1)-\Phi\left(\frac{x-3}{2}\right).$$

За умовою задачі: $P(x\le X\le 5) = 0{,}5$.

По таблицям (див. Додаток 3) знаходимо: $\Phi(1) = 0{,}3413$.

Підставляємо ці значення, отримуємо:

$$0{,}5=0{,}3413-\Phi\left(\frac{x-3}{2}\right).$$

Звідки: $\Phi\left(\frac{x-3}{2}\right)=-0{,}1587$. Знаходимо в таблиці значення аргументу, при якому функція $\Phi(x)$ дорівнює 0,1587: $\Phi(0{,}41)=0{,}1591$.

Враховуючи непарність функції $\Phi(x)$, отримуємо $\frac{x-3}{2}\approx -0{,}41$. Звідси: $x\approx 2{,}18$.

298. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=4$ і $\sigma=3$. Знайти ймовірність того, що при трьох випробуваннях ця випадкова величина потрапить в інтервал (1; 7):

1) всі три рази;
2) два рази.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Знайдемо ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (1, 7) при одному випробуванні.

Скористаємося формулою: $P(x_1 < X < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$.

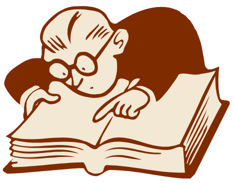
В даному випадку:

$$P(1 < X < 7) = \Phi\left(\frac{7-4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1-4}{3}\right) = 2\Phi(1) = 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826 .$$

Таким чином, ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (1, 7) при одному випробуванні дорівнює: p=0,6626. Тоді ймовірність того, що попадання в інтервал не буде, дорівнює: $q = 1 - p = 0{,}3174$. Для обчислення необхідних ймовірностей застосуємо формулу Бернуллі:

1) $n = 3,\ k = 3$; $p_3(3) = p^3 = (0{,}6826)^3 = 0{,}318$.

2) $n = 3,\ k = 2$; $p_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot (0{,}6826)^2 \cdot 0{,}3174 = 0{,}444$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

299. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $M(X)=1$ і дисперсією $D(X)=16$. Знайти:

1) щільність розподілу $f(x)$; 2) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (0; 2).

300. Випадкова величина X має нормальний закон розподілу з параметрами: $a = M(X) = 5$, $\sigma(X) = 3$. Знайти: 1) щільність розподілу $f(x)$; 2) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (2; 11).

301. Випадкова величина X має нормальний розподіл, причому: $M(X)=20$, $D(X)=25$. Знайти: 1) щільність розподілу $f(x)$; 2) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал (15; 30).

302. Нормально розподілена випадкова величина має щільність розподілу:

$$f(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{18}} .$$

Знайти: 1) $M(X)$ і $D(X)$; 2) функцію розподілу $F(x)$.

303. Нормально розподілена випадкова величина має щільність розподілу:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{2}}.$$

Знайти: 1) $M(X)$ і $D(X)$; 2) функцію розподілу $F(x)$.

304. Нормально розподілена випадкова величина має щільність розподілу:

$$f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{32}}.$$

Знайти: 1) $M(X)$ і $D(X)$; 2) функцію розподілу $F(x)$.

305. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням a і середнім квадратичним відхиленням σ. Знайти ймовірність того, що X відхиляється від свого математичного сподівання по модулю не більше, ніж на ε. Провести розрахунки для наступних даних:

1) a=1, σ=2, ε=0,6;
2) a=4, σ=3, ε=1,5;
3) a=5, σ=8, ε=1,2.

306. Випадкова величина X має нормальний розподіл з математичним сподіванням $M(X)=2$. Знайти середнє квадратичне відхилення σ, якщо ймовірність попадання випадкової величини в інтервал [0; 4] дорівнює 0,5.

307. Випадкова величина X має нормальний розподіл з математичним сподіванням $M(X)=3$. Знайти середнє квадратичне відхилення σ, якщо ймовірність попадання випадкової величини в інтервал [2; 4] дорівнює 0,8

308. У нормальному розподілі з параметрами $a=6$ і $\sigma=4$ знайти значення x таке, щоб ймовірність потрапити в інтервал $[5; x]$ дорівнювала 0,4.

309. У нормальному розподілі з параметрами $a=4$ і $\sigma=5$ знайти значення x таке, щоб ймовірність потрапити в інтервал $[x; 6]$ дорівнювала 0,3.

310. У нормальному розподілі з параметрами $a=8$ і $\sigma=3$ знайти значення x таке, щоб ймовірність потрапити в інтервал $[5; x]$ дорівнювала 0,6.

311. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметрами $a=6$ і $\sigma=2$. Знайти ймовірність того, що при двох випробуваннях ця випадкова величина потрапить в інтервал (5; 8)

1) один раз; 2) два рази.

312. Випадкова величина розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 5$ і $\sigma = 1$. Знайти ймовірність того, що при двох випробуваннях ця випадкова величина потрапить в інтервал (3; 6)

1) два рази;
2) один раз;
3) жодного разу.

313. Магазин продає чоловічі костюми. За даними статистики, розподіл за розмірами є нормальним із математичним сподіванням і середнім квадратичним відхиленням, відповідно рівними 48 і 2. Визначити відсоток попиту на 50-й розмір за умови розкиду значень цієї величини в інтервалі (49; 51).

314. Розмір чоловічих сорочок є випадковою величиною з нормальним законом розподілу, математичним сподіванням 39 і дисперсією 9. Який відсоток від загального обсягу замовлення слід передбачити магазину для сорочок 40 розміру комірця за умови, що цей розмір знаходиться в інтервалі (39,5; 40,5)?

315. Пакувальний апарат розфасовує пральний порошок у пакети, середня вага яких 930 грам, а середнє квадратичне відхилення – 20 грам:

а) Яка частка пакетів буде мати вагу до 900 грам?

б) Якщо потрібно, щоб не більше 2,5% пакетів містили менше 900 грам, то на яку середню вагу пакета повинна бути переналаштована машина, щоб відповідати цій вимогі?

316. Статистичні дослідження показали, що річний прибуток працівника страхового бізнесу має нормальний закон розподілу з середнім значенням 8 000 у. о. і середнім квадратичним відхиленням 1 000 у. о. Випадково відібрана особа, яка працює в страховому бізнесі. Яка ймовірність того, що її річний прибуток буде:

1) менше, ніж 6 000 у. о.;
2) не менше, ніж 10 000 у. о.;
3) між 7 500 і 9 200 у. о.?

317. Дослідження показали, що чоловіки викурюють у середньому 22 сигарети щодня. Кількість сигарет, що викурюють протягом дня, розподіляється нормально з середнім квадратичним відхиленням 8. Яка ймовірність того, що випадково обрана особа викурить протягом дня:

1) більше 2 пачок сигарет;
2) менше 1 пачки сигарет;
3) від 1 до 1,5 пачки сигарет?

318. За багаторічними спостереженнями за балансовим прибутком фірми встановлено, що цей прибуток змінюється в межах від 10 000 до 40 000 у. о. на місяць. Вважаючи, що вона розподілена нормально, визначити параметри цього розподілу і знайти ймовірність того, що балансовий прибуток у наступному місяці становитиме від 24 000 до 28 000 у. о.

319. Проводиться зважування деякої речовини без систематичних помилок. Випадкові помилки зважування підпорядковані нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 20$ грам. Знайти ймовірність того, що зважування буде зроблено з помилкою, що не буде перевершувати за абсолютною величиною 10 грам.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чи може при деякому значенні аргументу:

а) функція розподілу бути більше 1;

б) щільність розподілу бути більше 1;

в) функція розподілу бути негативною?

2. Відомо, що середнє значення випадкової величини дорівнює 5, а дисперсія дорівнює 4. Чи може ця випадкова величина мати показниковий розподіл?

3. Який вплив параметрів нормального закону на вигляд кривої розподілу?

4. Яка сутність правила трьох сигм?

5. Чи може за яких-небудь a і b виконуватися рівність $F(a) - F(b) = 1{,}5$?

6. Який геометричний зміст має ймовірність P $(\alpha < X < \beta)$, якщо випадкова величина X розподілена рівномірно на $[a, b]$, а $[\alpha, \beta] \in [a, b]$?

7. Чому дорівнює ймовірність P $(0 < X < 3)$, якщо випадкова величина X розподілена рівномірно на інтервалі $[1, 2]$?

8. Вкажіть, які з наведених функцій не можуть бути функціями розподілу:

а) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ (x-1)^2, & 1 \le x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ (x-2)^3, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

в) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

г) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \cos x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

9. Дано графік функції розподілу випадкової величини X. Як зміниться цей графік якщо:

а) до випадкової величини додати 1;

б) відняти із випадкової величини 2;

в) помножити випадкову величину на 2?

1.16. Поняття про моменти розподілу

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називається математичне сподівання k-го степеня цієї величини. Для дискретної випадкової величини:

$$\nu_k = \mathrm{M}(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \mathrm{p}_i .$$

Для неперервної випадкової величини:

$$\nu_k = \mathrm{M}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx .$$

Зокрема, $\nu_0 = \mathrm{M}(X^0) = 1$; $\nu_1 = \mathrm{M}(X)$; $\nu_2 = \mathrm{M}(X^2)$.

Центральним моментом k-го порядку називається математичне сподівання k-го ступеня відхилення випадкової величини X від свого математематичного сподівання.

Для дискретної випадкової величини:

$$\mu_k = \mathrm{M}[X - \mathrm{M}(X)]^k = \sum_{i=1}^{n} [x_i - \mathrm{M}(X)]^k \cdot \mathrm{p}_i .$$

Для безперервної випадкової величини:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \mathrm{M}(X)]^k f(x)dx .$$

Зокрема, $\mu_0 = 1$; $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = \mathrm{M}[X - \mathrm{M}(X)]^2 = \mathrm{D}(X)$.

На практиці для обчислення центральних моментів використовують формули, що виражають центральні моменти через початкові:

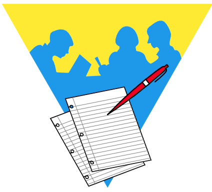
$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2;\ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,\ \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^4 - 3\nu_1^4.$$

Асиметрією As теоретичного розподілу називається величина $A_s = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$.

Якщо «довга частина» щільності розподілу розташована праворуч від абсциси точки математичного сподівання, то $As > 0$, в іншому випадку $As < 0$.

Крутизна кривої щільності розподілу ймовірностей оцінюється за допомогою ексцесу *Ек*, що визначений наступним чином: $E_k = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$. Для нормального розподілу: $As = 0$, $Ek = 0$.

Якщо нормальний та теоретичний розподіли мають однакові математичні сподівання і дисперсії, то *As* і *Ек* служать мірою відхилення теоретичного розподілу від нормального.



ПРИКЛАДИ

320. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу:

X	1	2	4
p	0,1	0,3	0,6

Знайти початкові і центральні моменти першого, другого і третього порядків.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Знаходимо початкові моменти:

$$\nu_1 = 1\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}6 = 3{,}1;$$

$$\nu_2 = 1^2\cdot 0{,}1 + 2^2\cdot 0{,}3 + 4^2\cdot 0{,}6 = 10{,}9;$$

$$\nu_3 = 1^3\cdot 0{,}1 + 2^3\cdot 0{,}3 + 4^3\cdot 0{,}6 = 40{,}9.$$

Знаходимо центральні моменти:

$$\mu_1 = 0;$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 10{,}9 - (3{,}1)^2 = 1{,}29;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 40{,}9 - 3\cdot 3{,}1\cdot 10{,}9 + 2\cdot(3{,}1)^3 = -0{,}888.$$

321. Неперервна випадкова величина задана своєю щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{2}x, & \text{якщо} \quad 0 < x < 2, \\ 0, & \text{якщо} \quad x \ge 2. \end{cases}$$

Знайти початкові і центральні моменти першого, другого і третього порядків.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Знаходимо початкові моменти:

$$\nu_1 = \mathrm{M}(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3};$$

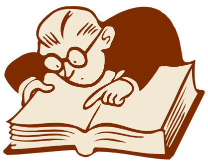
$$\nu_2 = \mathrm{M}(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 2;$$

$$\nu_3 = \mathrm{M}(X^3) = \int_0^2 x^3 \cdot \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{16}{5}.$$

Знаходимо центральні моменти:

$$\mu_1 = 0; \qquad \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9};$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = \frac{16}{5} - 3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2 + 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 = -\frac{8}{135}.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

322. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу:

X	1	3
p	0,7	0,3

Знайти початкові і центральні моменти першого, другого і третього порядків.

323. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу:

X	0	2	4
p	0,3	0,2	0,5

Знайти асиметрію та ексцес.

324. Дискретна випадкова величина задана законом розподілу:

X	–1	0	1
p	0,2	0,4	0,4

Знайти асиметрію та ексцес.

325. Неперервна випадкова величина задана своєю щільністю розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad 1 < x < 2, \\ 0, & \text{якщо} \quad x \ge 2. \end{cases}$$

Знайти початкові і центральні моменти першого, другого і третього порядків.

326. Неперервна випадкова величина задана своєю щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x\le 0, \\ 2x, & \text{якщо} \quad 0<x<1, \\ 0, & \text{якщо} \quad x\ge 1. \end{cases}$$

Знайти асиметрію та ексцес.

327. Неперервна випадкова величина задана своєю щільністю розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{якщо} \quad x\le 0, \\ 0{,}5 & \text{якщо} \quad 0<x<2, \\ 0 & \text{якщо} \quad x\ge 2. \end{cases}$$

Знайти асиметрію та ексцес.

328. Знайти *As* і *Ek* для рівномірного розподілу з щільністю розподілу ймовірності:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,\ b] \\ 0, & x\notin[a,\ b] \end{cases}$$

329. Знайти *As* і *Ek* для експоненціального (показникового) розподілу.

1.17 Багатовимірні випадкові величини

Двовимірною випадковою величиною $(X,\ Y)$ називають випадковий вектор з координатами X та Y.

Функцією розподілу ймовірностей двовимірної випадкової величини називають функцію $F(x, y)=P(X < x,\ Y < y)$.

Якщо X та Y незалежні випадкові величини, то: $F(x, y)=F_1(x)F_2(y)$.

Щільність $f(x, y)$ спільного розподілу ймовірностей (двовимірна щільність) визначається наступним чином:

$$f(x,\ y)=\frac{\partial^2 F(x,\ y)}{\partial x\partial y}.$$

Властивості $f(x, y)$:

1) $f(x, y) \geq 0$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)dxdy = 1$;

3) для незалежних випадкових величин $f(x, y)=f_1(x)f_2(y)$.

$F(x, y)$ по $f(x, y)$ знаходиться за формулою: $F(x,\ y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,\ v)dudv$.

Ймовірність попадання випадкової точки з координатами $(X,\ Y)$ в область G визначається наступним чином:

$$\mathrm{P}((X,\ Y) \in G) = \iint\limits_{G} f(x,\ y)dxdy.$$

Одномірні щільності $f_1(x)$ і $f_2(y)$ розподілу ймовірностей випадкових величин X та Y знаходять за формулами:

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)dy, \qquad f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,\ y)dx.$$

Кажуть, що $(X,\ Y)$ має двовимірний нормальний закон розподілу ймовірностей, якщо $f(x, y)$ має вигляд:

$$f(x,\ y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2{}_{xy}}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}{}^2)}\left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_x{}^2}+\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_y{}^2}-2r_{xy}\frac{x-a_1}{\sigma_x}\cdot\frac{y-a_2}{\sigma_y}\right]},$$

де $a_1=M(X)$, $a_2=M(Y)$, $\sigma_x^2 = \mathrm{D}(X)$, $\sigma_y^2 = \mathrm{D}(Y)$,

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(X,\ Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}, \qquad \operatorname{cov}(X, Y) = M\big((X - M(X))\cdot(Y - M(Y))\big).$$

Якщо $r_{xy}=0$ (X та Y некорельовані випадкові величини), то:

$f(x, y)=f_1(x)f_2(y)$.

Коваріаційна матриця $(X,\ Y)$ визначена наступним чином:

$$\begin{pmatrix} D(X) & \operatorname{cov}(X,Y) \\ \operatorname{cov}(X,y) & D(Y) \end{pmatrix}.$$

Розподіл функцій одного і двох випадкових аргументів

1. Нехай випадкова величина $Y = g(X)$, де X – інша випадкова величина з відомою щільністю розподілу ймовірностей $f_X(x)$:

а) якщо існують обернені функції $X = \varphi(Y)$, тобто X та Y зв'язані взаємно однозначною відповідністю, то:

$$f_Y(y) = f_X(\varphi(y))\left|\frac{d\varphi(y)}{dy}\right|;$$

б) якщо обернена функція для $y = f(x)$ неоднозначна, то, позначаючи однозначні вітки через $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ ... для $f_Y(y)$ маємо:

$$f_Y(y) = \sum_k f_X(\varphi_k(y))\left|\frac{d\varphi_k(y)}{dy}\right|.$$

2. Нехай (X_1, X_2) пара випадкових величин зі спільною щільністю розподілу ймовірностей $f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)$. Розглянемо дві нові випадкові величини Y_1 та Y_2, які отримуються з X_1, X_2 за допомогою функціонального перетворення $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$, $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$:

а) якщо обернені функції $x_1 = \varphi_1(y_1, y_2)$, $x_2 = \varphi_2(y_1, y_2)$ для $y_1 = g_1(x_1, x_2)$, $y_2 = g_2(x_1, x_2)$ однозначні, то спільна щільність для (Y_1, Y_2) задається формулою:

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2)) \cdot \left|\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)}\right|,$$

де визначник другого порядку $\dfrac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)}$ має вигляд:

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix};$$

б) якщо обернені функції неоднозначні і мають кілька віток $\varphi_1^{(k)}(y_1, y_2)$, $\varphi_2^{(k)}(y_1, y_2)$ … то:

$$f(y_1, y_2) = \sum_k f_{X_1, X_2}(\varphi_1^{(k)}(y_1, y_2), \varphi_2^{(k)}(y_1, y_2))\left|\frac{\partial(\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)})}{\partial(y_1, y_2)}\right|.$$

Розподіл χ^2, Стьюдента та Фішера

У математичній статистиці крім нормального розподілу широко використовують розподілу «хі-квадрат», Стьюдента і Фішера.

Нехай X_k $(k = \overline{1, n})$ – незалежні нормально розподілені випадкові величини з параметрами (a, σ^2).

1. Розглянемо випадкову величину $\chi_n^2 = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - a)^2$. Її закон розподілу ймовірностей має вигляд:

$$F_{\chi_n^2}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^x u^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}}du, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases},$$

де $\Gamma(\alpha)=\int\limits_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt$, $\alpha>0$. Цей розподіл носить назву – розподіл χ^2 з n ступенями свободи.

2. Нехай $Z=\dfrac{X}{Y}$, де X та Y незалежні випадкові величини, X – розподілена за нормальним законом з параметрами (0, $\sigma^2=\dfrac{1}{n}$), а $Y=\dfrac{\chi_n}{\sqrt{n}}$. Тоді розподіл ймовірностей виду:

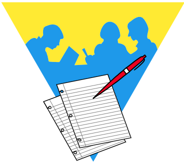
$$F_Z(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^x (1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}dx, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

носить назву розподіл Стьюдента з n ступенями свободи.

3. Розглянемо випадкову величину $F_{n_1,\,n_2}=\dfrac{\chi_{n_1}^2/n_1}{\chi_{n_2}^2/n}$, де $\chi_{n_1}{}^2$ та $\chi_{n_2}{}^2$ – незалежні випадкові величини, розподілені за законом χ^2 з n_1 та n_2 ступенями свободи відповідно. Закон розподілу цієї випадкової величини називається розподілом Фішера і має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ C_0\int\limits_0^x \dfrac{u^{\frac{n_1-2}{2}}}{(n_1+n_2u)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}du, & x>0\end{cases},$$

де $C_0=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)n_1^{\frac{n_1}{2}}\,n_2^{\frac{n_2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)}$.



ПРИКЛАДИ

330. Покажемо, як на практиці з'являється нормальний закон розподілу ймовірностей.

Хай при стрільбі по мішені двовимірна щільність розподілу ймовірностей координат точки попадання (X, Y) залежить тільки від відстані до початку координат: $f(x, y) = f(x^2+y^2)$.

Нехай X та Y незалежні однаково розподілені випадкові величини. Тоді: $f(x, y) = f(x^2 + y^2) = f_1(x)f_1(y)$.

При $y=0$ $f(x^2) = f_1(0)f_1(x)$ $(f_1(0) \neq 0)$.

Тоді, вважаючи, що $x^2 = u$, $y^2 = v$, та $\frac{f(u)}{f(0)} = g(u)$, маємо рівняння $g(u + v) = g(u)g(v)$, розв'язок якого має вигляд $g(a) = e^{-\lambda u}$, тобто: $f_1(x) = f_1(0)\cdot e^{-\lambda x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$.

Враховуючи умову нормування $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = 1$ та вважаючи $\lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$, остаточно отримуємо, що $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, а для двовимірної щільності: $f(x,\ y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2+y^2)}$.

331. Нехай $Y=X^3$. Знайти $f_Y(y)$, якщо відомо $f_Y(x)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Так як для $y=x^3$ зворотна функція однозначна, $x = \sqrt[3]{y}$, то відразу отримуємо: $f_Y(y) = f_X(\sqrt[3]{y})\cdot\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{y^2}}$.

332. Нехай $Y = a\sin X$. Знайти щільність розподілу ймовірностей для випадкової величини Y, якщо у випадкової величини X відомі щільність розподілу виду $f_X(x)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Так як для функції $Y = a\sin x$ обернена функція нескінченнозначна: $x = \varphi_k(y) = (-1)^k\cdot\arcsin\frac{g}{a} + \pi k$, $k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$, то:

$$f_Y(y) = \frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}} \sum f_X\left((-1)^k \arcsin\frac{y}{a} + k\pi\right), \quad |y| \le a.$$

333. Нехай X рівномірно розподілена на $[a, b]$. Знайти таку випадкову величину $Y = g(X)$, щоб Y мала задану щільність розподілу ймовірностей $f_Y(y)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Нехай $F_Y(y)$ – функція розподілу випадкової величини Y. Розглянемо випадкову величину $Y = g(X) = F_Y^{-1}\left(\frac{X-a}{b-a}\right)$, $F_Y^{-1}(y)$ – функція, обернена до $F_Y(y)$. Безпосередньою перевіркою переконуємося в тому, що Y має щільність розподілу ймовірностей $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$.

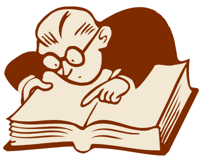
334. Нехай $Y_1 = aX_1 + bX_2$, $Y_2 = cX_1 + dX_2$, $ad - bc \ne 0$. Знайти сумісну щільність розподілу ймовірностей для (Y_1, Y_2).

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Оскільки $\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(y_1, y_2)} = (ad - bc)^{-1}$, то для $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$ одержуємо:

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(a_1 y_1 + b_1 y_2, c_1 y_1 + c_2 y_2)|ad - bc|^{-1},$$

тут a_1, b_1, c_1, d_1 – виражаємо через a, b, c, d, якщо представити розв'язок системи $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = y_1 \\ cx_1 + dx_2 = y_2 \end{cases}$ у вигляді $\begin{cases} x_1 = a_1 y_1 + b_1 y_2 \\ x_2 = c_1 y_1 + d_1 y_2 \end{cases}$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

335. Неперервна двовимірна випадкова величина (X, Y) розподілена рівномірно в колі радіуса r з центром у початку координат. Довести, що X та Y залежні, але некорельовані.

336. Нехай $f(x, y) = \begin{cases} 2\cos x \cos y & 0 \le x,\ y \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$.

Знайти: $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ і $\mathrm{cov}(X, Y)$.

337. Нехай $f(x,\ y)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin(x+y) & 0\le x,\ y\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{в іншому випадку}\end{cases}$.

Знайти: $M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$ і cov (X, Y).

338. Нехай $f(x,\ y)=\begin{cases}ax, & (x,\ y)\in G\\ 0, & (x,\ y)\notin G\end{cases}$,

де G – трикутник з вершинами (0, 0), (1, 0), (1, 1). Знайти a і коваріаційну матрицю.

339. Знайти коваріаційну матрицю випадкового вектора (X, Y), якщо:
$f(x,\ y)=\frac{3}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(5x^2+8xy+5y^2)}$.

340. Для двовимірного нормального закону знайти умовну щільність розподілу випадкової величини Y: $f(y/X=x)=\frac{f(x,\ y)}{f_X(x)}$.

341. Нехай $Y=X^2$, де X – нормальна випадкова величина. Знайти $f_Y(y)$.

342. Нехай $Y=a\cos X$. Знайти $f_Y(y)$, якщо $f_X(x)$ відома.

343. Нехай (X_1, X_2) – нормальний вектор з M$X_1=a_1$, M$X_2=a_2$, D$X_1=\sigma_1^2$, D$X_2=\sigma_2^2$ і коефіцієнтом кореляції r. Нехай $Y_1=\sqrt{X_1^{\ 2}+X_2^{\ 2}}$, $Y_2=\operatorname{arctg}\frac{X_2}{X_1}$, $|Y_2|\le\pi$. Знайти $f_{Y_1,\ Y_2}(y_1,\ y_2)$.

344. Нехай $Y_1=X_1$, $Y_2=Y=\mathrm{g}(X_1,\ X_2)$. Знайти: $f_{Y_1,\ Y_2}(y_1,\ y_2)$ і $f_Y(y_2)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{Y_1,\ Y_2}(y_1,\ y_2)dy_2$. Розглянути окремі випадки $Y=X_1+X_2$, $Y=X_1-X_2$, $Y=X_1X_2$.

345. Випадкова величина X має показниковий закон із щільністю $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$. Нехай $Y=\mathrm{g}(X)$. Знайти вид $\mathrm{g}(x)$, якщо Y має розподіл Коші зі щільністю $f_Y(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$. Знайти закон розподілу для χ^2, якщо відомий закон розподілу для $\sqrt{\chi^2}$, $X=\frac{\chi}{\sqrt{n}}$, $\frac{\chi^2}{n}$.

Статистика знає все. Відомо, скільки і якої їжі з'їдає в рік середній громадянин республіки... Відомо, скільки в країні мисливців, балерин ... верстатів, собак усіх порід, велосипедів, пам'ятників, дівчат, маяків і швейних машинок. Як багато життя, повного запалу, пристрасті і думки, дивиться на нас зі статистичних таблиць!.. Від статистики не сховаєшся нікуди…

Ілля Ільф, Євген Петров
(З книги «Дванадцять стільців»)

1. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

2.1. Побудова варіаційного ряду. Графічне зображення рядів розподілу

Нехай потрібно вивчити сукупність об'єктів відносно деякої ознаки, яка характеризує ці об'єкти.

Вибірковою сукупністю (або вибіркою) називається сукупність значень ознаки випадково відібраних об'єктів.

Генеральною сукупністю називається сукупність значень ознаки всіх об'єктів, з яких здійснюється вибірка.

Об'ємом сукупності (вибіркової або генеральної) називається кількість об'єктів цієї сукупності.

Нехай досліджується деяка ознака генеральної сукупності. Проводячи n спостережень, отримаємо n значень ознаки, серед яких можуть бути й однакові. Нехай кількість різних значень у вибірці дорівнює m: x_1, x_2, ..., x_m. Значення (елементи вибірки) називаються ***варіантами***. Кількість повторень варіанти x_i у вибірці називається ***частотою*** варіанти і позначається через n_i. Очевидно, що:

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n .$$

Відносною частотою значення x_i називається відношення частоти n_i до об'єму вибірки n і позначається через n_i^*, тобто:

$$n_i^* = \frac{n_i}{n}.$$

Очевидно, що : $\sum_{i=1}^{m} n_i^* = 1$.

Упорядкуємо варіанти вибірки за зростанням. Кожній варіанті поставимо у відповідність її частоту. Оформимо результати у вигляді таблиці:

Варіанта x_i	x_1	x_2	…	x_m
Частота n_i	n_1	n_2	…	n_m

Аналогічну таблицю можна оформити з використанням відносної частоти:

Варіанта x_i	x_1	x_2	…	x_m
Відносна частота n_i^*	n_1^*	n_2^*	…	n_m^*

Отримано статистичний розподіл, де кожному значенню x_i ставиться у відповідність n_i або n_i^*. Такий розподіл називається ***дискретним варіаційним рядом***.

Поряд з дискретним варіаційним рядом застосовується ***інтервальний (або неперервний) варіаційний ряд***. Він застосовується, якщо об’єм вибірки великий, а кожна варіанта зустрічається дуже рідко. Для побудови інтервального варіаційного ряду знаходять серед значень варіант максимальне x_{max} і мінімальне x_{min}. Різниця між цими значеннями називається ***розмахом варіації***:

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

Інтервал, що містить всі значення вибірки, розбивають на m часткових неперетинних інтервалів (a_{i-1}, a_i), $(i = \overline{1, m})$, і підраховують частоти n_i – кількість елементів вибірки, що потрапили в i-й інтервал. Якщо елемент вибірки співпадає з межею часткового інтервалу, то при підрахунку частоти його відносять до наступного, а не до попереднього інтервалу. Інтервальний варіаційний ряд записується у вигляді таблиці:

$a_{i-1} \div a_i$	$a_0 \div a_1$	$a_1 \div a_2$	…	$a_{m-1} \div a_m$
n_i	n_1	n_2	…	n_m

На практиці найчастіше використовуються часткові інтервали рівної довжини. Від інтервального варіаційного ряду можна перейти до дискретного. Для цього візьмемо як варіанти x_i середні значення ознаки у кожному інтервалі, тобто: $x_i = \dfrac{a_{i-1} + a_i}{2} \quad (i = \overline{1, m})$.

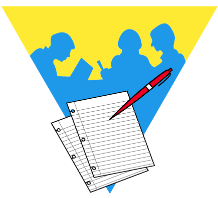
Значення частот n_i переписуються без зміни. Іноді в ряді розподілу замість частот застосовуються накопичені частоти. ***Накопиченою частотою*** називається число $n_i^{(n)}$, що дорівнює сумі частот варіант від x_1 до x_i включно, тобто:

$$n_i^{(n)} = \sum_{k=1}^{i} n_k .$$

Аналогічно можна визначити накопичену відносну частоту. Для наочності дискретний варіаційний ряд ілюструється полігоном розподілу. ***Полігоном частот*** називають ламану, відрізки якої з'єднують точки (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_m, n_m).

Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої сполучають точки (x_1, n_1^*), (x_2, n_2^*), ..., (x_m, n_m^*).

Якщо по осі ординат відкладають накопичені частоти $n_i^{(n)}$, то ламана лінія буде називатися ***кумулятою*** або кривою наростаючих підсумків. Для зображення інтервального варіаційного ряду застосовується гістограма. ***Гістограмою*** називають східчасту фігуру, складену з прямокутників, основою для яких служать часткові інтервали $[a_{i-1}, a_i]$, а висоти дорівнюють відповідним частотам n_i (іноді висоти беруться рівними $\dfrac{n_i}{h}$ або $\dfrac{n_i^*}{h}$).



ПРИКЛАДИ

346. Записати у вигляді варіаційного ряду вибірку: 3, 9, 9, 5, 3, 6, 9, 5, 5, 5, 6, 3, 6, 5, 6, 3, 3, 5, 6, 5. Визначити розмах вибірки. Побудувати полігон частот.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Обсяг вибірки: n=20. Впорядкуємо варіанти вибірки за зростанням і порахуємо кількість повторень кожної варіанти. Отримуємо:

$x_1 = 3$; $x_2 = 5$; $x_3 = 6$; $x_4 = 9$;

$n_1 = 5$; $n_2 = 7$; $n_3 = 5$; $n_4 = 3$.

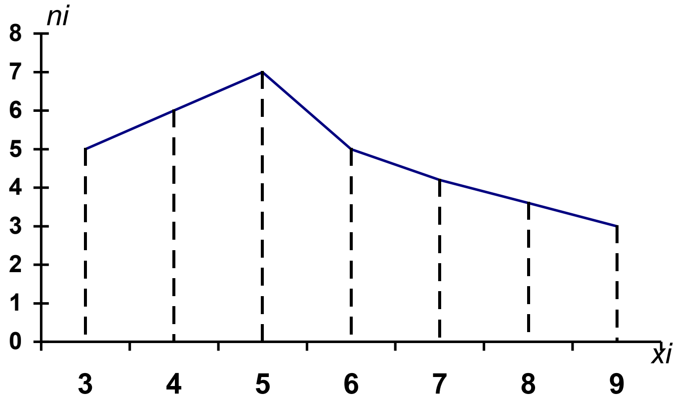
Контроль обчислень: $\sum_{i=1}^{4} n_i = 20$.

Варіаційний ряд має вигляд:

x_i	3	5	6	9
n_i	5	7	5	3

Розмах вибірки: $R = x_{max} - x_{min} = 9 - 3 = 6$.

Для побудови полігона частот в прямокутній системі координат будуємо точки (3; 5), (5; 7), (6; 5), (9; 3) і отримані точки з'єднуємо відрізками прямих.



347. Побудувати полігон відносних частот даного розподілу вибірки:

x_i	30	33	36	39
n_i	10	45	30	15

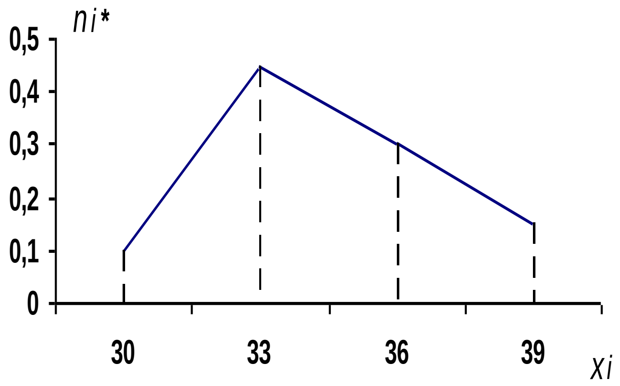
РОЗВ'ЯЗАННЯ

Об'єм вибірки: $n = \sum_{i=1}^{4} n_i = 100$. Для кожної варіанти x_i обчислюємо відносну частоту за формулою $n_i^* = \frac{n_i}{n}$. Отримуємо:

x_i	30	33	36	39
n_i^*	0,1	0,45	0,3	0,15

Контроль обчислень: $\sum_{i=1}^{4} n_i^* = 1$.

Для побудови полігону відносних частот в прямокутній системі координат будуємо точки (30; 0,1), (33; 0,45), (36; 0,3), (39; 0,15) і отримані точки з'єднуємо відрізками прямих.



Масштабні одиниці по осях координат беремо різні. Крім того, відстань від початку координат до x_{min}= 30 обираємо довільно.

348. Побудувати інтервальний варіаційний ряд розподілу по даній вибірці: 15, 18, 22, 26, 15, 10, 23, 27, 19, 18, 14, 15, 28, 6, 29, 7, 26, 24, 19, 14, 15 , 7, 27, 14, 19, 8, 20, 5, 29, 16, 10, 16, 11, 18, 20, 12, 16, 22, 23, 20, 21, 11, 16, 22, 22, 6 , 18, 14, 11, 5. При побудові інтервального варіаційного ряду використовувати 6 інтервалів рівної довжини. Перейти від інтервального варіаційного ряду до дискретного варіаційного ряду.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Обсяг вибірки: n = 50. Розмах вибірки: $R = x_{max} - x_{min} = 29 - 5 = 24$. За умовою кількість інтервалів $m = 6$. Тоді довжина кожного часткового інтервалу $h = \frac{R}{m} = 4$.

Підрахуємо кількість елементів вибірки, що потрапили в інтервали: [5; 9), [9; 13), [13; 17), [17; 21), [21; 25), [25; 29]. Елемент вибірки 21 є межею інтервалів [17; 21) і [21; 25). При підрахунку частоти відносим його до інтервалу [21; 25). Отримуємо наступний інтервальний варіаційний ряд:

$a_{i-1} \div a_i$	$5 \div 9$	$9 \div 13$	$13 \div 17$	$17 \div 21$	$21 \div 25$	$25 \div 29$
n_i	6	7	12	10	8	7

Контроль обчислень: $\sum_{i=1}^{6} n_i = 50$.

Щоб перейти від інтервального варіаційного ряду до дискретного варіаційного ряду, знаходимо варіанти:

$$x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2} \qquad (i = \overline{1,\ 6}).$$

Отримуємо наступний дискретний варіаційний ряд:

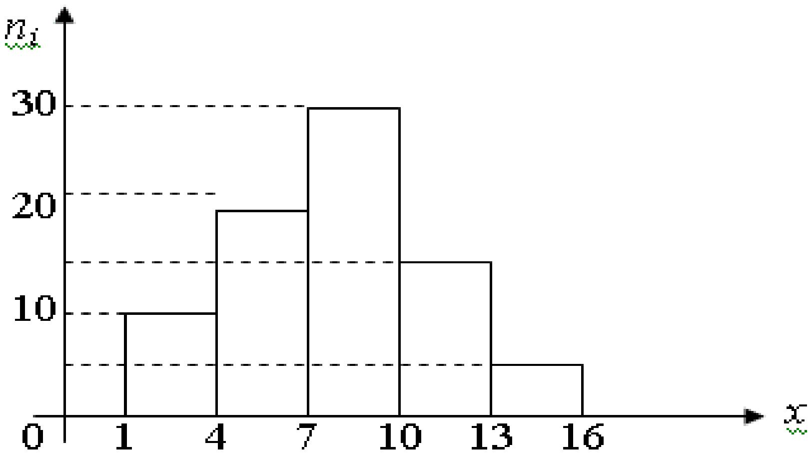
варіанта x_i	7	11	15	19	23	27
частота n_i	6	7	12	10	8	7

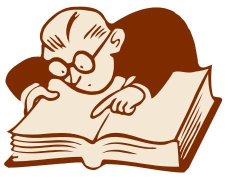
349. Побувати гістограму з даного розподілу вибірки:

$a_{i-1} \div a_i$	$1 \div 4$	$4 \div 7$	$7 \div 10$	$10 \div 13$	$13 \div 16$
n_i	10	20	30	15	5

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Побудуємо на осі абсцис задані проміжки $[a_{i-1}, a_i)$ $(i = \overline{1{,}5})$. Будуємо суміжні прямокутники, основами яких є ці інтервали, а висотами – відповідні частоти n_i.





ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

350. Записати у вигляді варіаційного ряду вибірку: 20, 32, 29, 32, 25, 22, 20, 20, 25, 29, 25, 22, 25, 29, 32, 29, 22, 25, 29, 32, 25, 25 , 22, 20, 22, 25, 32, 22, 32, 32. Визначити розмах вибірки. Побудувати полігон частот.

351. Записати у вигляді варіаційного ряду вибірку: 10, 13, 10, 15, 18, 13, 10, 15, 15, 13, 10, 18, 18, 13, 15, 10, 10, 13, 18, 10, 18, 18 , 15, 10, 13. Визначити розмах вибірки. Побудувати полігон частот.

352. Побудувати полігон відносних частот даного розподілу вибірки:

x_i	10	12	14	16
n_i	10	20	40	10

353. Побудувати полігон відносних частот даного розподілу вибірки:

x_i	5	9	12	17	20
n_i	15	30	25	25	5

354. Побудувати інтервальний варіаційний ряд даної вибірки: 17, 23, 12, 18, 19, 22, 27, 7, 16, 19, 24, 28, 30, 26, 8, 13, 16, 18, 25, 9, 14, 24, 15, 20, 10, 14, 20, 18, 11, 15, 21, 21, 19, 17, 23, 26, 29, 31, 32, 25. При побудові інтервального варіаційного ряду використовувати 5 інтервалів рівної довжини. Перейти від інтервального варіаційного ряду до дискретного варіаційного ряду.

355. Побудувати інтервальний варіаційний ряд даної вибірки: 6; 8,1; 9,2; 5; 11; 3; 7,4; 11,5; 10; 12,6; 14,2; 17; 19,8; 4; 8,5; 10,3; 11,4; 14,5; 17; 7,5; 10; 15,6; 3,6; 9; 10,7; 4,5; 7; 9,2; 10,5; 15; 5,5; 6,8; 8; 9,5; 13; 11,9; 12; 14,2; 16,5; 20; 10; 13,4; 9,6; 12; 13; 14,7; 16,2; 18,5; 21; 15. При побудові інтервального варіаційного ряду використовувати 6 інтервалів рівної довжини. Перейти від інтервального варіаційного ряду до дискретного варіаційного ряду.

356. Побудувати гістограму з даного розподілу вибірки:

$a_{i-1} \div a_i$	$10 \div 14$	$14 \div 18$	$18 \div 22$	$22 \div 26$
n_i	10	25	15	10

357. Побудувати гістограму з даного розподілу вибірки:

$a_{i-1} \div a_i$	$2 \div 7$	$7 \div 12$	$12 \div 17$	$17 \div 22$	$22 \div 27$	$27 \div 32$
n_i	5	15	30	25	15	10

358. Побудувати гістограму з даного розподілу вибірки:

$a_{i-1} \div a_i$	$20 \div 23$	$23 \div 26$	$26 \div 29$	$29 \div 32$	$32 \div 35$
n_i	4	10	16	12	8

2.2. Емпірична функція розподілу

Емпіричною функцією розподілу називається функція $F_n(x)$, що визначає для кожного x відносну частоту події $X < x$.

Нехай задано дискретний варіаційний ряд

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_i

Обчислюємо відносні частоти за формулою $n_i{*} = \dfrac{n_i}{n}$, де $n = \sum\limits_{i=1}^{m} n_i$.

Отримуємо

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i^*	$n_1{*}$	$n_2{*}$	…	$n_m{*}$

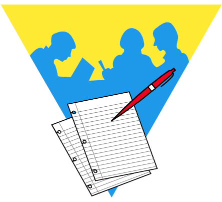
Тоді: $F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le x_1, \\ n_1^*, & \text{якщо} \quad x_1 < x \le x_2, \\ n_1^* + n_2^*, & \text{якщо} \quad x_2 < x \le x_3, \\ n_1^* + n_2^* + n_3^*, & \text{якщо} \quad x_3 < x \le x_4, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ n_1^* + n_2^* + \ldots + n_m^* = 1, & \text{якщо} \quad x > x_m \end{cases}$

Або:

$$F_n(x) = \sum_{x_i < x} n_i^* .$$

Властивості емпіричної функції розподілу

1. Значення $F_n(x)$ належать відрізку [0; 1], тобто: $0 \le F_n(x) \le 1$.
2. $F_n(x)$ – неспадна функція.
3. Якщо x_1 – найменша варіанта, то $F_n(x) = 0$ при $x \le x_1$.
4. Якщо x_m – найбільша варіанта, то $F_n(x) = 1$ при $x > x_m$.



ПРИКЛАД

359. Знайти емпіричну функцію розподілу за даним розподілом вибірки:

x_i	1	4	7
n_i	5	20	25

Побудувати графік функції розподілу.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Знаходимо об'єм вибірки: $n = 5 + 20 + 25 = 50$. Для кожної варіанти x_i обчислюємо відносну частоту. Отримуємо:

x_i	1	4	7
n_i^*	0,1	0,4	0,5

Контроль обчислень: $\sum_{i=1}^{3} n_i^* = 1$.

Знаходимо емпіричну функцію розподілу $F_n(x)$.

Якщо $x \le 1$, то $F_n(x) = 0$.

Якщо $1 < x \le 4$, то $F_n(x) = n_1^* = 0{,}1$.

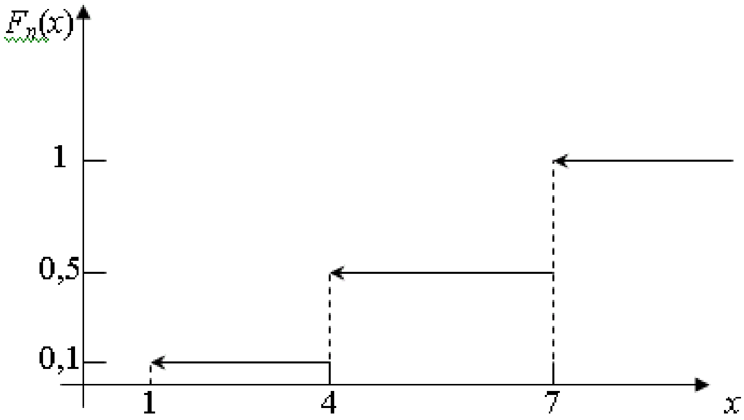
Якщо $4 < x \le 7$, то $F_n(x) = n_1^* + n_2^* = 0{,}5$.

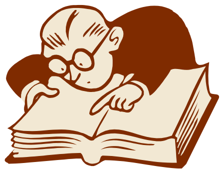
Якщо $x > 7$, то $F_n(x) = n_1^* + n_2^* + n_3^* = 1$

Таким чином,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 1, \\ 0{,}1, & \text{якщо} \quad 1 < x \le 4, \\ 0{,}5, & \text{якщо} \quad 4 < x \le 7, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 7. \end{cases}$$

Будуємо графік функції $F_n(x)$:





ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

360. Знайти емпіричну функцію розподілу за даним розподілом вибірки:

x_i	0	2	4
n_i	8	12	20

Побудувати графік функції розподілу.

361. Знайти емпіричну функцію розподілу за даним розподілом вибірки:

x_i	–2	1	4	6
n_i	5	10	20	15

Побудувати графік функції розподілу.

362. Знайти емпіричну функцію розподілу за даним розподілом вибірки:

x_i	1	3	6	8
n_i	5	15	25	15

Побудувати графік функції розподілу.

363. Знайти емпіричну функцію розподілу за даним розподілом вибірки:

x_i	2	5	7
n_i	12	18	10

Побудувати графік функції розподілу.

364. Знайти емпіричну функцію розподілу за даним розподілом вибірки:

x_i	3	6	8	10
n_i	6	14	25	15

Побудувати графік функції розподілу.

2.3. Числові характеристики вибірки

Нехай для вивчення генеральної сукупності відносно кількісної ознаки розглядається вибірка об'єму n.

Вибірковою середньою (***середньою арифметичною***) $\bar{x}$ називається середнє арифметичне варіант вибіркової сукупності. Якщо всі значення x_1, x_2, ..., x_n різні , то:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Якщо ж значення x_1, x_2, ..., x_m мають частоти: n_1, n_2, …, n_m ($\sum_{i=1}^{m} n_i = n$), то:

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_m n_m}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n}.$$

При обчисленні вибіркової середньої інтервального варіаційного ряду необхідно спочатку перейти до дискретного варіаційного ряду, а потім обчислити $\bar{x}$.

Властивості вибіркової середньої

1. Якщо всі варіанти збільшити в одне й те саме число k разів, то вибіркова середня збільшиться в k разів.

2. Якщо всі варіанти збільшити на одне й те саме число a, то й вибіркова середня збільшиться на це ж число a.

3. Середня арифметична відхилень варіантів x_i від своєї вибіркової середньої $\bar{x}$ дорівнює нулю.

Вибірковою дисперсією (дисперсією варіаційного ряду) називається середня арифметична квадратів відхилень варіант від своєї вибіркової середньої: $$\mathrm{D_в} = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 n_i \,.$$

Властивості вибіркової дисперсії

1. Якщо всі варіанти збільшити в одне й те саме число k разів, то вибіркова дисперсія збільшиться в k^2 разів.

2. Якщо всі варіанти збільшити на одне й те саме число a, то вибіркова дисперсія не зміниться.

3. Вибіркова дисперсія дорівнює вибірковій середній квадратів варіантів без квадрату їх вибіркової середньої, тобто:

$$\mathrm{D_в} = S^2 = (\overline{x^2}) - (\bar{x})^2.$$

Ця властивість використовується на практиці для обчислення вибіркової дисперсії. При обчисленні дисперсії інтервального варіаційного ряду слід спочатку перейти до дискретного варіаційного ряду.

Середнім квадратичним відхиленням називається арифметичне значення квадратного кореня з дисперсії $S = \sqrt{\mathrm{D_в}}$.

Початковим моментом k-го порядку ν_k* варіаційного ряду називається середня арифметична k-х степенів варіантів, тобто:

$$\nu_k* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^k n_i \,.$$

При k = 0, 1, 2 отримуємо: $\nu_0* = 1$, $\nu_1* = \bar{x}$, $\nu_2* = (\overline{x^2})$.

Центральним моментом k-го порядку називається середня арифметична k-х степенів відхилень варіантів від своєї вибіркової середньої, тобто:

$$\mu_k* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^k n_i \,.$$

При k = 0, 1, 2 отримуємо: $\mu_0* = 1$, $\mu_1* = 0$, $\mu_2* = \mathrm{D_в}$.

Центральні моменти зручно розраховувати за початковими, використовуючи наступні співвідношення між ними:

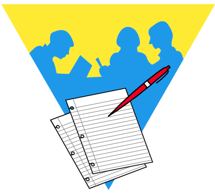
$$\mu_2* = \nu_2* - (\nu_1*)^2;$$
$$\mu_3* = \nu_3* - 3\nu_2*\nu_1* + 2(\nu_1*)^3.$$

Показник асиметрії A^* обчислюється за формулою:

$$A^* = \frac{\mu_3{}^*}{(\mu_2{}^*)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^3 n_i}{S^3}.$$

Якщо $A^* = 0$, то розподіл симетричний відносно $\bar{x}$.

Якщо $A^* > 0$, то асиметрія правостороння. Якщо $A^* < 0$, то асиметрія лівостороння.



ПРИКЛАДИ

365. Обчислити вибіркову середню, вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення для даного варіаційного ряду:

x_i	–1	0	1	2	3
n_i	5	8	10	10	7

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Всі обчислення оформляємо у вигляді таблиці:

i	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
1	–1	5	–5	5
2	0	8	0	0
3	1	10	10	10
4	2	10	20	40
5	3	7	21	63
$\sum$		40	46	118

Для обчислення вибіркової середньої $\bar{x}$ використовуємо формулу:

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i n_i}{n},$$

де $n = \sum\limits_{i=1}^{m} n_i$.

У даному випадку: $\bar{x} = \frac{46}{40} = 1{,}15$.

Для обчислення вибіркової дисперсії використовуємо формулу:

$$D_в = S^2 = (\overline{x^2}) - (\bar{x})^2.$$

У даному випадку:

$$(\overline{x^2}) = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i}{n} = \frac{118}{40} = 2{,}95;$$

$$D_в = 2{,}95 - (1{,}15)^2 = 1{,}6275.$$

Середнє квадратичне відхилення $S = \sqrt{1{,}6275} = 1{,}276$.

366. Обчислити вибіркову середню, вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення для даного варіаційного ряду:

$a_{i-1} \div a_i$	$1 \div 3$	$3 \div 5$	$5 \div 7$	$7 \div 9$	$9 \div 11$	$11 \div 13$
n_i	1	2	4	2	1	1

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Від заданого інтервального варіаційного ряду переходимо до дискретного варіаційного ряду. Для цього обчислюємо: $x_i = \frac{a_{i-1} + a_i}{2}$ $\left(i = \overline{1,\ 6}\right)$, а значення частот n_i переписуємо без зміни. Всі подальші обчислення оформляємо у вигляді таблиці:

i	$a_{i-1} \div a_i$	n_i	x_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
1	$1 \div 3$	1	2	2	4
2	$3 \div 5$	2	4	8	32
3	$5 \div 7$	4	6	24	144
4	$7 \div 9$	2	8	16	128
5	$9 \div 11$	1	10	10	100
6	$11 \div 13$	1	12	12	144
$\sum$		11		72	552

Знаходимо вибіркову середню:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n} = \frac{72}{11} = 6{,}54.$$

Обчислюємо $\left(\overline{x^2}\right)$:

$$(\overline{x^2}) = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i}{n} = \frac{552}{11} = 50{,}18.$$

Знаходимо вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення:

$$D_в = S^2 = 50{,}18 - (6{,}54)^2 = 7{,}41;$$
$$S = \sqrt{D_в} = 2{,}72.$$

367. Обчислити показник асиметрії A^* за заданим розподілом вибірки:

$a_{i-1} \div a_i$	$10 \div 12$	$12 \div 14$	$14 \div 16$	$16 \div 18$	$18 \div 20$	$20 \div 22$	$22 \div 24$
n_i	2	4	8	12	16	10	3

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Від інтервального варіаційного ряду переходимо до дискретного варіаційного ряду. Отримуємо:

x_i	11	13	15	17	19	21	23
n_i	2	4	8	12	16	10	3

Знаходимо початкові моменти: ν_1^*, ν_2^*, ν_3^*.

Всі обчислення оформляємо у вигляді таблиці:

i	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	$x_i^3 n_i$
1	11	2	22	242	2662
2	13	4	52	676	8788
3	15	8	120	1800	27000
4	17	12	204	3468	58956
5	19	16	304	5776	109744
6	21	10	210	4410	92610
7	23	3	69	1587	36501
$\sum$	119	55	981	17959	336261

$$\nu_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i n_i}{55} = 17{,}84; \qquad \nu_2^* = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i^2 n_i}{55} = 326{,}53;$$

$$\nu_3^* = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i^3 n_i}{55} = 6113{,}84.$$

Знаходимо центральні моменти μ_2^* та μ_3^* за формулами:

$$\mu_2^* = \nu_2^* - (\nu_1^*)^2; \qquad \mu_3^* = \nu_3^* - 3\nu_2^*\nu_1^* + 2(\nu_1^*)^3.$$

Отримуємо: $\mu_2^* = 326{,}53 - (17{,}84)^2 = 8{,}26;$

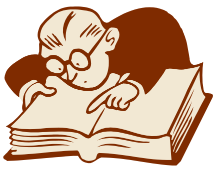
$$\mu_3^* = 6113{,}84 - 3 \cdot 326{,}53 \cdot 17{,}84 + 2(17{,}84)^3 = -6{,}32.$$

Показник асиметрії A^* обчислюємо за формулою:

$$A^* = \frac{\mu_3{}^*}{(\mu_2{}^*)^{3/2}}.$$

Отримуємо:

$$A^* = \frac{-6{,}32}{(8{,}26)^{3/2}} = -0{,}27\,.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

368. Обчислити вибіркову середню, вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення для даного варіаційному ряду:

x_i	–2	–1	0	2	3
n_i	4	6	7	7	6

369. Обчислити вибіркову середню, вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення по даному варіаційному ряду:

x_i	–2	–1	0	1	2	3
n_i	3	7	16	13	6	5

370. Обчислити вибіркову середню, вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення для даного варіаційного ряду:

x_i	0	1	2	3	56
n_i	6	7	13	9	5

371. Обчислити вибіркову середню, вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення для даного розподілу вибірки:

x_i	–3	–2	–1	0	2	3
n_i	4	9	12	11	8	6

372. Обчислити вибіркову середню, вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення для даного варіаційному ряду:

$a_{i-1} \div a_i$	$5 \div 8$	$8 \div 11$	$11 \div 14$	$14 \div 17$	$17 \div 20$
n_i	2	5	11	9	3

373. Обчислити вибіркову середню, вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення для даного розподілу вибірки:

$a_{i-1} \div a_i$	$(-1) \div 3$	$3 \div 7$	$7 \div 11$	$11 \div 15$	$15 \div 19$
n_i	4	8	13	10	5

374. Обчислити вибіркову середню, вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення для даного варіаційному ряду:

$a_{i-1} \div a_i$	$(-2) \div 0$	$0 \div 2$	$2 \div 4$	$4 \div 6$	$6 \div 8$	$8 \div 10$
n_i	2	5	9	7	4	3

375. Обчислити вибіркову середню, вибіркову дисперсію і середнє квадратичне відхилення для даного варіаційному ряду:

$a_{i-1} \div a_i$	$0 \div 4$	$4 \div 8$	$8 \div 12$	$12 \div 16$	$16 \div 20$	$20 \div 24$
n_i	3	5	12	10	6	4

376. Обчислити показник асиметрії за даним розподілом вибірки:

$a_{i-1} \div a_i$	-3	-2	-1	0	1	3
n_i	5	7	14	12	8	4

377. Обчислити показник асиметрії за даним розподілом вибірки:

x_i	-1	0	1	2	3	4
n_i	3	5	12	9	7	4

378. Обчислити показник асиметрії за даним розподілом вибірки:

$a_{i-1} \div a_i$	$7 \div 9$	$9 \div 11$	$11 \div 13$	$13 \div 15$	$15 \div 17$	$17 \div 19$
n_i	3	6	7	5	5	4

379. Обчислити показник асиметрії за даним розподілом вибірки:

$a_{i-1} \div a_i$	$8 \div 12$	$12 \div 16$	$16 \div 20$	$20 \div 24$	$24 \div 28$
n_i	2	6	9	5	3

2.4. Умовні варіанти

Якщо значення ознаки x_1, x_2, ..., x_m виражаються багатозначними числами, то обчислення вибіркової середньої та вибіркової дисперсії досить складне. У цьому випадку доцільно при обчисленнях ввести умовні варіанти.

Використовуємо наступні властивості вибіркової середньої та дисперсії:

1) $(\overline{k \cdot x}) = k \cdot \bar{x}$; $\quad D_в(k \cdot x) = k^2 \cdot D_в(x)$;

2) $(\overline{x - a}) = \bar{x} - a$; $\quad D_в(x - a) = D_в(x)$.

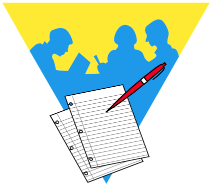
Нехай вибірка задана у вигляді розподілу рівновіддалених варіант та їх частот.

Умовні варіанти u_i вводимо за формулою: $u_i = \dfrac{x_i - a}{h}$, де h – різниця між двома сусідніми варіантами, тобто: $h = x_i - x_{i-1}$.

У якості a зручніше всього вибирати значення варіанти, що стоїть в центрі варіаційного ряду.

Вирази вихідних вибіркових середніх, дисперсії та середнього квадратичного відхилення через відповідні характеристики в умовних варіантах мають вигляд:

$$\bar{x} = h\bar{u} + a; \qquad \mathrm{D_в}(x) = h^2 \cdot \mathrm{D_в}(u); \qquad S_x = hS_u .$$



ПРИКЛАД

380. За допомогою переходу до умовних варіант обчислити $\bar{x}$, $\mathrm{D_В}(x)$, S_x для даного варіаційного ряду:

$a_{i-1} \div a_i$	$154 \div 158$	$158 \div 162$	$162 \div 166$	$166 \div 170$	$170 \div 174$	$174 \div 178$	$178 \div 182$
n_i	10	14	26	28	12	8	2

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Від інтервального варіаційного ряду переходимо до дискретного варіаційного ряду. Отримуємо:

x_i	156	160	164	168	172	176	180
n_i	10	14	26	28	12	8	2

Вводимо умовні варіанти: $u_i = \dfrac{x_i - 168}{4}$. Знаходимо $\bar{u}$, $\mathrm{D_в}(u)$, S_u.

Всі обчислення оформляємо у вигляді таблиці:

i	x_i	u_i	n_i	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$
1	156	–3	10	–30	90
2	160	–2	14	–28	56
3	164	–1	26	–26	26
4	168	0	28	0	0
5	172	1	12	12	12
6	176	2	8	16	32
7	180	3	2	6	18
$\sum$			100	–50	234

$$\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^{7} u_i n_i}{100} = -0{,}5; \qquad \overline{u^2} = \frac{\sum_{i=1}^{7} u_i^2 n_i}{100} = 2{,}34;$$

$$\mathrm{D_в}(u) = \overline{u^2} - (\bar{u})^2 = 2{,}34 - (-0{,}5)^2 = 2{,}09 .$$

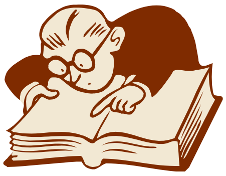
$$S_u = \sqrt{2{,}09} = 1{,}446 .$$

Знаходимо $\bar{x}$, $D_в(x)$, S_x:

$\bar{x} = 4 \cdot \bar{u} + 168 = 166$;

$D_в(x) = 16 \cdot D_в(u) = 33{,}44$;

$S_x = 4 \cdot S_u = 5{,}78$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

381. За допомогою переходу до умовних варіант обчислити $\bar{x}$, $D_B(x)$, S_x для даного варіаційного ряду:

x_i	40	45	50	55	60	65
n_i	5	7	13	11	8	6

382. За допомогою переходу до умовних варіант обчислити $\bar{x}$, $D_B(x)$, S_x для даного варіаційного ряду:

x_i	120	123	126	129	132	135	138
n_i	3	8	10	15	12	7	5

383. За допомогою переходу до умовних варіант обчислити $\bar{x}$, $D_B(x)$, S_x для даного варіаційного ряду:

x_i	90	94	98	102	106	110
n_i	4	6	11	8	8	3

384. За допомогою переходу до умовних варіант обчислити $\bar{x}$, $D_B(x)$, S_x для даного варіаційного ряду:

$a_{i-1} \div a_i$	$80 \div 83$	$83 \div 86$	$86 \div 89$	$89 \div 92$	$92 \div 95$	$95 \div 98$
n_i	2	5	8	6	6	3

385. За допомогою переходу до умовних варіант обчислити $\bar{x}$, $D_B(x)$, S_x для даного варіаційного ряду:

$a_{i-1} \div a_i$	$140 \div 142$	$142 \div 144$	$144 \div 146$	$146 \div 148$	$148 \div 150$
n_i	6	10	14	13	7

386. За допомогою переходу до умовних варіант обчислити $\bar{x}$, $D_B(x)$, S_x для даного варіаційного ряду:

$a_{i-1} \div a_i$	$200 \div 205$	$205 \div 210$	$210 \div 215$	$215 \div 220$	$220 \div 225$	$225 \div 230$
n_i	4	10	11	10	9	6

2.5. Попередня обробка даних

При проведенні вимірювань іноді трапляється, що один результат (рідше два і більше) різко відрізняється від інших. Такий результат суттєво спотворює вибіркові середню і дисперсію. Виникає задача: чи вважати таке вимірювання аномальним або ж таким, що належить до даної генеральної нормальної сукупності.

1. Нехай відомо σ^2 і невідомо математичне сподівання, і нехай x_{max} – найбільший з вимірів. Знайдемо ймовірність:

$$\mathrm{p} = \mathrm{P}(X > x_{\max}) \approx n\left[0{,}5 - \Phi\left(\beta\sqrt{\frac{n}{n-1}}\right)\right],$$

де $\beta = \dfrac{x_{\max} - \bar{x}}{\sigma}$.

Якщо $p < \alpha$ (α – рівень значущості, зазвичай α=0,05), то x_{max} виключається із сукупності. При оцінці x_{min} вважають: $\beta = \dfrac{\bar{x} - x_{\min}}{\sigma}$.

Відзначимо, що при x >3 для $\Phi(x)$ необхідно використовувати вираз:

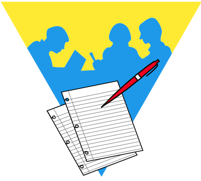
$$\Phi(x) \approx 0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2}}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{15}{x^6}\right).$$

2. Нехай σ^2 та $\bar{x}$ відомі. Тоді знаходять ймовірність:

$$\mathrm{p} = \mathrm{P}(X > x_{\max}) = \mathrm{p}\left(\frac{X - \bar{x}}{S_{испр.}} > \beta\right),$$

де $\beta = \dfrac{x_{\max} - \bar{x}}{S_{испр.}}$.

У Додатку 6 наведено значення β_α, що задовольняють рівняння $\alpha = \mathrm{P}\left(\dfrac{X - \bar{x}}{S_{испр.}} > \beta_\alpha\right)$ для трьох рівнів значущості α та $n \le 25$; якщо $\beta > \beta_\alpha$, то вимірювання виключається (при n > 25 користуємося таблицею для $\Phi(x)$, замінивши σ^2 на $S^2_{випр.}$).



ПРИКЛАД

387. Розглянемо наступний варіаційний ряд:

x_i	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001
n_i	1	–	1	1	–	2	3	3	4	4	6	6	5	8	10
x_i	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1013	1014	1015	1016
n_i	6	4	7	6	4	5	3	4	3	1	2	1	–	–	–
x_i	1017	1018													
n_i	–	1													

Тут $n = 100$, $\bar{x} = 10001{,}5$, $S_{\text{випр.}} = 5{,}70$.

Чи є значення 1018 аномальним при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Знайдемо: $\beta = \dfrac{1018 - 1001{,}5}{5{,}70} = 2{,}89$.

Оскільки $n > 25$, то знаходимо: $\mathrm{P} = 100\left(0{,}5 - \Phi\left(2{,}89\sqrt{\dfrac{100}{99}}\right)\right) = 0{,}18$.

Оскільки 0,18 > 0,05, то немає підстав для виключення крайнього значення 1018.

2.6. Точкові оцінки параметрів розподілу

Нехай дана вибірка x_1, x_2, ..., x_n, за якою було визначено закон розподілу генеральної сукупності з точністю до параметрів. Потрібно отримати статистичну оцінку значень невідомих параметрів за заданими значеннями елементів вибірки.

Точковою називають статистичну оцінку, яка визначається одним числом. Нехай для невідомого параметра Θ отримана точкова оцінка: $\tilde{\Theta}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Властивості статистичних оцінок

1. Оцінка $\tilde{\Theta}$ називається ***незміщеною***, якщо її математичне сподівання дорівнює параметру Θ, який оцінюємо, при будь-якому об'ємі вибірки, тобто:

$$\mathrm{M}(\tilde{\Theta}) = \Theta.$$

2. Оцінка $\tilde{\Theta}$ називається ***спроможною***, якщо в міру зростання числа спостережень n вона збігається по ймовірності до параметру Θ, який оцінюємо, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[|\Theta - \tilde{\Theta}| < \varepsilon] = 1.$$

3. Оцінка $\tilde{\Theta}$ називається ***ефективною***, якщо вона серед усіх інших незміщених оцінок цього параметра має найменшу дисперсію.

Розглянемо деякі статистичні оцінки

1. Нехай за даною вибіркою x_1, x_2, ..., x_n з генеральної сукупності, математичне сподіванням якої дорівнює a, обчислена вибіркова середня:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Доведено, що це незміщена, спроможна оцінка математичного сподівання a.

2. Розглянемо вибіркову дисперсію: $\mathrm{D}_в = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Доведено, що це зміщена оцінка дисперсії, тому що:

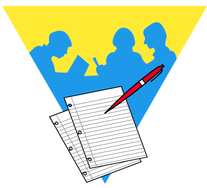
$$\mathrm{M}(S^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

Незміщеною оцінкою дисперсії служить «виправлена» дисперсія:

$$\mathrm{D}_{\text{випр.}} = \hat{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Оцінка $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ є спроможною оцінкою дисперсії σ^2.

3. Нехай x_1, x_2, ..., x_n – вибірка значень з генеральної сукупності з відомим математичним сподіванням a. Тоді $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$ є незміщеною та спроможною оцінкою дисперсії σ^2.



ПРИКЛАД

388. Знайти незміщені оцінки математичного сподівання і дисперсії за даним розподілом вибірки:

x_i	–3	–1	0	1	2
n_i	6	10	15	12	7

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Об’єм вибірки: $n = 50$. Незміщеною оцінкою математичного сподівання є вибіркова середня:

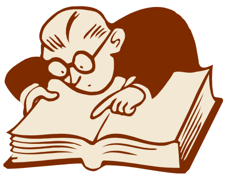
$$\bar{x} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{5} x_i n_i = -0{,}04.$$

Обчислюємо вибіркову дисперсію:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{5} x_i{}^2 n_i = \frac{1}{50}(9\cdot 6 + 1\cdot 10 + 0 + 1\cdot 12 + 4\cdot 7) = 2{,}08.$$

$$S^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 2{,}08 - (-0{,}04)^2 = 2{,}0784.$$

Незміщену оцінку дисперсії обчислюємо за формулою: $\hat{S}^2 = \dfrac{n}{n-1} S^2$, тобто: $\hat{S}^2 = \dfrac{50}{49}\cdot 2{,}0784 = 2{,}1208$.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

389. Знайти незміщені оцінки математичного сподівання і дисперсії за даним розподілом вибірки:

x_i	–2	–1	0	2	3	4
n_i	4	7	10	8	8	3

390. Знайти незміщені оцінки математичного сподівання і дисперсії за даним розподілом вибірки:

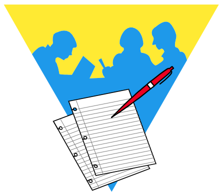
x_i	0	1	3	5	6
n_i	3	6	9	8	4

391. За вибіркою об’єму $n = 30$ знайдена вибіркова дисперсія $S^2=4$. Знайти незміщену оцінку дисперсії.

392. За вибіркою об’єму $n = 20$ знайдена вибіркова дисперсія $S^2=5$. Знайти незміщену оцінку дисперсії.

2.7. Метод моментів

Нехай закон розподілу генеральної сукупності залежить від k параметрів Θ_1, Θ_2,..., Θ_k. Тоді від цих параметрів залежать і теоретичні моменти. Метод моментів полягає в наступному: за вибіркою обчислюються k вибіркових (початкових або центральних) моментів і прирівнюються відповідним теоретичним моментам. В якості оцінок параметрів Θ_1, Θ_2,..., Θ_k беруться розв’язки отриманої системи $\tilde{\Theta}_1$, $\tilde{\Theta}_2$, …, $\tilde{\Theta}_k$, які є функціями елементів вибірки.



ПРИКЛАДИ

393. Є вибірка x_1, x_2, ..., x_n об’єму n з генеральної сукупності, що розподілена за законом Пуассона з невідомим параметром λ. Знайти оцінку параметра λ, використовуючи метод моментів, та показати, що це буде незміщена оцінка.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Відомо, що теоретичний початковий момент першого порядку $\nu_1=M(X)$. З іншого боку, математичне сподівання $M(X)$ у разі закону Пуассона дорівнює λ.

Отримуємо: $\nu_1 = \lambda$.

Вибірковий початковий момент першого порядку: $\nu_1{*} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Прирівнюючи теоретичний момент ν_1 вибірковому моменту $\nu_1{*}$, отримуємо:

$$\tilde{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i .$$

Обчислюємо $\mathrm{M}(\tilde{\lambda})$:

$$\mathrm{M}(\tilde{\lambda}) = \mathrm{M}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}(x_i) = \frac{1}{n}\cdot n\lambda = \lambda ,$$

тобто $\tilde{\lambda}$ – незміщена оцінка.

394. Є вибірка x_1, x_2, ..., x_n з генеральної сукупності, розподіленої рівномірно на інтервалі (a, b) з невідомими параметрами a і b. Необхідно методом моментів знайти оцінки параметрів a і b.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Для випадкової величини X, розподіленої рівномірно на інтервалі (a, b), маємо:

$$\nu_1 = \mathrm{M}(X) = \frac{a+b}{2}; \qquad \mu_2 = D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Відповідні вибіркові моменти:

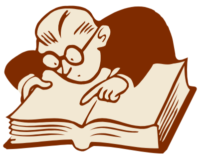
$$\nu_1{*} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ; \qquad \mu_2{*} = \mathrm{D}_в = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 .$$

Прирівняємо теоретичні моменти вибірковим моментам, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{a}+\tilde{b}}{2} = \bar{x}, \\ \dfrac{(\tilde{b}-\tilde{a})^2}{12} = S^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{a}+\tilde{b} = 2\bar{x}, \\ \tilde{b}-\tilde{a} = 2\sqrt{3}\,S. \end{cases}$$

Звідси отримуємо:

$$\tilde{a} = \bar{x} - \sqrt{3}\cdot S\,; \qquad \tilde{b} = \bar{x} + \sqrt{3}\cdot S\,.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

395. Є вибірка $x_1, x_2, ..., x_n$ з генеральної сукупності, що розподілена за нормальним законом з невідомими параметрами a і σ. Необхідно методом моментів знайти оцінки параметрів a і σ.

396. Є вибірка $x_1, x_2, ..., x_n$ об'єму n з генеральної сукупності, що має показниковий розподіл з невідомим параметром λ. Знайти оцінку параметра λ, використовуючи метод моментів.

397. Є вибірка $x_1, x_2, ..., x_n$ об'єму n з генеральної сукупності, що має геометричний розподіл, тобто: $P(X = m) = (1 - p)^{m-1}\cdot p$. Знайти оцінку невідомого параметра p, якщо $\mathrm{M}(X) = \dfrac{1}{p}$.

398. З генеральної сукупності, розподіленої за біноміальним законом: X=0, 1, 2, ..., m; $P(X = k) = P_m(k) = C_m^k\, p^k\, (1 - p)^{m-k}$, витягнута вибірка об'єму n: x_1 , x_2, ..., x_n. Знайти методом моментів оцінку параметра p і показати, що це буде незміщена оцінка.

2.8. Метод найбільшої правдоподібності

Є вибірка $x_1, x_2, ..., x_n$ об'єму n з генеральної сукупності, закон розподілу якої відомий і залежить від k параметрів $\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_k$.

Розглянемо два випадки:

1. Нехай визначаємо оцінки параметрів розподілу дискретної випадкової величини, закон розподілу якої має вигляд:

$$P(X = x_i) = p(x_i, \Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_k).$$

Складаємо функцію правдоподібності, яка дорівнює ймовірності того, що елементи вибірки приймуть конкретні значення $x_1, x_2, ..., x_n$, тобто: $L^*(x_1, x_2, \ldots, x_n, \Theta_1, \ldots, \Theta_k) = p(x_1, \Theta_1, \ldots, \Theta_k) \cdot p(x_2, \Theta_1, \ldots, \Theta_k) \cdot \ldots \cdot \cdot p(x_n, \Theta_1, \ldots, \Theta_k)$. В якості оцінок невідомих параметрів $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$ приймаємо такі значення $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2, \ldots, \tilde{\Theta}_k$, які доставляють максимум функції правдоподібності.

Очевидно, що L^* та $\ln L^*$ досягають максимуму при одних і тих же значеннях параметрів $\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_k$. Тому на практиці для спрощення обчислень як функцію правдоподібності зручно розглядати $\ln L^* = L$, тобто:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \Theta_1, ..., \Theta_k) = \sum_{i=1}^{n} \ln \mathrm{p}(x_i, \Theta_1, ..., \Theta_k).$$

Використовуючи необхідні умови існування екстремуму, складаємо систему рівнянь:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, ..., x_n, \Theta_1, ..., \Theta_k)}{\partial \Theta_i} = 0, \qquad (i = \overline{1, k}).$$

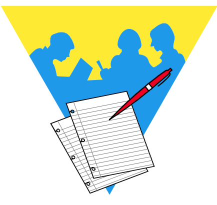
Розв'язуючи систему рівнянь, отримуємо оцінки параметрів $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2, \ldots, \tilde{\Theta}_k$.

2. Нехай знаходимо оцінки параметрів розподілу неперервної випадкової величини зі щільністю розподілу $f(x, \Theta_1, ..., \Theta_k)$. Тоді функція правдоподібності визначається так:

$L^*(x_1, ..., x_n, \Theta_1, ..., \Theta_k) = f(x_1, ..., \Theta_1, ..., \Theta_k) \cdot f(x_2, \Theta_1, ..., \Theta_k) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \Theta_1, ..., \Theta_k)$

або $L(x_1, ..., x_n, \Theta_1, ..., \Theta_k) = \ln L^* = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i, \Theta_1, \ldots, \Theta_k)$.

Далі чинимо аналогічно випадку 1.



ПРИКЛАД

399. Є вибірка $x_1, ..., x_n$, з генеральної сукупності, розподіленої за законом Пуассона. Знайти оцінку параметра λ, використовуючи метод найбільшої правдоподібності.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Якщо генеральна сукупність розподілена за законом Пуассона, то:

$$P(X = m) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{m!}.$$

Тоді:

$$L(x_1,..., x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \ln(e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}) = \sum_{i=1}^{n} [-\lambda + x_i \ln\lambda - \ln(x_i!)] =$$

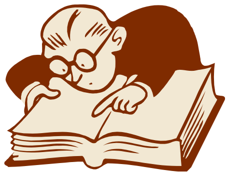
$$= -n\lambda + \ln\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!).$$

Знаходимо частинну похідну $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ і прирівнюємо її до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Звідси отримуємо: $\tilde{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$.

Легко перевірити, що при цьому значенні $\tilde{\lambda}$ функція L має максимум.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

400. Є вибірка $x_1, x_2, ..., x_n$ об'єму n з генеральної сукупності, що має геометричний розподіл, тобто: $P(X = m) = (1 - p)^{m-1} \cdot p$. Знайти методом найбільшої правдоподібності оцінку параметра p.

401. З генеральної сукупності, розподіленої за біноміальним законом: $X = 0, 1, 2, ..., m$; $P(X = k) = P_m(k) = C_m^k p^k (1 - p)^{m-k}$, вилучена вибірка об'єму n: $x_1, x_2, ..., x_n$. Знайти методом максимальної правдоподібності оцінку параметра p.

402. Здійснено дві серії з n_1 і n_2 незалежних випробувань, причому в першій серії подія A сталася m_1 разів, а в другій серії m_2 рази. Знайти методом найбільшої правдоподібності оцінку невідомої імовірності p появи події A при кожному випробуванні, якщо ця ймовірність одна й та ж в обох серіях випробувань.

403. Є вибірка $x_1, x_2, ..., x_n$ з генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом з невідомими параметрами a та σ. Знайти методом максимальної правдоподібності оцінки цих параметрів.

404. Є вибірка $x_1, x_2, ..., x_n$ з генеральної сукупності, що має показниковий розподіл з невідомим параметром λ. Знайти оцінку параметра λ, використовуючи метод найбільшої правдоподібності.

2.9. Інтервальні оцінки. Надійні інтервали

Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу. ***Довірчим інтервалом*** для параметра Θ називається інтервал (Θ_1, Θ_2), що містить істинне значення параметра з заданою ймовірністю γ=1– α, тобто $P(\Theta_1 < \Theta < \Theta_2) = \gamma$.

Для симетричного щодо $\tilde{\Theta}$ довірчого інтервалу його ширина 2δ визначається умовою: $P(|\Theta - \tilde{\Theta}| < \delta) = \gamma$.

Число γ = 1– α називається ***довірчою ймовірністю (надійністю)***, а значення α – ***рівнем значущості***. Нижня і верхня границі надійного інтервалу визначаються за результатами спостережень, і, отже, є випадковими величинами. У зв'язку з цим говорять, що довірчий інтервал накриває параметр, що оцінюємо, з ймовірністю γ = 1– α. Зазвичай надійна ймовірність задається заздалегідь, причому за γ беруть число, близьке до одиниці. Найбільш часто використовують значення, рівні 0,90; 0,95; 0,99; 0,999.

Нехай x_1, x_2, ..., x_n – вибірка з генеральної сукупності, що має нормальний розподіл. Розглянемо задачу побудови довірчого інтервалу для математичного сподівання в двох випадках.

1. Нехай середнє квадратичне відхилення σ відоме. Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання a за вибірковою середньою $\bar{x}$ знаходимо з нерівності:

$$\mathrm{P}(|\bar{x} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = \gamma .$$

Позначивши $\dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} = t$, отримаємо: $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Тоді: $\mathrm{P}(\bar{x} - \delta < a < \bar{x} + \delta) = 2\Phi(t) = \gamma$.

Щоб по заданій довірчій імовірності γ знайти довірчий інтервал, необхідно знайти значення t з рівності $2\Phi(t) = \gamma$, тобто: $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$. Для цього використовуємо таблицю функції $\Phi(x)$ (див. Додаток 3).

Потім знаходимо $\delta = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$ і записуємо відповідь: $\bar{x} - \delta < a < \bar{x} + \delta$.

2. Нехай середнє квадратичне відхилення σ невідоме. За вибіркою обчислюємо:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \qquad \text{та} \qquad \hat{S} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} .$$

Виправлене середнє квадратичне відхилення $\hat{S}$ можна обчислювати також за формулою: $\hat{S} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot S$. Потрібно побудувати надійний інтервал для математичного сподівання a, що відповідатиме довірчій ймовірності γ. Розглянемо випадкову величину: $T = \frac{\bar{x} - a}{\hat{S} / \sqrt{n}}$. Випадкова величина T розподілена за законом Стьюдента з $k = n - 1$ степенями свободи. Щільність розподілу ймовірностей має вигляд:

$$S_n(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

де $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ – гама-функція.

З нерівності $P(|T| < t_\gamma) = 2\int_0^{t_\gamma} S_n(t)dt = \gamma$

отримуємо: $P\left(\bar{x} - \frac{t_\gamma \hat{S}}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t_\gamma \hat{S}}{\sqrt{n}}\right) = 2\int_0^{t_\gamma} S_n(t)dt = \gamma$.

Є готова таблиця (см. Додаток 5), користуючись якою по довірчій ймовірності γ та числу степенів свободи $k = n - 1$ можна знайти величину t_γ. Таким чином, щоб по заданій довірчій ймовірності γ знайти довірчий інтервал для математичного сподівання a, необхідно знайти величину t_γ (див. Додаток 5), потім обчислити $\delta = \frac{t_\gamma \cdot \hat{S}}{\sqrt{n}}$ та записати відповідь:

$$\bar{x} - \delta < a < \bar{x} + \delta.$$

ЗАУВАЖЕННЯ. При необмеженому зростанні об'єму вибірки n розподіл Стьюдента наближається до нормального. Тому при $n > 30$ можна замість розподілу Стьюдента користуватися нормальним розподілом, тобто σ замінити на $\hat{S}$ і використовувати формули, розглянуті в першому випадку.

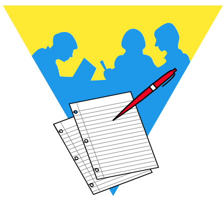
3. Вкажемо тепер довірчий інтервал для дисперсії σ^2 у разі вибірки з нормальної генеральної сукупності, причому математичне сподівання невідомо. Оскільки $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2_{\text{випр.}}}{\sigma^2}$ має розподіл χ^2 з $\nu = n - 1$ степенями свободи, то:

$$\underline{\chi^2_{\alpha,\,\nu}} < \frac{(n-1)S_{\text{випр.}}}{\sigma^2} < \overline{\chi^2_{\alpha,\,\nu}},$$

де $\underline{\chi^2_{\alpha,\,\nu}} = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},\,\nu}$, $\overline{\chi^2_{\alpha,\,\nu}} = \chi^2_{\frac{\alpha}{2},\,\nu}$ і знаходяться по таблиці (див. Додаток 4).

Отже

$$\sqrt{\frac{n-1}{\overline{\chi^2_{\alpha,\,\nu}}}}S_{\text{випр.}} < \sigma < \sqrt{\frac{n-1}{\underline{\chi^2_{\alpha,\,\nu}}}}S_{\text{випр.}}.$$



ПРИКЛАДИ

405. Випадкова величина X має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 2$. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання a за результатами дев'яти спостережень за умови, що вибіркова середня $\overline{x} = 4{,}12$, а довірча ймовірність $\gamma = 0{,}92$.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Знаходимо значення t із рівності $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$. В даному випадку $\Phi(t) = \frac{0{,}92}{2} = 0{,}46$. По таблиці (див. Додаток 3) знаходимо $t = 1{,}75$. Обчислюємо δ за формулою $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Отримуємо: $\delta = \frac{1{,}75 \cdot 2}{9} = 1{,}17$.

Остаточно отримуємо:

$$4{,}12 - 1{,}17 < a < 4{,}12 + 1{,}17, \text{ тобто: } 2{,}95 < a < 5{,}29.$$

406. Знайти мінімальний об'єм вибірки, за яким з надійністю 0,975 точність оцінки математичного сподівання a генеральної сукупності по вибірковій середній буде дорівнювати $\delta = 0{,}3$, якщо відоме середнє квадратичне відхилення $\sigma = 1{,}2$ нормально розподіленої генеральної сукупності.

РОЗВ’ЯЗАННЯ

За умовою задач довірча ймовірність $\gamma = 0{,}975$. Звідси отримуємо: $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0{,}4875$. По таблиці (див. Додаток 3) знаходимо $t = 2{,}24$. Із співвідношення $\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma} = t$ знаходимо n: $n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}$.

Підставляємо $t = 2{,}24$; $\sigma = 1{,}2$; $\delta = 0{,}3$. Отримуємо $n = 80{,}28$. Оскільки n ціле число, то мінімальний об'єм вибірки: $n = 81$.

407. З генеральної сукупності взята вибірка об'єму $n = 10$:

x_i	–2	1	2	3	4	5
p_i	2	1	2	2	2	1

Оцінити з надійністю 0,95 математичне сподівання a нормально розподіленої випадкової величини за вибірковою середньою за допомогою довірчого інтервалу.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Знайдемо вибіркову середню $\bar{x}$ і виправлене середнє квадратичне відхилення $\hat{S}$.

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i = \frac{1}{10}\cdot 20 = 2;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i = \frac{1}{10}\cdot 92 = 9{,}2;$$

$$S^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 = 9{,}2 - 4 = 5{,}2;$$

$$\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{10}{9}\cdot 5{,}2 = 5{,}78.$$

Тоді: $\hat{S} = \sqrt{5{,}78} = 2{,}4$.

По таблиці (див. Додаток 5) за довірчою ймовірністю $\gamma = 0{,}95$ та числом степенів свободи $k = n - 1 = 9$ знаходимо $t_\gamma = 2{,}26$.

Обчислюємо $\delta = \frac{t_\gamma \cdot \hat{S}}{\sqrt{n}}$. Отримуємо: $\delta = \frac{2{,}26\cdot 2{,}4}{\sqrt{10}} = 1{,}72$.

Таким чином, 2 1,72 < a < 2 + 1,72, тобто: 0,28 < a < 3,72.

408. При багаторазовому вимірюванні еталонного зразка на приладі були одержані наступні величини відхилень або помилок показань приладу від дійсного значення (еталону): 0,24; 0,03; – 0,12; – 0,15; – 0,31; 0,08; – 0,26; 0,19. Знайти довірчий інтервал з довірчою ймовірністю 0,95 для дисперсії вимірювань на цьому приладі.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Знайдемо $\bar{x}$ і $S^2_{\text{випр.}}$:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{8} x_k}{8} = -\frac{0{,}18}{8} = -0{,}02;$$

$$S^2_{\text{випр.}} = \frac{1}{8-1}\sum_{k=1}^{8}(x_k - (-0{,}02))^2 = \frac{0{,}3016}{7} = 0{,}043.$$

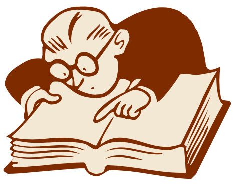
Для заданого надійного рівня $\gamma = 0{,}95$ знаходимо: $\alpha = 1-\gamma = 0{,}05$ і $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$.

Оскільки число степенів свободи $\underline{\nu = 8 - 1 = 7}$, по таблиці (див. Додаток 4) визначаємо значення: $\chi^2_{0,05} = \chi^2_{0,025;7} = 16{,}0$ і $\underline{\chi^2_{0,05}} = \chi^2_{0,975;7} = 1{,}69$.

Тоді для σ^2 маємо:

$$\frac{7 \cdot 0{,}043}{16{,}0} \le \sigma^2 \le \frac{7 \cdot 0{,}043}{1{,}69}, \text{ або}$$

$$0{,}14 \le \sigma \le 0{,}42.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

409. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю 0,95 невідомого математичного сподівання *a* нормально розподіленої випадкової величини, якщо дано вибіркову середню $\bar{x} = 14$, середнє квадратичне відхилення σ = 5, об'єм вибірки *n* = 25.

410. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання *a* нормально розподіленої випадкової величини, якщо відомо середнє квадратичне відхилення, вибіркова середня $\bar{x}$ і об'єм вибірки *n*:

а) $\sigma = 4$; $\bar{x} = 10{,}2$; $n = 16$; $\gamma = 0{,}95$;

б) $\sigma = 4$; $\bar{x} = 10{,}2$; $n = 16$; $\gamma = 0{,}99$;

в) $\sigma = 5$; $\bar{x} = 16{,}8$; $n = 25$; $\gamma = 0{,}99$.

411. Вибірка з великої партії електроламп містить 100 ламп. Середня тривалість горіння лампи вибірки дорівнювала 1000 годин. Знайти з надійністю 0,95 довірчий інтервал для середньої тривалості *a* горіння лампи всієї партії, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампи σ = 40 годин.

412. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,925 точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності за вибірковою середньою буде дорівнювати 0,2, якщо відомо середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності $\sigma = 1{,}5$.

413. Випадкова величина Х має нормальний розподіл з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 1{,}5$. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання a за результатами 20 спостережень за умови, що вибіркова середня $\bar{x} = 5{,}8$, а довірча ймовірність γ дорівнює:

а) 0,9; б) 0,95; в) 0,999.

414. Випадкова величина розподілена нормально і для $n = 16$ обчислені $\bar{x} = 20{,}2$ і $\hat{S} = 0{,}8$. Визначити інтервальну оцінку для математичного сподівання a, якщо $\gamma = 0{,}95$.

415. З генеральної сукупності витягнута вибірка об'єму $n = 12$:

x_i	– 0,5	– 0,4	–0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Оцінити з надійністю 0,95 математичне сподівання a нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності за допомогою довірчого інтервалу.

416. За даними 9 незалежних рівноточних вимірювань деякої фізичної величини знайдені вибіркова середня $\bar{x} = 30{,}1$ і виправлене середнє квадратичне відхилення $\hat{S} = 6$. Оцінити дійсне значення вимірюваної величини за допомогою довірчого інтервалу знадійністю:

а) $\gamma = 0{,}99$; б) $\gamma = 0{,}95$.

417. За даними 16 незалежних рівноточних вимірювань деякої фізичної величини знайдені середнє арифметичне результатів вимірювань $\bar{x} = 42{,}8$ і виправлене середнє квадратичне відхилення $\hat{S} = 8$. Оцінити дійсне значення вимірюваної величини з надійністю:

а) $\gamma = 0{,}999$; б) $\gamma = 0{,}99$; в) $\gamma = 0{,}95$.

2.10. Критерій Пірсона

Нехай за вибіркою об'єму n побудований дискретний або інтервальний варіаційний ряд, тобто:

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2	…	n_m

або

$a_{i-1} \div a_i$	$a_0 \div a_1$	$a_1 \div a_2$	…	$a_{m-1} \div a_m$
n_i	n_1	n_2	…	n_m

$n_1, n_2, \ldots, n_m$ – емпіричні частоти, причому $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$.

Перевіряється гіпотеза H_0, яка стверджує, що генеральна сукупність має конкретний закон розподілу (нормальний, Пуассона тощо).

Процедура застосування критерію Пірсона (критерію χ^2) включає наступні етапи:

1. За варіаційним рядом знаходимо оцінки невідомих параметрів передбачуваного закону розподілу.

2. Визначаємо теоретичні частоти на основі отриманого закону розподілу.

У випадку, якщо X – дискретна випадкова величина, обчислюємо ймовірності: $p_i = P(X = x_i)$. Якщо X – неперервна випадкова величина, визначаємо ймовірності p_i попадання в i-й інтервал, тобто:

$p_i = P(a_{i-1} < X < a_i)$.

Теоретичну частоту $\tilde{n}_i$ обчислюємо за формулою $\tilde{n}_i = p_i \cdot n$, де n – об'єм вибірки. Оскільки np_i можуть бути дробовими, а частоти $\tilde{n}_i$ повинні виражатися цілими числами, то за теоретичну частоту $\tilde{n}_i$ можна взяти найближче до np_i ціле число, при цьому $\sum_{i=1}^{m} \tilde{n}_i = n$.

3. За критерій перевірки нульової гіпотези H_0 приймається випадкова величина:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}.$$

Підставляючи в цю формулу задані емпіричні частоти n_i і обчислені теоретичні частоти $\tilde{n}_i$, отримаємо значення випадкової величини χ^2, яке позначимо $\chi^2_{\text{спост}}$.

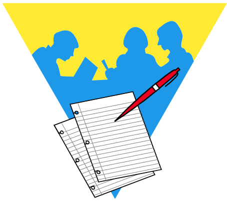
4. Закон розподілу випадкової величини χ^2 визначається одним параметром ν – числом ступенів свободи, яке обчислюється за формулою $\nu = m - k - 1$, де m – число варіант або інтервалів заданого варіаційного ряду, k – число параметрів передбачуваного теоретичного розподілу, які оцінюються за вибіркою. Зокрема, якщо передбачуваний розподіл нормальний, то оцінюються два параметри (математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення σ), тому $k = 2$, а число ступенів свободи $\nu = m - 3$. Якщо припускають, що генеральна сукупність розподілена за законом Пуассона, то оцінюють один параметр λ, тому $k = 1$ та $\nu = m - 2$. Отже, обчислюємо число ступенів свободи.

5. За заданим рівнем значущості α та числом ступенів свободи ν по таблиці критичних точок розподілу χ^2 (див. Додаток 4), знаходимо критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, \nu)$.

6. Якщо $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{кр}}$ немає підстав відкидати гіпотезу H_0. Якщо $\chi^2_{\text{спост}} > \chi^2_{\text{кр}}$ – гіпотезу H_0 відкидають.

ЗАУВАЖЕННЯ.

Для застосування критерію Пірсона необхідно, щоб об'єм вибірки n був досить великий ($n \geq 50$). Крім цього частоти n_i повинні бути ≥ 5. Тому частоти $n_i < 5$ слід об'єднати.



ПРИКЛАДИ

418. При випробуванні радіоелектронної апаратури фіксувалася кількість відмов. Результати 757 випробувань наводяться нижче:

Число відмов	0	1	2	3	4	5	≥ 6
Кількість випадків	427	235	72	21	1	1	0

Перевірити гіпотезу H_0 про те, що кількість відмов має розподіл Пуассона, при $\alpha = 0{,}05$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Знайдемо оцінку параметра λ розподілу Пуассона, що дорівнюватиме середньому числу відмов. Складемо розрахункову таблицю:

i	x_i	n_i	$x_i n_i$
1	0	427	0
2	1	235	235
3	2	72	144
4	3	21	63
5	4	1	4
6	5	1	5
7	6	0	0
$\sum$		757	451

Знаходимо: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{7} n_i} = \dfrac{451}{757} = 0{,}6$.

Отже, теоретичний закон розподілу числа відмов апаратури має вигляд:

$$\mathrm{p}_i = \mathrm{P}(X = x_i) = \frac{(0{,}6)^{x_i}}{x_i!} \cdot e^{-0{,}6}, \text{ де } x_i = \overline{0{,}5}.$$

2. На основі отриманого закону розподілу знаходимо теоретичні частоти $\tilde{n}_i$.

Складемо розрахункову таблицю. Ймовірності p_i знаходимо за таблицею (див. Додаток. 1).

x_i	p_i	np_i	$\tilde{n}_i$
0	0,5488	415,4416	416
1	0,3293	249,2801	249
2	0,0988	74,7916	75
3	0,0198	14,9886	15
4	0,0030	2,2710	2
5	0,0004	0,3028	0
≥ 6	0	0	0
$\sum$			757

3. За поданими в умові емпіричними частотами n_i і отриманими теоретичними частотами $\tilde{n}_i$ обчислюємо величину: $\chi^2_{спост} = \sum_{i=1}^{7} \frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$.

Складемо розрахункову таблицю, об'єднуючи останні три рядки з рядком для x_i = 3, тому що застосування критерію Пірсона вимагає, щоб частоти не були малі.

i	n_i	$\tilde{n}_i$	$(n_i - \tilde{n}_i)^2$	$\frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$
1	427	416	121	0,291
2	235	249	196	0,787
3	72	75	9	0,120
4	23	17	36	2,118
$\sum$				$\chi^2_{\text{спост}} = 3{,}316$

Оскільки за вибіркою оцінювався один параметр λ, то число ступенів свободи дорівнює: $\nu = m - k - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$.

За таблицею (див. Додаток 4) знаходимо: $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 2) = 5{,}99$.

Оскільки $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{кр}}$, то гіпотеза про розподіл числа відмов апаратури за законом Пуассона приймається.

419. Користуючись критерієм Пірсона, при рівні значущості $\alpha=0{,}05$ встановити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності з даними вибірки об'єму $n=100$:

$a_{i-1} \div a_i$	$3 \div 8$	$8 \div 13$	$13 \div 18$	$18 \div 23$	$23 \div 28$	$28 \div 33$	$33 \div 38$
Частоти	6	8	15	40	16	8	7

РОЗВ'ЯЗАННЯ

1. Знайдемо оцінки параметрів a та σ нормального розподілу, для чого обчислимо вибіркову середню $\overline{x}$ і середнє квадратичне відхилення S.

Складемо розрахункову таблицю:

i	$a_{i-1} \div a_i$	n_i	$x_i = \dfrac{a_{i-1}+a_i}{2}$	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$
1	$3 \div 8$	6	5,5	33	187,5
2	$8 \div 13$	8	10,5	84	882
3	$13 \div 18$	15	15,5	232,5	3603,75
4	$18 \div 23$	40	20,5	820	16810
5	$23 \div 28$	16	25,5	408	10404
6	$28 \div 33$	8	30,5	244	7442
7	$33 \div 38$	7	35,5	248,5	8827,45
$\sum$		100		2070	48156,7

Таким чином, $\overline{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7} x_i n_i}{n} = \dfrac{2070}{100} = 20{,}7$;

$$S^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{7} x_i^2 n_i}{n} - (\overline{x})^2 = \frac{48156{,}7}{100} - (20{,}7)^2 = 481{,}567 - 428{,}49 = 53{,}077;$$

$$S = \sqrt{53{,}077} = 7{,}28.$$

Отже, передбачуваний теоретичний закон розподілу генеральної сукупності має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{7{,}28 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-20{,}7)^2}{2\cdot(7{,}28)^2}}.$$

2. Обчислимо теоретичні частоти $\tilde{n}_i$. Для цього спочатку знайдемо теоретичні ймовірності p_i попадання нормально розподіленої (за прийнятою гіпотезою) випадкової величини X в інтервал $(a_{i-1}; a_i)$:

$$p_i = P(a_{i-1} < X < a_i) = \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}}{S}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \bar{x}}{S}\right) = \Phi(Z_i) - \Phi(Z_{i-1}).$$

Підкреслимо, що найменше значення Z_i=Z_0 вважають рівним $-\infty$, а найбільше рівним $+\infty$.

Складемо розрахункову таблицю:

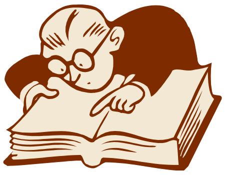
$a_{i-1} \div a_i$	$Z_{i-1} = \frac{a_{i-1} - \bar{x}}{S}$	$Z_i = \frac{a_i - \bar{x}}{S}$	$\Phi(Z_{i-1})$	$\Phi(Z_i)$	$p_i = \Phi(Z_i) - \Phi(Z_{i-1})$	np_i	$\tilde{n}_i$
3 ÷ 8	$-\infty$	–1,74	–0,5000	–0,4591	0,0409	4,09	4
8 ÷ 13	–1,74	–1,06	–0,4591	–0,3554	0,1037	10,37	10
13 ÷ 18	–1,06	–0,37	–0,3554	–0,1443	0,2111	21,11	21
18 ÷ 23	–0,37	0,32	–0,1443	0,1255	0,2698	26,98	27
23 ÷ 28	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158	21,58	22
28 ÷ 33	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132	11,32	11
33 ÷ 38	1,69	$+\infty$	0,4545	0,5000	0,0455	4,55	5
$\sum$					1,0000		100

3. Порівняємо емпіричні і теоретичні частоти. Складемо розрахункову таблицю:

i	n_i	$\tilde{n}_i$	$(n_i - \tilde{n}_i)^2$	$\frac{(n_i - \tilde{n}_i)^2}{\tilde{n}_i}$
1	6	4	4	1
2	8	10	4	0,4
3	15	21	36	1,7143
4	40	27	169	6,2593
5	16	22	36	1,6364
6	8	11	9	0,8182
7	7	5	4	0,8
$\sum$				$\chi^2_{\text{спост}} = 12,6282$

Обчислимо число ступенів свободи: $\nu = m - k - 1 = 7 - 2 - 1 = 4$. За таблицею (див. Додаток 4), за рівнем значущості $\alpha = 0,05$ і числом ступенів свободи $\nu = 4$ знаходимо: $\chi^2_{\text{кр}}(0,05; 4) = 9,49$.

Оскільки $\chi^2_{\text{спост}} > \chi^2_{\text{кр}}$, то гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності відкидається.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

420. Фірма з метою встановлення популярності її продукції опитала в кожному зі 100 населених пунктів по 20 осіб. Розподіл x_i – кількості осіб, які незнайомі з продукцією фірми таке:

x_i	0	1	2	3	4	5
Число пунктів	65	20	10	3	1	1

Чи можна при 5%-му рівні значущості вважати, що число осіб, незнайомих з продукцією фірми, підпорядковується закону Пуассона?

421. У цеху з 10 верстатами щодня реєструвалося число верстатів, що вийшли з ладу. Всього було проведено 200 спостережень, результати наведені нижче:

Число верстатів, що вийшли з ладу	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число зареєстрованих випадків	41	62	45	22	16	8	4	2	0	0	0

Використовуючи критерій Пірсона, перевірити гіпотезу H_0 про те, що число верстатів, які вийшли з ладу, має розподіл Пуассона. Прийняти $\alpha = 0{,}05$.

422. Нижче наводяться дані про число деталей, що надходять на конвеєр протягом 600 двохвилинних інтервалів:

Число деталей	0	1	2	3	4	5	6
Число інтервалів	400	167	29	3	0	0	1

Використовуючи критерій χ^2 перевірити гіпотезу H_0 про пуассонівський розподіл числа деталей при $\alpha = 0{,}1$.

423. 200 робітників виготовляють однотипні вироби. Для контролю якості роботи перевірено по 1000 одиниць продукції, виготовлених кожним з них. Результати перевірки представлені в таблиці:

Кількість бракованих виробів	0	1	2	3	4
Число робітників	109	65	22	3	1

За допомогою критерію Пірсона перевірити гіпотезу про розподіл бракованих виробів за законом Пуассона. Прийняти $\alpha = 0{,}05$.

424. Норми отриманого прибутку у 25 об'єктах однієї фірми наведено в таблиці:

норма прибутку	0 ÷ 0,2	0,2 ÷ 0,4	0,4 ÷ 0,6	0,6 ÷ 0,8	0,8 ÷ 1,0
число об'єктів	2	4	7	9	3

Використовуючи критерій Пірсона, перевірити гіпотезу про згоду спостережень з нормальним законом розподілу, прийнявши рівень значущості рівним 0,05.

425. Страхова компанія аналізує величину виплат страхових премій за минулий рік:

Премія (грн)	500 ÷ 1500	1500 ÷ 2500	2500 ÷ 3500	3500 ÷ 4500	4500 ÷ 5500	5500 ÷ 6500
Кількість виплат	3	7	20	15	10	5

Використовуючи критерій Пірсона, перевірити гіпотезу про згоду спостережень з нормальним законом розподілу, прийнявши рівень значущості рівним 0,05.

426. Компанія проводить маркетингові дослідження вартості покупок 50 відвідувачів супермаркету. Результати наведені в таблиці:

Вартість покупки (грн)	0 ÷ 20	20 ÷ 40	40 ÷ 60	60 ÷ 80	80 ÷ 100
кількість покупок	2	8	20	15	5

За допомогою критерію Пірсона при рівні значущості 0,1 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл вартості покупок.

427. Рівень рентабельності підприємств легкої промисловості характеризується такими даними:

Рівень рентабельності (%)	0 ÷ 5	5÷ 10	10 ÷ 15	15 ÷ 20	20 ÷ 25	25 ÷ 30	30 ÷ 40
Кількість підприємств	3	8	16	22	24	18	9

Перевірити, використовуючи критерій Пірсона, гіпотезу про нормальний розподіл рівня рентабельності, прийнявши за рівень значущості $\alpha = 0,05$.

2.11. *Критерій Фішера*

Нехай X і Y дві нормально розподілені генеральні сукупності. Нехай з них вилучені вибірки об'єму n_1 і n_2 відповідно, та знайдено вибіркові виправлені дисперсії $\hat{S}_x{}^2$ і $\hat{S}_y{}^2$.

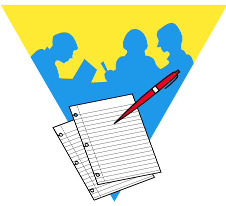
Потрібно перевірити гіпотезу H_0, яка полягає в тому, що $\hat{S}_x{}^2 = \hat{S}_y{}^2$, інакше $M(\hat{S}_x{}^2) = M(\hat{S}_y{}^2)$ (оскільки $\hat{S}_x{}^2$ і $\hat{S}_y{}^2$ незміщені оцінки дисперсій). Позначимо більшу з $\hat{S}_x{}^2$, $\hat{S}_y{}^2$ через $\hat{S}_б{}^2$, а меншу через $\hat{S}_м{}^2$.

Розглянемо випадкову величину $F = \dfrac{\hat{S}_б{}^2}{\hat{S}_м{}^2}$, яка має розподіл Фішера за умови справедливості H_0 із ступенями свободи $n_1 - 1$ і $n_2 - 1$ відповідно (де n_1 – об'єм вибірки, відповідний $\hat{S}_б{}^2$).

1 випадок. Нехай H_0: $D(X)=D(Y)$, а конкуруюча гіпотеза H_1: $D(X) > D(Y)$. У цьому випадку будують правосторонню критичну область і знаходять $P(F > F_{кр}\,(\alpha, n_1 - 1, n_2 - 1)) = \alpha$. $F_{кр}$ знаходять за таблицями (див. Додаток 8) при заданому рівні значущості α.

Якщо $F_{набл.} < F_{кр.}$, то немає підстав відкинути нульову гіпотезу.

2 випадок. H_0: $D(X)=D(Y)$, а H_1: $D(X) \neq D(Y)$. У цьому випадку будують двосторонню критичну область і знаходять: $P(F < F_1) = \dfrac{\alpha}{2}$, $P(F > F_2) = \dfrac{\alpha}{2}$, причому достатньо знайти лише $F_2 = F_{кр.}(\dfrac{\alpha}{2},\ n_1 - 1,\ n_2 - 1)$ за таблицями Додатка 8.



ПРИКЛАДИ

428. Нехай об'єми вибірок 12 і 15 відповідно, а виправлені вибіркові дисперсії рівні S_x^2=11,41 і S_y^2=6,52, а $\alpha = 0{,}05$. Перевірити гіпотезу H_0: $D(X)=D(Y)$ при конкуруючій гіпотезі H_1: $D(X) > D(Y)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

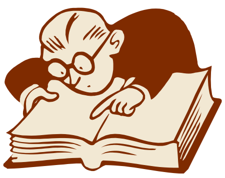
Знаходять $F_{спост} = \dfrac{11{,}41}{6{,}52} = 1{,}75$. Так як критична область правостороння: $D(X) > D(Y)$, то достатньо знайти за таблицею (див. Додаток 8) критичну точку $F_{кр}$. (0,05; 11,14), яка виявляється рівною 2,56.

Оскільки $F_{спост} < F_{кр}$, то немає підстав відкинути нульову гіпотезу.

429. Нехай об'єми незалежних вибірок, вилучених з нормальних генеральних сукупностей, відповідно дорівнюють 14 і 10, а знайдені виправлені вибіркові дисперсії відповідно 0,84 і 2,52, $\alpha = 0{,}1$. Перевірити нульову гіпотезу $D(X) = D(Y)$ при конкуруючій $D(X) \neq D(Y)$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Знаходимо $F_{спост} = \dfrac{2{,}52}{0{,}84} = 3$, а потім по таблиці (див. Додаток 8) $F_{кр}$ (0,05; 9,13), яка виявляється рівною 2,72. Так як $F_{спост} > F_{кр}$, то нульову гіпотезу відкидаємо.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

430. Об'єми вибірок дорівнюють 9 і 16 відповідно. А виправлені вибіркові дисперсії 34,02 і 12,15. Перевірити нульову гіпотезу $D(X) = D(Y)$ при конкуруючій $D(X) > D(Y)$.

431. Об'єми вибірок 9 і 6, а вибіркові дисперсії 14,4 і 20,5. Перевірити нульову гіпотезу при конкуруючій $D(X) \neq D(Y)$.

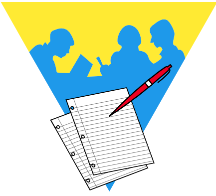
2.12. Критерій згоди Колмогорова

За допомогою цього критерію виявляють відхилення від нормального закону при малих вибірках.

Для перевірки гіпотези нормальності необхідно обчислити значення $D_{емп} = \max|F_{теор}(t) - F_{емп}(t)|$ і порівняти його з $D_{кр}$, яке знаходиться за Додатком 7 при заданих n і рівні значущості α.

Якщо $D_{емп} < D_{кр}$, то гіпотеза приймається.

ЗАУВАЖЕННЯ. При використанні критерію згоди Колмогорова всі параметри теоретичного розподілу вважаються відомими.



ПРИКЛАДИ

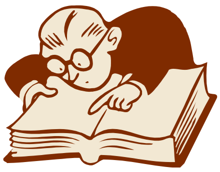
432. У 10-ти дослідах отримали наступні значення величини, які нас цікавлять: 5,30; 5,38; 5,28; 5,40; 5,42; 5,41; 5,39; 5,51; 5,43; 5, 47. Перевірити гіпотезу про нормальність генеральної сукупності, якщо a = 5,40; σ = 0,05.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Складемо таблицю:

i	x_i	$F_{емп}(x_i)$	$z_i = \dfrac{x_i - 5{,}40}{0{,}05}$	$F_{теор}(z_i)$	$\Delta = F_{теор} - F_{емп}$
1	5,28	0,1	–2,4	0,0082	–0,0918
2	5,30	0,2	–2,0	0,0228	–0,1772
3	5,38	0,3	–0,4	0,3446	0,0446
4	5,39	0,4	–0,2	0,4207	0,0207
5	5,40	0,5	0	0,5000	0
6	5,41	0,6	0,2	0,5793	–0,0207
7	5,42	0,7	0,4	0,6554	–0,0446
8	5,43	0,8	0,6	0,7257	–0,743
9	5,47	0,9	1,6	0,9452	0,0452
10	5,51	1,0	2,2	0,5961	0,0139

Для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ і $n = 10$ за Додатком 7 знаходимо $D_{кр}$ = 0,409. Оскільки $\max|F_{теор} - F_{емп}| = 0{,}1772$, то $D_{емп} < D_{кр}$ і гіпотезу про нормальність генеральної сукупності приймаємо.



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

433. Нижче наводяться дані о фактичних об'ємах збуту товару (в умовних одиницях):

Район	1	2	3	4	5
Обсяг збуту	110	130	70	90	100

Чи є ця вибірка вибіркою з нормальної генеральної сукупності, якщо математичне сподівання дорівнює 100, а дисперсія 400?

434. Є вибірка з деякої генеральної сукупності: –0,5; 1,2; 0; 0,8; 1,2; –0,4; 0,2; 1,5; 0,6; –0,4; 1,0. Перевірити гіпотезу про нормальність вибірки, якщо математичне сподівання дорівнює 0,41, а дисперсія 0,5.

2.13. Вибіркове рівняння лінійної регресії

Розглянемо двовимірну випадкову величину (X, Y). Нехай проведено n незалежних випробувань, в результаті яких отримано n пар чисел: (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), де x_i – значення випадкової величини X, y_i – значення випадкової величини Y. Необхідно знайти наближене представлення значень однієї з випадкових величин як функції значень іншої випадкової величини.

Рівняння $y = f(x)$ називають вибірковим рівнянням регресії Y на X; рівняння $x = \varphi(y)$ називають вибірковим рівнянням випадкової величини X на Y. Якщо $f(x)$ і $\varphi(y)$ лінійні функції, то регресія називається лінійною. В цьому випадку: $y = ax + b$ і $x = cy + d$.

Розглянемо два випадки.

1. Нехай серед точок (x_i, y_i) немає збіжних. Для того щоб скласти вибіркове рівняння прямої лінії регресії, робимо наступне:

а) обчислюємо $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{xy}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$, S_x, S_y за формулами:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2},$$

$$S_x^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2, \quad S_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2;$$

б) обчислюємо вибірковий коефіцієнт кореляції r:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y}.$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції r характеризує силу лінійного кореляційного зв'язку. Чим ближче $|r|$ до одиниці, тим сильніший зв'язок; чим ближче $|r|$ до нуля, тим зв'язок слабший;

в) для отримання рівняння $y = ax + b$ обчислюємо a та b за формулами: $a = r\dfrac{S_y}{S_x}$, $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Для отримання рівняння $x=cy + d$ обчислюємо c і d за формулами:

$$c = r \cdot \frac{S_x}{S_y}, \quad d = \bar{x} - c\bar{y}.$$

Обидві прямі $y=ax + b$ та $x=cy + d$ проходять через точку ($\bar{x}$, $\bar{y}$).

2. При великому n значення x_i може зустрітися m_i раз, значення y_j – n_j раз, одна й та ж пара чисел (x_i, y_j) – n_{ij} раз. У цьому випадку вибірку зручно представляти у вигляді кореляційної таблиці:

$x_i \backslash y_j$	y_1	y_2	…	y_l	m_i
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1l}	m_1
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2l}	m_2
…	…	…	…	…	…
x_k	n_{k1}	n_{k2}	…	n_{kl}	m_k
n_j	n_1	n_2	…	n_l	n

де $m_i = \sum\limits_{j=1}^{l} n_{ij}$, $n_j = \sum\limits_{i=1}^{k} n_{ij}$, об'єм вибірки $n = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{l} n_{ij}$ (зауважимо, що $\sum\limits_{i=1}^{k} m_i = \sum\limits_{j=1}^{l} n_j = n$).

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії знаходимо аналогічно до першого випадку, тільки $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{xy}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ з урахуванням повторюваних значень x_i і y_j обчислюємо за формулами:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} y_j n_j, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} x_i y_j n_{ij},$$

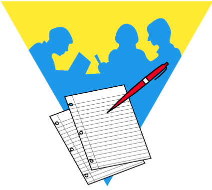
$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i{}^2 m_i, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} y_j{}^2 n_j.$$

Якщо розглядається вибірка з генеральної сукупності неперервних випадкових величин X і Y, то кореляційна таблиця містить проміжки $[a_{i-1}, a_i)$ і $[b_{j-1}, b_j)$. У цьому випадку для обчислення $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{xy}$, $\overline{x^2}$, $\overline{y^2}$ необхідно спочатку перейти до дискретних варіаційних рядів, а потім виконати обчислення за розглянутими вище формулами.

ЗАУВАЖЕННЯ. Якщо значення x_i, y_j – великі або дуже маленькі числа, то при обчисленні $\bar{x}$, $\bar{y}$, S_x, S_y можна використовувати умовні варіанти. Нехай $u_i = \dfrac{x_i - \alpha}{p}$, $v_j = \dfrac{y_j - \beta}{q}$.

Тоді: $\bar{x} = p\bar{u} + \alpha$, $\bar{y} = q\bar{v} + \beta$; $S_x = pS_u$, $S_y = qS_v$.

Перехід до умовних варіантів не змінює величини вибіркового коефіцієнту кореляції, тобто: $r_{xy} = r_{uv} = r$.



ПРИКЛАДИ

435. Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X та X на Y за даними спостережень:

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Складемо розрахункову таблицю:

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	1,00	1,25	1,00	1,562	1,250
2	1,50	1,40	2,25	1,960	2,100
3	3,00	1,50	9,00	2,250	4,500
4	4,50	1,75	20,25	3,063	7,875
5	5,00	2,25	25,00	5,062	11,250
$\sum$	15,00	8,15	57,50	13,897	26,975

Таким чином, з таблиці знаходимо:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = \frac{15}{5} = 3,$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i}{5} = \frac{8{,}15}{5} = 1{,}63,$$

$$\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i y_i}{5} = \frac{26{,}975}{5} = 5{,}395,$$

$$\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} = \frac{57{,}5}{5} = 11{,}5,$$

$$\overline{y^2} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_i^2}{5} = \frac{13{,}897}{5} = 2{,}779.$$

Отже, $S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{11{,}5 - 9} = \sqrt{2{,}5} = 1{,}58$,

$$S_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{2{,}779 - 2{,}657} = \sqrt{0{,}122} = 0{,}35.$$

Обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x\cdot S_y}=\frac{5{,}395-3\cdot 1{,}63}{1{,}58\cdot 0{,}35}=\frac{0{,}505}{0{,}553}=0{,}913.$$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії *Y* на *X* має вигляд $y=ax+b$. Обчислимо його коефіцієнти:

$$a=r\frac{S_y}{S_x}=0{,}913\cdot\frac{0{,}35}{1{,}58}=0{,}202,$$

$$b=\bar{y}-a\bar{x}=1{,}63-0{,}202\cdot 3=1{,}63-0{,}606=1{,}024.$$

Отже, $y=0{,}202\,x+1{,}024$.

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії *X* на *Y* має вигляд $x=cy+d$, де:

$$c=r\frac{S_x}{S_y}=0{,}913\cdot\frac{1{,}58}{0{,}35}=4{,}122,$$

$$d=\bar{x}-c\bar{y}=3-4{,}122\cdot 1{,}63=-3{,}719.$$

Отже, $x=4{,}122\,y-3{,}719$.

436. За даними кореляційної таблиці знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії:

$x \backslash y$	7	13	40	80	200
0	19	2			
4	1	14	3		
6	1		22		
7			2	15	
10					21

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Складемо розрахункові таблиці:

i	x_i	m_i	$x_i m_i$	$x_i^2 m_i$
1	0	21	0	0
2	4	18	72	288
3	6	23	138	828
4	7	17	119	833
5	10	21	210	2100
$\sum$		100	539	4049

j	y_j	n_j	$y_j n_j$	$y_j^2 n_j$
1	7	21	147	1029
2	13	16	208	2704
3	40	27	1080	43200
4	80	15	1200	96000
5	200	21	4200	840000
$\sum$		100	6835	982933

З таблиці знаходимо:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i m_i = \frac{1}{100}\cdot 539 = 5{,}39,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{5} y_j n_j = \frac{1}{100}\cdot 6835 = 68{,}35,$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i{}^2 m_i = \frac{1}{100}\cdot 4049 = 40{,}49,$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{5} y_j{}^2 n_j = \frac{1}{100}\cdot 982933 = 9829{,}33$$

Отже, $S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{40{,}49 - (5{,}39)^2} = 3{,}38,$

$$S_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{9829{,}33 - (68{,}35)^2} = 71{,}82.$$

З вихідної кореляційної таблиці знаходимо:

$$\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i \sum_{j=1}^{5} y_j n_{ij} = \frac{1}{100}(0 + 4(7\cdot 1 + 13\cdot 14 + 40\cdot 3) + 6(7\cdot 1 + 40\cdot 22) +$$

$$+ 7(40\cdot 2 + 80\cdot 15) + 10\cdot 200\cdot 21) = \frac{1}{100}\cdot 57518 = 575{,}18.$$

Обчислимо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x\cdot S_y} = \frac{575{,}18 - 5{,}39\cdot 68{,}35}{3{,}38\cdot 71{,}82} = 0{,}85.$$

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X має вигляд $y=ax + b$, де:

$$a = r\frac{S_y}{S_x} = 0{,}85\cdot\frac{71{,}82}{3{,}38} = 18{,}06,$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 68{,}35 - 18{,}06\cdot 5{,}39 = -28{,}99.$$

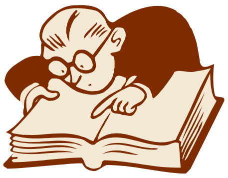
Отже, $y = 18{,}06\,x - 28{,}99$.

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y має вигляд $x=cy + d$, де:

$$c = r\frac{S_x}{S_y} = 0{,}85\cdot\frac{3{,}38}{71{,}82} = 0{,}04,$$

$$d = \bar{x} - c\bar{y} = 5{,}39 - 0{,}04\cdot 68{,}35 = 2{,}66.$$

Отже, $x=0{,}04\,y + 2{,}66$.



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

437. За статистичними даними за 6 років має місце залежність валового випуску продукції підприємства від основних виробничих фондів:

Основні виробничі фонди	120	140	150	160	180	200
Валовий випуск	420	440	510	560	600	620

Використовуючи ці дані, написати вибіркове рівняння лінійної регресії.

438. Туристичну фірму великого курортного міста цікавить зв'язок між числом відпускників, що зупиняються в готелях, і витратами на рекламу готелів. Взято випадкове число готелів – 6, подібних за розміром. Була зібрана наступна інформація за поточний сезон:

Реклама (грн)	9000	6000	10000	8000	7000	4000
Число гостей	1100	1200	1600	1300	1100	800

Побудувати модель лінійної регресії та пояснити значення коефіцієнтів.

439. У таблиці наведено дослідні дані, що характеризують залежність величини врожайності y (ц з 1 га) від терміну збирання x (днів після настання повної стиглості зерна).

x	0	5	10	15	20
y	29,5	28,4	23,4	21,6	18,5

Написати вибіркові рівняння прямих ліній регресії.

440. Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X і X на Y за даними, наведеними в таблиці:

x \ y	5	10	15	20
10	2			
20	5	4	1	
30	3	8	6	3
40		3	6	6
50			2	1

441. Знайти вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X і X на Y за даними, наведеними в таблиці:

x \ y	0	4	6	7	10
7	19	1	1		
13	2	14			
40		3	22	2	
80				15	
200					21

442. При обстеженні 50 учнів отримано наступні дані про їх зріст (x см) та вагу (y кг)

x \ y	24	27	30	33	36	Разом
120	1	3				4
125		2	6	1		9
130		1	5	5		11
135		1	6	7	2	16
140			1	4	2	7
145				1	1	2
150					1	1
Разом	1	7	18	18	6	50

За цими даними обчислити коефіцієнт кореляції і скласти рівняння прямих ліній регресії.

443. Відомо розподіл 100 га орної землі за кількістю внесених добрив X (в ц на 1 га) і врожайності Y (у ц з 1 га):

x \ y	$9 \div 11$	$11 \div 13$	$13 \div 15$	$15 \div 17$	$17 \div 19$	$19 \div 21$
$0 \div 20$	9	4	1			
$20 \div 40$	1	10	9	3		
$40 \div 60$		2	6	14	6	
$60 \div 80$			1	10	18	6

Написати вибіркові рівняння прямих ліній регресії.

444. Розподіл 40 заводів області за кількістю ремонтних слюсарів y та числа верстато-змін x (тис. од.) задано таблицею:

x \ y	$10 \div 15$	$15 \div 20$	$20 \div 25$	$25 \div 30$	$30 \div 35$	$35 \div 40$
$0 \div 0{,}2$	4					
$0{,}2 \div 0{,}4$	2	2				
$0{,}4 \div 0{,}6$			2			
$0{,}6 \div 0{,}8$		6		4	4	
$0{,}8 \div 1{,}0$					6	6
$1{,}0 \div 1{,}2$						4

Написати вибіркове рівняння прямої лінії регресії y на x.

2.14. Вибіркове рівняння параболічної регресії

Якщо графік регресії зображується кривою лінією, то кореляцію називають криволінійною. Зокрема, у разі параболічної кореляції другого порядку вибіркове рівняння регресії Y на X має вигляд: $y=ax^2 + bx + c$.

Розглянемо два випадки:

1. Нехай в результаті n незалежних випробувань отримано n пар чисел (x_i, y_i), $i=\overline{1,n}$, причому серед точок (x_i, y_i) немає збіжних. У цьому випадку невідомі параметри a, b, c знаходимо, розв’язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,4} + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,3} + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2} y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,3} + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{\,2} + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

2. Нехай вибірка об'єму n задається у вигляді кореляційної таблиці:

x_i \ y_j	y_1	y_2	…	y_l	m_i
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1l}	m_1
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2l}	m_2
…	…	…	…	…	…
x_k	n_{k1}	n_{k2}	…	n_{kl}	m_k
n_j	n_1	n_2	…	n_l	n

де $m_i = \sum_{j=1}^{l} n_{ij}$ – частота значення x_i,

$n_j = \sum_{i=1}^{k} n_{ij}$ – частота значення y_j,

n_{ij} – частота пари (x_i, y_j),

n – об'єм вибірки (сума всіх частот).

Система рівнянь для знаходження параметрів a, b, c з урахуванням повторюваності значень x_i і y_j може бути записана в наступному вигляді:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{k} {x_i}^4 m_i + b\sum_{i=1}^{k} {x_i}^3 m_i + c\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 m_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} {x_i}^2 y_j n_{ij}, \\ a\sum_{i=1}^{k} {x_i}^3 m_i + b\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 m_i + c\sum_{i=1}^{k} x_i m_i = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} x_i y_j n_{ij}, \\ a\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 m_i + b\sum_{i=1}^{k} x_i m_i + cn = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} y_j n_{ij}. \end{cases}$$

Назвемо умовним середнім $\bar{y}_{x_i}$ середнє арифметичне значень Y, які відповідають значенням x_i, тобто:

$$\bar{y}_{x_i} = \frac{\sum_{j=1}^{l} y_j n_{ij}}{\sum_{j=1}^{l} n_{ij}} = \frac{\sum_{j=1}^{l} y_j n_{ij}}{m_i}.$$

Тоді: $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} {x_i}^2 y_j n_{ij} = \sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 \bar{y}_{x_i} m_i$, $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} x_i y_j n_{ij} = \sum_{i=1}^{k} x_i \bar{y}_{x_i} m_i$,

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} y_j n_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \bar{y}_{x_i} m_i$$

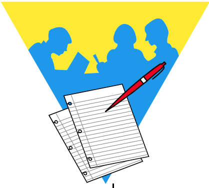
і система для знаходження a, b, c запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{k} {x_i}^4 m_i + b\sum_{i=1}^{k} {x_i}^3 m_i + c\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 m_i = \sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 \bar{y}_{x_i} m_i, \\ a\sum_{i=1}^{k} {x_i}^3 m_i + b\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 m_i + c\sum_{i=1}^{k} x_i m_i = \sum_{i=1}^{k} x_i \bar{y}_{x_i} m_i, \\ a\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 m_i + b\sum_{i=1}^{k} x_i m_i + cn = \sum_{i=1}^{k} \bar{y}_{x_i} m_i. \end{cases}$$

Аналогічно складається вибіркове рівняння регресії X на Y:

$x = a_1 y^2 + b_1 y + c_1$.

ПРИКЛАДИ



445. Знайти вибіркове рівняння параболічної регресії Y на X за даними таблиці:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–10	0	4	5	4	2	–2

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Складемо розрахункову таблицю:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	–3	–10	9	–27	81	30	–90
2	–2	0	4	–8	16	0	0
3	–1	4	1	–1	1	–4	4
4	0	5	0	0	0	0	0
5	1	4	1	1	1	4	4
6	2	2	4	8	16	4	8
7	3	–2	9	27	81	–6	–18
$\sum$	0	3	28	0	196	28	–92

Для знаходження невідомих параметрів вибіркового рівняння параболічної регресії отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 196a + 28c = -92 \\ 28b = 28 \\ 28a + 7c = 3. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо (приблизно):

$$a = -1{,}24, \quad b = 1, \quad c = 5{,}38.$$

Отже, вибіркове рівняння параболічної регресії Y на X має вигляд:

$$y = -1{,}24\,x^2 + x + 5{,}38.$$

446. Знайти вибіркове рівняння параболічної регресії Y на X за даними кореляційної таблиці:

x \ y	6	6,75	7,5
1	8		
1,1	2	30	1
1,2			9

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Обчислимо умовні середні:

$$\bar{y}_{x_1} = 6, \quad \bar{y}_{x_2} = \frac{6 \cdot 2 + 6{,}75 \cdot 30 + 7{,}5 \cdot 1}{33} = 6{,}73, \quad \bar{y}_{x_3} = 7{,}5.$$

Складемо розрахункову таблицю:

i	x_i	m_i	$\bar{y}_{x_i}$	$x_i m_i$	$x_i^2 m_i$	$x_i^3 m_i$	$x_i^4 m_i$	$\bar{y}_{x_i} m_i$	$x_i \bar{y}_{x_i} m_i$	$x_i^2 \bar{y}_{x_i} m_i$
1	1	8	6	8	8	8	8	48	48	48
2	1,1	33	6,73	36,3	39,93	43,93	48,32	222,09	244,30	268,73
3	1,2	9	7,5	10,8	12,96	15,55	18,66	67,50	81,00	97,20
$\sum$		50		55,1	60,89	67,48	74,98	337,59	373,30	413,93

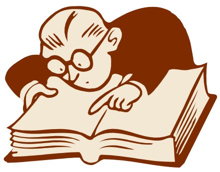
Отримуємо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів a, b, c:

$$\begin{cases} 74{,}98a + 67{,}48b + 60{,}89c = 413{,}93 \\ 67{,}48a + 60{,}89b + 55{,}10c = 373{,}30 \\ 60{,}89a + 55{,}10b + 50c = 337{,}59. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему (наприклад, методом повного виключення), знайдемо: $a = 1{,}94$, $b = 2{,}98$, $c = 1{,}10$.

Шукане вибіркове рівняння параболічної регресії має вигляд:

$$y = 1{,}94x^2 + 2{,}98\,x + 1{,}10.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ

447. Дані таблиці характеризують залежність капітальних вкладень Y (млн грн) від потужності підприємств даного типу X (млн тон продукції на рік):

x	1	2	3	4
y	1	3	6	11

Побудувати вибіркове рівняння параболічної регресії Y на X.

448. Знайти рівняння параболічної регресії між швидкістю автомобіля (км / год) і витратою пального (л / км) за статистичною вибіркою:

швидкість автомобіля	40	50	60	70	80	90	100
витрати пального	9	8,5	8	8,5	9	10	12

449. Знайти вибіркове рівняння параболічної регресії X на Y за даними кореляційної таблиці:

а)

x / y	1	3	4
6	15	1	
30		14	2
50			18

б)

x / y	0	2	3
1	13	2	1
9		10	1
19			23

450. Залежність врожайності Y (ц з га) від глибини зрошення X (м) наводиться в наступній таблиці:

x / y	10	12	14	16
0	4	1		
0,1		2	3	2
0,2		1	4	4
0,3		2	2	3
0,4		2	3	1
0,5	2	2	2	

Знайти вибіркове рівняння параболічної регресії Y на X.

451. Результати дослідження залежності врожайності Y (ц з га) від кількості опадів, що випали протягом року X (м), представлені в таблиці:

x / y	$1,5 \div 4,5$	$4,5 \div 7,5$	$7,5 \div 10,5$	$10,5 \div 13,5$	$13,5 \div 16,5$	$16,5 \div 19,5$	$19,5 \div 22,5$	$22,5 \div 25,5$
$0,05 \div 0,15$	2	1						
$0,15 \div 0,25$		1		4	2			
$0,25 \div 0,35$			1		1	2		
$0,35 \div 0,45$					4		2	
$0,45 \div 0,55$							5	
$0,55 \div 0,65$						2	2	6
$0,65 \div 0,75$							2	3
$0,75 \div 0,85$						1	1	2
$0,85 \div 0,95$					1	2	3	

Знайти вибіркове рівняння параболічної регресії Y на X.

2.15. Вибіркове рівняння множинної лінійної регресії

Якщо досліджується зв'язок між декількома величинами, то кореляцію називають *множинною*. У простому випадку число величин дорівнює трьом і зв'язок між ними лінійний:

$$z = ax + by + c.$$

Нехай проведено n незалежних дослідів, внаслідок чого набуте значення x_i, y_i, z_i $(i = \overline{1,\ n})$.

Тоді параметри a, b, c обчислюємо за формулами:

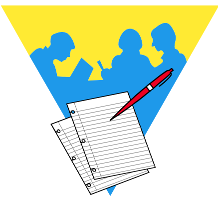
$$a = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{1 - r_{xy}^{\ 2}} \cdot \frac{S_z}{S_x}; \qquad b = \frac{r_{yz} - r_{xy}r_{xz}}{1 - r_{xy}^{\ 2}} \cdot \frac{S_z}{S_y}; \qquad c = \bar{z} - a\bar{x} - b\bar{y},$$

де

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$ – вибіркові середні;

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x \cdot S_y}; \qquad r_{xz} = \frac{\overline{xz} - \bar{x}\cdot\bar{z}}{S_x \cdot S_z}; \qquad r_{yz} = \frac{\overline{yz} - \bar{y}\cdot\bar{z}}{S_y \cdot S_z}$$ – коефіцієнти кореляції між парами змінних x і y, x і z, y і z;

Sx, Sy, Sz – вибіркові середні квадратичні відхилення.



ПРИКЛАД

452. За даними таблиці знайти вибіркове рівняння множинної лінійної регресії Z на X і Y.

x	–5	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	14	12	8	6	2	4	0	–2	–6	–4
z	5	4	7	1	4	–4	2	0	–5	–1

РОЗВ’ЯЗАННЯ

Складемо розрахункову таблицю:

i	xi	yi	zi	x_i^2	y_i^2	z_i^2	x_iy_i	x_iz_i	y_iz_i
1	–5	14	5	25	196	25	–70	–25	70
2	–3	12	4	9	144	16	–36	–12	48
3	–2	8	7	4	64	49	–16	–14	56
4	–1	6	1	1	36	1	–6	–1	6
5	0	2	4	0	4	16	0	0	8
6	1	4	–4	1	16	16	4	–4	–16
7	2	0	2	4	0	4	0	4	0
8	3	–2	0	9	4	0	–6	0	0
9	4	–6	–5	16	36	25	–24	–20	30
10	5	–4	–1	25	16	1	–20	–5	4
$\sum$	4	34	13	94	516	153	–174	–77	206

Із таблиці знаходимо:

$$\bar{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}\cdot 4 = 0{,}4; \qquad \overline{x^2} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^{\,2} = \frac{1}{10}\cdot 94 = 9{,}4;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i = \frac{1}{10}\cdot 34 = 3{,}4; \qquad \overline{y^2} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i^{\,2} = \frac{1}{10}\cdot 516 = 51{,}6;$$

$$\bar{z} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} z_i = \frac{1}{10}\cdot 13 = 1{,}3; \qquad \overline{z^2} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} z_i^{\,2} = \frac{1}{10}\cdot 153 = 15{,}3;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = \frac{1}{10}\cdot(-174) = -17{,}4;$$

$$\overline{xz} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i z_i = \frac{1}{10}\cdot(-77) = -7{,}7;$$

$$\overline{yz} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} y_i z_i = \frac{1}{10}\cdot 206 = 20{,}6.$$

Отже,

$$S_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{9{,}4 - (0{,}4)^2} = 3{,}04;$$

$$S_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{51{,}6 - (3{,}4)^2} = 6{,}33;$$

$$S_z = \sqrt{\overline{z^2} - (\bar{z})^2} = \sqrt{15{,}3 - (1{,}3)^2} = 3{,}69.$$

Обчислюємо коефіцієнти кореляції між парами змінних:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{-17{,}4 - 0{,}4\cdot 3{,}4}{3{,}04\cdot 6{,}33} = -0{,}97;$$

$$r_{xz} = \frac{\overline{xz} - \bar{x}\cdot\bar{z}}{S_x \cdot S_z} = \frac{-7{,}7 - 0{,}4\cdot 1{,}3}{3{,}04\cdot 3{,}69} = -0{,}73;$$

$$r_{yz} = \frac{\overline{yz} - \bar{y} \cdot \bar{z}}{S_y \cdot S_z} = \frac{20{,}6 - 3{,}4 \cdot 1{,}3}{6{,}33 \cdot 3{,}69} = 0{,}69 .$$

Вибіркове рівняння множинної лінійної регресії Z на X і Y має вигляд:

$$z = ax + by + c.$$

Обчислимо його коефіцієнти:

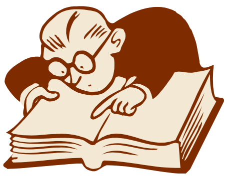
$$a = \frac{r_{xz} - r_{xy}r_{yz}}{1 - r_{xy}{}^2} \cdot \frac{S_z}{S_x} = \frac{-0{,}73 + 0{,}97 \cdot 0{,}69}{1 - (0{,}97)^2} \cdot \frac{3{,}69}{3{,}04} = -1{,}25 ;$$

$$b = \frac{r_{yz} - r_{xy}r_{xz}}{1 - r_{xy}{}^2} \cdot \frac{S_z}{S_y} = \frac{0{,}69 - 0{,}97 \cdot 0{,}73}{1 - (0{,}97)^2} \cdot \frac{3{,}69}{6{,}33} = -0{,}18 ;$$

$$c = \bar{z} - a\bar{x} - b\bar{y} = 1{,}3 + 1{,}25 \cdot 0{,}4 + 0{,}18 \cdot 3{,}4 = 2{,}41 .$$

Таким чином, остаточно отримаємо:

$$z = -1{,}25x - 0{,}18y + 2{,}41.$$



ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

453. У таблиці представлені дані, що характеризують залежність валової продукції рослинництва Z (млн. грн) від розмірів ріллі X (тис. га) і основних засобів виробництва Y (млн. грн).

x	30	36	42	47	56	60	66
y	29	38	39	42	46	52	55
z	7	12	16	20	25	29	36

Знайти вибіркове рівняння множинної лінійної регресії Z на X і Y.

454. Знайти вибіркове рівняння множинної лінійної регресії Z на X і Y за даними, наведеними в таблиці:

а)

x	–4	–2	–1	–1	0	1	1	2	3	6	7	8
y	5	7	–8	1	–3	–6	–1	–2	–10	2	3	0
z	4	5	–8	0	–2	–4	2	1	8	10	11	9

б)

x	0	2	4	13	18	35	44	56	61	64
y	14	32	29	44	49	54	0	59	34	16
z	0,5	9	8	0	19,2	18,2	47,2	60,9	63,8	47,5

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Чим розрізняються генеральна і вибіркова сукупності?
2. У яких випадках користуються умовними варіантами? Напишіть формули переходу від початкових варіантів до умовних і навпаки.
3. Як перейти від гістограми до полінома частот?
4. Виділіть основні етапи побудови закону розподілу по вибірці.
5. Чим відрізняються точкове і інтервальне оцінювання параметрів?
6. Яка оцінка параметрів називається незміщеною, ефективною, спроможною?
7. Чим відрізняються теоретичні частоти від емпіричних?
8. У якому випадку коефіцієнт кореляції дорівнює 1?
9. Чому дорівнює коефіцієнт кореляції для незалежних випадкових величин?
10. У якому випадку прямі регресії зливаються?
11. Через яку спільну точку проходять вибіркові прямі регресії?

ДОДАТКИ

Додаток 1

Таблиця значень ймовірностей закону розподілу Пуассона

$$\mathrm{P}(X=k)=F(k,\ \lambda)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k}}{k!}$$

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0333	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	—	0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	—	—	—	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0001
8	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k \ λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3231	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
3	0,0738	0,0868	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0110	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0020	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0026	0,0034
8	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0006	0,0009
9	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k \ λ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	0,1225	0,1108	0,1002	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
1	0,2572	0,2438	0,2306	0,2178	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
2	0,2700	0,2682	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
3	0,1890	0,1966	0,2033	0,2090	0,2139	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
4	0,0992	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
5	0,0417	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
6	0,0146	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
7	0,0044	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0140	0,0163	0,0188	0,0216
8	0,0012	0,0015	0,0020	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
9	0,0003	0,0004	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
10	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
11	—	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002

k \ λ	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	0,0450	0,0408	0,0369	0,0334	0,0302	0,0273	0,0247	0,0224	0,0202	0,0183
1	0,1396	0,1304	0,1217	0,1135	0,1057	0,0984	0,0915	0,0850	0,0790	0,0733
2	0,2165	0,2087	0,2008	0,1929	0,1850	0,1771	0,1692	0,1615	0,1540	0,1465
3	0,2237	0,2264	0,2209	0,2186	0,2158	0,2125	0,2087	0,2046	0,2002	0,1954
4	0,1734	0,1781	0,1822	0,1358	0,1888	0,1912	0,1930	0,1944	0,1952	0,1954
5	0,1075	0,1140	0,1203	0,1264	0,1322	0,1377	0,1429	0,1477	0,1522	0,1563
6	0,0555	0,0608	0,0662	0,0716	0,0771	0,0826	0,0881	0,0936	0,0989	0,1042
7	0,0246	0,0278	0,0312	0,0348	0,0386	0,0425	0,0466	0,0508	0,0551	0,0595
8	0,0095	0,0111	0,0129	0,0148	0,0169	0,0191	0,0215	0,0241	0,0269	0,0298
9	0,0033	0,0040	0,0047	0,0056	0,0066	0,0076	0,0088	0,0102	0,0116	0,0132
10	0,0010	0,0013	0,0016	0,0019	0,0023	0,0028	0,0033	0,0039	0,0045	0,0053
11	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013	0,0016	0,0019
12	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006
13	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0001

k \ λ	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	0,0166	0,0150	0,0136	0,0129	0,0111	0,0100	0,0091	0,0082	0,0074	0,0067
1	0,0680	0,0630	0,0583	0,0540	0,0500	0,0462	0,0428	0,0395	0,0365	0,0337
2	0,1393	0,1323	0,1254	0,1189	0,1125	0,1064	0,1000	0,0948	0,0894	0,0842
3	0,1904	0,1852	0,1798	0,1743	0,1687	0,1631	0,1574	0,1517	0,1460	0,1404
4	0,1951	0,1944	0,1933	0,1918	0,1898	0,1875	0,1849	0,1820	0,1789	0,1755
5	0,1600	0,1633	0,1662	0,1688	0,1708	0,1725	0,1738	0,1748	0,1753	0,1755
6	0,1094	0,1143	0,1191	0,1238	0,1281	0,1323	0,1362	0,1398	0,1432	0,1462
7	0,0640	0,0686	0,0732	0,0778	0,0824	0,0869	0,0914	0,0959	0,1002	0,1044
8	0,0328	0,0360	0,0393	0,0428	0,0463	0,0500	0,0537	0,0575	0,0614	0,0653
9	0,0150	0,0168	0,0188	0,0209	0,0232	0,0256	0,0280	0,0307	0,0334	0,0363
10	0,0061	0,0071	0,0081	0,0092	0,0104	0,0118	0,0132	0,0147	0,0164	0,0181
11	0,0023	0,0027	0,0032	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0064	0,0073	0,0082
12	0,0008	0,0009	0,0011	0,0014	0,0016	0,0019	0,0022	0,0026	0,0030	0,0034
13	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0007	0,0008	0,0010	0,0011	0,0013
14	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005
15	—	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002

k \ λ	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	0,0061	0,0055	0,0050	0,0045	0,0041	0,0037	0,0034	0,0030	0,0027	0,0025
1	0,0311	0,0287	0,0265	0,0244	0,0225	0,0207	0,0191	0,0176	0,0162	0,0149
2	0,0793	0,0740	0,0701	0,0658	0,0618	0,0580	0,0544	0,0509	0,0477	0,0446
3	0,1348	0,1293	0,1239	0,1185	0,1133	0,1083	0,1033	0,0985	0,0938	0,0893
4	0,1719	0,1680	0,1641	0,1600	0,1558	0,1516	0,1472	0,1428	0,1383	0,1339
5	0,1753	0,1748	0,1740	0,1828	0,1714	0,1698	0,1678	0,1656	0,1632	0,1607
6	0,1490	0,1515	0,1537	0,1555	0,1571	0,1584	0,1594	0,1160	0,1605	0,1607
7	0,1086	0,1125	0,1164	0,1200	0,1235	0,1268	0,1298	0,1326	0,1353	0,1377
8	0,0692	0,0731	0,0771	0,0810	0,0849	0,0887	0,0925	0,0962	0,0998	0,1033
9	0,0392	0,0423	0,0454	0,0486	0,0519	0,0552	0,0586	0,0620	0,0654	0,0688
10	0,0200	0,0220	0,0241	0,0262	0,0285	0,0309	0,0334	0,0360	0,0386	0,0413
11	0,0093	0,0104	0,0116	0,0129	0,0143	0,0157	0,0173	0,0190	0,0207	0,0225
12	0,0030	0,0045	0,0051	0,0058	0,0065	0,0073	0,0082	0,0092	0,0102	0,0113
13	0,0016	0,0018	0,0021	0,0024	0,0028	0,0032	0,0036	0,0041	0,0046	0,0052
14	0,0006	0,0007	0,0008	0,0009	0,0011	0,0013	0,0015	0,0017	0,0020	0,0022
15	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	0,0008	0,0009
16	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003
17	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001

k \ λ	6,2	6,4	6,6	6,8	7,0	7,2	7,4	7,6	7,8	8,0
0	0,0020	0,0017	0,0014	0,0011	0,0009	0,0007	0,0006	0,0005	0,0004	0,0003
1	0,0126	0,0106	0,0090	0,0076	0,0064	0,0054	0,0045	0,0038	0,0032	0,0027
2	0,0390	0,0340	0,0296	0,0258	0,0223	0,0194	0,0167	0,0144	0,0125	0,0107
3	0,0806	0,0726	0,0652	0,0584	0,0521	0,0464	0,0413	0,0366	0,0324	0,0286
4	0,1250	0,1162	0,1076	0,0992	0,0912	0,0836	0,0764	0,0696	0,0632	0,0572
5	0,1550	0,1487	0,1420	0,1350	0,1277	0,1204	0,1130	0,1058	0,0986	0,0916
6	0,1601	0,1586	0,1562	0,1530	0,1490	0,1445	0,1394	0,1340	0,1282	0,1222
7	0,1418	0,1450	0,1473	0,1486	0,1490	0,1486	0,1474	0,1454	0,1428	0,1396
8	0,1099	0,1160	0,1215	0,1263	0,1304	0,1338	0,1363	0,1382	0,1312	0,1396
9	0,0757	0,0825	0,0891	0,0954	0,1014	0,1070	0,1120	0,1167	0,1207	0,1241
10	0,0469	0,0528	0,0588	0,0649	0,0710	0,0770	0,0829	0,0887	0,0941	0,0993
11	0,0265	0,0307	0,0353	0,0401	0,0452	0,0504	0,0558	0,0613	0,0667	0,0722
12	0,0137	0,0164	0,0194	0,0227	0,0264	0,0302	0,0344	0,0388	0,0434	0,0481
13	0,0065	0,0081	0,0098	0,0119	0,0142	0,0168	0,0196	0,0227	0,0260	0,0296
14	0,0029	0,0037	0,0046	0,0058	0,0071	0,0086	0,0104	0,0123	0,0145	0,0169
15	0,0012	0,0016	0,0020	0,0026	0,0033	0,0041	0,0051	0,0062	0,0075	0,0090
16	0,0005	0,0006	0,0008	0,0011	0,0014	0,0019	0,0024	0,0030	0,0037	0,0045
17	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0006	0,0008	0,0010	0,0013	0,0017	0,0021
18	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004	0,0006	0,0007	0,0009
19	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004
20	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
21	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0001
22	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

k \ λ	8,2	8,4	8,6	8,8	9,0	9,2	9,4	9,6	9,8	10,0
0	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	—	—
1	0,0022	0,0019	0,0016	0,0013	0,0011	0,0009	0,0008	0,0006	0,0005	0,0004
2	0,0092	0,0079	0,0068	0,0058	0,0050	0,0043	0,0036	0,0031	0,0027	0,0023
3	0,0252	0,0222	0,0195	0,0171	0,0150	0,0131	0,0114	0,0100	0,0087	0,0076
4	0,0517	0,0466	0,042	0,0377	0,0337	0,0302	0,0269	0,0240	0,0213	0,0189
5	0,0849	0,0784	0,0725	0,0663	0,0607	0,0555	0,0506	0,0460	0,0418	0,0378
6	0,1160	0,1097	0,1034	0,0972	0,0911	0,0851	0,0793	0,0736	0,0682	0,0631
7	0,1359	0,1317	0,1271	0,1222	0,1171	0,1118	0,1065	0,1010	0,0955	0,0901
8	0,1393	0,1383	0,1366	0,1344	0,1318	0,1315	0,1306	0,1293	0,1274	0,1251
9	0,1269	0,1290	0,1306	0,1315	0,1318	0,1315	0,1306	0,1293	0,1274	0,1251
10	0,1040	0,1084	0,1123	0,1157	0,1186	0,1210	0,1228	0,1241	0,1249	0,1251
11	0,0776	0,0828	0,0878	0,0926	0,0970	0,1012	0,1050	0,1083	0,1112	0,1138
12	0,0530	0,0579	0,0629	0,0679	0,0728	0,0776	0,0822	0,0866	0,0908	0,0948
13	0,0334	0,0374	0,0416	0,0459	0,0504	0,0549	0,0594	0,0640	0,0685	0,0729
14	0,0196	0,0225	0,0256	0,0289	0,0324	0,0361	0,0399	0,0439	0,0479	0,0521
15	0,0107	0,0126	0,0146	0,0169	0,0194	0,0221	0,0250	0,0281	0,0313	0,0347
16	0,0055	0,0066	0,0079	0,0093	0,0109	0,0127	0,0147	0,0168	0,0192	0,0117
17	0,0026	0,0033	0,0040	0,0048	0,0058	0,0069	0,0081	0,0095	0,0111	0,0128
18	0,0012	0,0015	0,0019	0,0024	0,0029	0,0035	0,0042	0,0051	0,0060	0,0071
19	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0017	0,0021	0,0026	0,0031	0,0037
20	0,0002	0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008	0,0010	0,0012	0,0015	0,0019
21	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0004	0,0006	0,0007	0,0009
22	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002	0,0003	0,0004
23	—	—	—	—	—	—	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,0001

Таблиця значень функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0,00	0,3989	0,30	0,3814	0,60	0,3332	0,90	0,2661
0,01	0,3989	0,31	0,3802	0,61	0,3312	0,91	0,2637
0,02	0,3989	0,32	0,3790	0,62	0,3292	0,92	0,2613
0,03	0,3989	0,33	0,3778	0,63	0,3271	0,93	0,2589
0,04	0,3986	0,34	0,3765	0,64	0,3252	0,94	0,2565
0,05	0,3984	0,35	0,3752	0,65	0,3230	0,95	0,2541
0,06	0,3982	0,36	0,3739	0,66	0,3209	0,96	0,2516
0,07	0,3980	0,37	0,3726	0,67	0,3187	0,97	0,2492
0,08	0,3977	0,38	0,3712	0,68	0,3166	0,98	0,2468
0,09	0,3973	0,39	0,3697	0,69	0,3144	0,99	0,2444
0,10	0,3970	0,40	0,3683	0,70	0,3123	1,00	0,2420
0,11	0,3965	0,41	0,3668	0,71	0,3101	1,01	0,2396
0,12	0,3961	0,42	0,3653	0,72	0,3079	1,02	0,2371
0,13	0,3956	0,43	0,3637	0,73	0,3056	1,03	0,2347
0,14	0,3951	0,44	0,3621	0,74	0,3034	1,04	0,2323
0,15	0,3945	0,45	0,3605	0,75	0,3011	1,05	0,2299
0,16	0,3939	0,46	0,3589	0,76	0,2989	1,06	0,2275
0,17	0,3932	0,47	0,3572	0,77	0,2966	1,07	0,2251
0,18	0,3925	0,48	0,3555	0,78	0,2943	1,08	0,2227
0,19	0,3918	0,49	0,3538	0,79	0,2920	1,09	0,2203
0,20	0,3910	0,50	0,3521	0,80	0,2897	1,10	0,2179
0,21	0,3902	0,51	0,3503	0,81	0,2874	1,11	0,2155
0,22	0,3894	0,52	0,3485	0,82	0,2850	1,12	0,2131
0,23	0,3885	0,53	0,3467	0,83	0,2827	1,13	0,2107
0,24	0,3867	0,54	0,3448	0,84	0,2803	1,14	0,2083
0,25	0,3876	0,55	0,3429	0,85	0,2780	1,15	0,2059
0,26	0,3857	0,56	0,3410	0,86	0,2756	1,16	0,2036
0,27	0,3847	0,57	0,3391	0,87	0,2732	1,17	0,2012
0,28	0,3836	0,58	0,3372	0,88	0,2709	1,18	0,1989
0,29	0,3825	0,59	0,3352	0,89	0,2785	1,19	0,1965

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
1,20	0,1942	1,60	0,1109	2,00	0,0540	2,40	0,0224
1,21	0,1919	1,61	0,1092	2,01	0,0529	2,41	0,0219
1,22	0,1895	1,62	0,1074	2,02	0,0519	2,42	0,0213
1,23	0,1872	1,63	0,1057	2,03	0,0508	2,43	0,0208
1,24	0,1849	1,64	0,1040	2,04	0,0498	2,44	0,0203
1,25	0,1826	1,65	0,1023	2,05	0,0488	2,45	0,0198
1,26	0,1804	1,66	0,1006	2,06	0,0478	2,46	0,0194
1,27	0,1781	1,67	0,0989	2,07	0,0468	2,47	0,0189
1,28	0,1758	1,68	0,0973	2,08	0,0459	2,48	0,0184
1,29	0,1736	1,69	0,0957	2,09	0,0449	2,49	0,0180
1,30	0,1714	1,70	0,0940	2,10	0,0440	2,50	0,0175
1,31	0,1691	1,71	0,0925	2,11	0,0431	2,51	0,0171
1,32	0,1669	1,72	0,0909	2,12	0,0422	2,52	0,0167
1,33	0,1647	1,73	0,0893	2,13	0,0413	2,53	0,0163
1,34	0,1626	1,74	0,0878	2,14	0,0404	2,54	0,0158
1,35	0,1604	1,75	0,0863	2,15	0,0396	2,55	0,0154
1,36	0,1582	1,76	0,0848	2,16	0,0387	2,56	0,0151
1,37	0,1561	1,77	0,0833	2,17	0,0379	2,57	0,0147
1,38	0,1539	1,78	0,0818	2,18	0,0371	2,58	0,0143
1,39	0,1518	1,79	0,0804	2,19	0,0363	2,59	0,0139
1,40	0,1497	1,80	0,0790	2,20	0,0355	2,60	0,0136
1,41	0,1476	1,81	0,0775	2,21	0,0347	2,61	0,0132
1,42	0,1456	1,82	0,0761	2,22	0,0339	2,62	0,0129
1,43	0,1435	1,83	0,0748	2,23	0,0332	2,63	0,0126
1,44	0,1415	1,84	0,0734	2,24	0,0325	2,64	0,0122
1,45	0,1394	1,85	0,0721	2,25	0,0317	2,65	0,0119
1,46	0,1374	1,86	0,0707	2,26	0,0310	2,66	0,0116
1,47	0,1354	1,87	0,0694	2,27	0,0303	2,67	0,0113
1,48	0,1334	1,88	0,0681	2,28	0,0297	2,68	0,0110
1,49	0,1315	1,89	0,0669	2,29	0,0290	2,69	0,0107
1,50	0,1295	1,90	0,0656	2,30	0,0283	2,70	0,0104
1,51	0,1276	1,91	0,0644	2,31	0,0277	2,71	0,0101
1,52	0,1257	1,92	0,0632	2,32	0,0270	2,72	0,0099
1,53	0,1238	1,93	0,0620	2,33	0,0264	2,73	0,0096
1,54	0,1219	1,94	0,0608	2,34	0,0258	2,74	0,0093
1,55	0,1200	1,95	0,0596	2,35	0,0252	2,75	0,0091
1,56	0,1182	1,96	0,0584	2,36	0,0246	2,76	0,0088
1,57	0,1163	1,97	0,0573	2,37	0,0241	2,77	0,0086
1,58	0,1145	1,98	0,0562	2,38	0,0235	2,78	0,0084
1,59	0,1127	1,99	0,0551	2,39	0,0229	2,79	0,0081

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
2,80	0,0079	3,10	0,0033	3,40	0,0012	3,70	0,0004
2,81	0,0077	3,11	0,0032	3,41	0,0012	3,71	0,0004
2,82	0,0075	3,12	0,0031	3,42	0,0012	3,72	0,0004
2,83	0,0073	3,13	0,0030	3,43	0,0011	3,73	0,0004
2,84	0,0071	3,14	0,0029	3,44	0,0011	3,74	0,0004
2,85	0,0069	3,15	0,0028	3,45	0,0010	3,75	0,0004
2,86	0,0067	3,16	0,0027	3,46	0,0010	3,76	0,0003
2,87	0,0065	3,17	0,0026	3,47	0,0010	3,77	0,0003
2,88	0,0063	3,18	0,0025	3,48	0,0009	3,78	0,0003
2,89	0,0061	3,19	0,0025	3,49	0,0009	3,79	0,0003
2,90	0,0060	3,20	0,0024	3,50	0,0009	3,80	0,0003
2,91	0,0058	3,21	0,0023	3,51	0,0008	3,81	0,0003
2,92	0,0056	3,22	0,0022	3,52	0,0008	3,82	0,0003
2,93	0,0055	3,23	0,0022	3,53	0,0008	3,83	0,0003
2,94	0,0053	3,24	0,0021	3,54	0,0008	3,84	0,0003
2,95	0,0051	3,25	0,0020	3,55	0,0007	3,85	0,0002
2,96	0,0050	3,26	0,0020	3,56	0,0007	3,86	0,0002
2,97	0,0048	3,27	0,0019	3,57	0,0007	3,87	0,0002
2,98	0,0047	3,28	0,0018	3,58	0,0007	3,88	0,0002
2,99	0,0046	3,29	0,0018	3,59	0,0006	3,89	0,0002
3,00	0,0044	3,30	0,0017	3,60	0,0006	3,90	0,0002
3,01	0,0043	3,31	0,0017	3,61	0,0006	3,91	0,0002
3,02	0,0042	3,32	0,0016	3,62	0,0006	3,92	0,0002
3,03	0,0040	3,33	0,0016	3,63	0,0005	3,93	0,0002
3,04	0,0039	3,34	0,0015	3,64	0,0005	3,94	0,0002
3,05	0,0038	3,35	0,0015	3,65	0,0005	3,95	0,0002
3,06	0,0037	3,36	0,0014	3,66	0,0005	3,96	0,0002
3,07	0,0036	3,37	0,0014	3,67	0,0005	3,97	0,0002
3,08	0,0035	3,38	0,0013	3,68	0,0005	3,98	0,0002
3,09	0,0034	3,39	0,0013	3,69	0,0004	3,99	0,0001

Додаток 3

Таблиця значень інтеграла ймовірностей

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,30	0,1179	0,60	0,2257	0,90	0,3159
0,01	0,0040	0,31	0,1217	0,61	0,2291	0,91	0,3186
0,02	0,0080	0,32	0,1255	0,62	0,2324	0,92	0,3212
0,03	0,0120	0,33	0,1293	0,63	0,2357	0,93	0,3238
0,04	0,0160	0,34	0,1331	0,64	0,2389	0,94	0,3264
0,05	0,0199	0,35	0,1368	0,65	0,2422	0,95	0,3289
0,06	0,0239	0,36	0,1406	0,66	0,2454	0,96	0,3315
0,07	0,0279	0,37	0,1443	0,67	0,2486	0,97	0,3340
0,08	0,0319	0,38	0,1480	0,68	0,2517	0,98	0,3365
0,09	0,0359	0,39	0,1517	0,69	0,2549	0,99	0,3389
0,10	0,0398	0,40	0,1554	0,70	0,2580	1,00	0,3413
0,11	0,0438	0,41	0,1591	0,71	0,2611	1,01	0,3438
0,12	0,0478	0,42	0,1628	0,72	0,2642	1,02	0,3461
0,13	0,0517	0,43	0,1664	0,73	0,2673	1,03	0,3485
0,14	0,0557	0,44	0,1700	0,74	0,2703	1,04	0,3508
0,15	0,0596	0,45	0,1736	0,75	0,2734	1,05	0,3531
0,16	0,0636	0,46	0,1772	0,76	0,2764	1,06	0,3554
0,17	0,0675	0,47	0,1808	0,77	0,2794	1,07	0,3577
0,18	0,0714	0,48	0,1844	0,78	0,2823	1,08	0,3599
0,19	0,0753	0,49	0,1879	0,79	0,2852	1,09	0,3621
0,20	0,0793	0,50	0,1915	0,80	0,2881	1,10	0,3643
0,21	0,0832	0,51	0,1950	0,81	0,2910	1,11	0,3665
0,22	0,0871	0,52	0,1985	0,82	0,2939	1,12	0,3686
0,23	0,0910	0,53	0,2019	0,83	0,2967	1,13	0,3708
0,24	0,0948	0,54	0,2054	0,84	0,2995	1,14	0,3729
0,25	0,0987	0,55	0,2088	0,85	0,3023	1,15	0,3749
0,26	0,1026	0,56	0,2123	0,86	0,3051	1,16	0,3770
0,27	0,1064	0,57	0,2157	0,87	0,3078	1,17	0,3790
0,28	0,1103	0,58	0,2190	0,88	0,3106	1,18	0,3810
0,29	0,1141	0,59	0,2224	0,89	0,3133	1,19	0,3830

x	*Ф*(*x*)	x	*Ф*(*x*)	*x*	*Ф*(*x*)	*x*	*Ф*(*x*)
1,20	0,3849	1,60	0,4452	2,00	0,4772	2,40	0,4918
1,21	0,3869	1,61	0,4463	2,01	0,4778	2,41	0,4920
1,22	0,3883	1,62	0,4474	2,02	0,4783	2,42	0,4922
1,23	0,3907	1,63	0,4484	2,03	0,4788	2,43	0,4925
1,24	0,3925	1,64	0,4495	2,04	0,4793	2,44	0,4927
1,25	0,3944	1,65	0,4505	2,05	0,4798	2,45	0,4929
1,26	0,3962	1,66	0,4515	2,06	0,4803	2,46	0,4931
1,27	0,3980	1,67	0,4525	2,07	0,4808	2,47	0,4933
1,28	0,3997	1,68	0,4535	2,08	0,4812	2,48	0,4934
1,29	0,4015	1,69	0,4545	2,09	0,4817	2,49	0,4936
1,30	0,4032	1,70	0,4554	2,10	0,4821	2,50	0,4938
1,31	0,4049	1,71	0,4564	2,11	0,4825	2,51	0,4939
1,32	0,4066	1,72	0,4573	2,12	0,4830	2,52	0,4941
1,33	0,4082	1,73	0,4582	2,13	0,4834	2,53	0,4943
1,34	0,4099	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,54	0,4945
1,35	0,4115	1,75	0,4599	2,15	0,4842	2,55	0,4946
1,36	0,4131	1,76	0,4608	2,16	0,4846	2,56	0,4948
1,37	0,4147	1,77	0,4616	2,17	0,4850	2,57	0,4949
1,38	0,4162	1,78	0,4625	2,18	0,4854	2,58	0,4951
1,39	0,4177	1,79	0,4633	2,19	0,4857	2,59	0,4952
1,40	0,4192	1,80	0,4641	2,20	0,4861	2,60	0,4953
1,41	0,4207	1,81	0,4649	2,21	0,4864	2,61	0,4955
1,42	0,4222	1,82	0,4656	2,22	0,4868	2,62	0,4956
1,43	0,4236	1,83	0,4664	2,23	0,4871	2,63	0,4957
1,44	0,4251	1,84	0,4671	2,24	0,4875	2,64	0,4959
1,45	0,4265	1,85	0,4676	2,25	0,4878	2,65	0,4960
1,46	0,4279	1,86	0,4686	2,26	0,4881	2,66	0,4961
1,47	0,4292	1,87	0,4693	2,27	0,4884	2,67	0,4962
1,48	0,4306	1,88	0,4699	2,28	0,4887	2,68	0,4963
1,49	0,4319	1,89	0,4706	2,29	0,4890	2,69	0,4964
1,50	0,4332	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,70	0,4965
1,51	0,4345	1,91	0,4719	2,31	0,4896	2,71	0,4966
1,52	0,4357	1,92	0,4726	2,32	0,4898	2,72	0,4967
1,53	0,4370	1,93	0,4732	2,33	0,4901	2,73	0,4968
1,54	0,4382	1,94	0,4738	2,34	0,4904	2,74	0,4969
1,55	0,4394	1,95	0,4744	2,35	0,4906	2,75	0,4970
1,56	0,4406	1,96	0,4750	2,36	0,4909	2,76	0,4971
1,57	0,4418	1,97	0,4756	2,37	0,4911	2,77	0,4972
1,58	0,4429	1,98	0,4761	2,38	0,4913	2,78	0,4973
1,59	0,4441	1,99	0,4767	2,39	0,4916	2,79	0,4973

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2,80	0,4974	3,10	0,4990	3,40	0,4997	3,70	0,4999
2,81	0,4975	3,11	0,4991	3,41	0,4997	3,71	0,4999
2,82	0,4976	3,12	0,4991	3,42	0,4997	3,72	0,4999
2,83	0,4976	3,13	0,4991	3,43	0,4997	3,73	0,4999
2,84	0,4977	3,14	0,4992	3,44	0,4997	3,74	0,4999
2,85	0,4978	3,15	0,4992	3,45	0,4997	3,75	0,4999
2,86	0,4979	3,16	0,4992	3,46	0,4997	3,76	0,4999
2,87	0,4979	3,17	0,4992	3,47	0,4997	3,77	0,4999
2,88	0,4980	3,18	0,4993	3,48	0,4998	3,78	0,4999
2,89	0,4981	3,19	0,4993	3,49	0,4998	3,79	0,4999
2,90	0,4981	3,20	0,4993	3,50	0,4998	3,80	0,4999
2,91	0,4982	3,21	0,4993	3,51	0,4998	3,81	0,4999
2,92	0,4982	3,22	0,4994	3,52	0,4998	3,82	0,4999
2,93	0,4983	3,23	0,4994	3,53	0,4998	3,83	0,4999
2,94	0,4984	3,24	0,4994	3,54	0,4998	3,84	0,4999
2,95	0,4984	3,25	0,4994	3,55	0,4998	3,85	0,5000
2,96	0,4985	3,26	0,4995	3,56	0,4998	3,86	0,5000
2,97	0,4985	3,27	0,4995	3,57	0,4998	3,87	0,5000
2,98	0,4986	3,28	0,4995	3,58	0,4998	3,88	0,5000
2,99	0,4986	3,29	0,4995	3,59	0,4998	3,89	0,5000
3,00	0,4986	3,30	0,4995	3,60	0,4998	3,90	0,5000
3,01	0,4987	3,31	0,4995	3,61	0,4998	3,91	0,5000
3,02	0,4987	3,32	0,4996	3,62	0,4998	3,92	0,5000
3,03	0,4988	3,33	0,4996	3,63	0,4998	3,93	0,5000
3,04	0,4988	3,34	0,4996	3,64	0,4999	3,94	0,5000
3,05	0,4989	3,35	0,4996	3,65	0,4999	3,95	0,5000
3,06	0,4989	3,36	0,4996	3,66	0,4999	3,96	0,5000
3,07	0,4989	3,37	0,4996	3,67	0,4999	3,97	0,5000
3,08	0,4990	3,38	0,4996	3,68	0,4999	3,98	0,5000
3,09	0,4990	3,39	0,4997	3,69	0,4999	3,99	0,5000

Додаток 4

Таблиця значень χ^2 для різних значень рівнів значущості α і числа ступенів свободи ν

Число ступенів свободи ν	Рівні значущості								
	$\alpha = 0,99$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,975$	$\alpha = 0,95$	$\alpha = 0,90$	$\alpha = 0,80$	$\alpha = 0,70$	$\alpha = 0,50$	$\alpha = 0,30$
1	0,00016	0,00063	0,00098	0,0039	0,0158	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,0201	0,0404	0,0506	0,1026	0,2107	0,446	0,713	1,39	2,41
3	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	1,00	1,42	2,37	3,66
4	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	1,65	2,20	3,36	4,88
5	0,554	0,752	0,831	1,15	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06
6	0,872	1,13	1,24	1,64	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23
7	1,24	1,56	1,69	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38
8	1,65	2,03	2,18	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52
9	2,09	2,53	2,70	3,33	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,25	3,94	4,87	6,18	7,17	9,34	11,8
11	3,05	3,61	3,82	4,57	5,58	6,99	8,15	10,3	12,9
12	3,57	4,18	4,40	5,23	6,30	7,81	9,03	11,3	14,0
13	4,11	4,77	5,01	5,89	7,04	8,63	9,93	12,3	15,1
14	4,66	5,37	5,63	6,57	7,79	9,47	10,8	13,3	16,2
15	5,23	5,99	6,26	7,26	8,55	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,81	6,61	6,91	7,96	9,31	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,41	7,26	7,56	8,67	10,08	12,0	13,5	16,3	19,5
18	7,09	7,91	8,23	9,39	10,89	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,63	8,57	8,91	10,12	11,65	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,26	9,24	9,59	10,85	12,44	14,6	16,3	19,3	22,8
22	9,54	10,60	10,98	12,34	14,04	16,3	18,1	21,3	24,9
24	10,86	11,99	12,40	13,85	15,66	18,1	19,9	23,3	27,1
26	12,20	13,41	13,84	15,38	17,29	19,8	21,8	25,3	29,2
28	13,56	14,85	15,31	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3	31,4
30	14,95	16,31	16,79	18,49	20,60	23,4	25,5	29,3	33,5

Число ступенів свободи ν	Рівні значущості							
	$\alpha = 0,20$	$\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,02$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,005$	$\alpha = 0,001$
1	1,64	2,71	3,84	5,02	5,41	6,63	7,88	10,83
2	3,22	4,61	5,99	7,38	7,82	9,21	10,6	13,82
3	4,64	6,25	7,81	9,35	9,84	11,34	12,8	16,27
4	5,99	7,78	9,49	11,14	11,67	13,28	14,9	18,47
5	7,29	9,24	11,07	12,83	13,39	15,09	16,7	20,52
6	8,56	10,64	12,59	14,45	15,03	16,81	18,5	22,46
7	9,80	12,02	14,07	16,01	16,62	18,48	20,3	24,32
8	11,0	13,36	15,51	17,53	18,17	20,09	22,0	26,12
9	12,2	14,68	16,82	19,02	19,68	21,67	23,6	27,88
10	13,4	15,99	18,31	20,48	21,16	23,21	25,2	29,59
11	14,6	17,28	19,68	21,92	22,62	24,73	26,8	31,26
12	15,8	18,55	21,03	23,34	24,05	26,22	28,3	32,91
13	17,0	19,81	22,36	24,74	25,47	27,69	29,8	34,53
14	18,2	21,06	23,68	26,12	26,87	29,14	31,3	36,12
15	19,3	22,31	25,00	27,49	28,26	30,58	32,8	37,70
16	20,5	23,54	26,30	28,85	29,63	32,00	34,3	39,25
17	21,6	24,77	27,59	30,19	31,00	33,41	35,7	40,79
18	22,8	25,99	28,87	31,53	32,35	34,81	37,2	42,31
19	23,9	27,20	30,14	32,85	33,69	36,19	38,6	43,82
20	25,0	28,41	31,41	34,18	35,02	37,57	40,0	45,32
22	27,3	30,81	33,92	36,78	37,66	40,29	42,8	48,27
24	29,6	33,20	36,42	39,36	40,27	42,98	45,6	51,18
26	31,8	35,56	38,88	41,92	42,86	45,64	48,3	54,05
28	34,0	37,92	41,34	44,46	45,42	48,28	51,0	56,89
30	36,2	40,26	43,77	46,98	47,96	50,89	53,7	59,70

Додаток 5

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n\text{-}1)$

γ / $k = n - 1$	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	3,08	6,31	12,71	31,8	63,7	63,7
2	1,886	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	1,638	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
4	1,533	2,13	2,77	3,75	4,60	8,61
5	1,476	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
6	1,440	1,943	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,415	1,895	2,36	3,00	3,50	5,40
8	1,397	1,860	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,383	1,833	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,372	1,812	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,363	1,796	2,20	2,72	3,11	4,49
12	1,356	1,782	2,18	2,68	3,06	4,32
13	1,350	1,771	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,345	1,761	2,14	2,62	2,98	4,14
15	1,341	1,753	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,337	1,746	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,333	1,740	2,11	2,57	2,90	3,96
18	1,330	1,734	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,328	1,729	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,325	1,725	2,09	2,53	2,84	3,85
21	1,323	1,721	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,321	1,717	2,07	2,51	2,82	3,79
23	1,319	1,714	2,07	2,50	2,81	3,77
24	1,318	1,711	2,06	2,49	2,80	3,74
25	1,316	1,708	2,06	2,48	2,79	3,72
26	1,315	1,706	2,06	2,48	2,78	3,71
27	1,314	1,703	2,05	2,47	2,77	3,69
28	1,313	1,701	2,05	2,47	2,76	3,67
29	1,311	1,699	2,04	2,46	2,76	3,66
30	1,310	1,697	2,04	2,46	2,75	3,65
40	1,303	1,684	2,02	2,42	2,70	3,55
60	1,296	1,671	2,00	2,39	2,66	3,46
120	1,289	1,658	1,980	2,36	2,62	3,37
∞	1,282	1,645	1,960	2,33	2,58	3,29

Додаток 6

Значення, що задовольняють рівнянню $p_\alpha = P\left\{ \frac{X_{(n)} - \bar{x}}{S_1} > \beta_\alpha \right\}$

n \ p_α	0,10	0,05	0,01	n \ p_α	0,10	0,05	0,01
4	1,42	1,46	1,49	15	2,25	2,41	2,70
5	1,60	1,67	1,75	16	2,28	2,44	2,75
6	1,73	1,82	1,94	17	2,31	2,48	2,78
7	1,83	1,94	2,10	18	2,34	2,50	2,82
8	1,91	2,03	2,22	19	2,36	2,53	2,85
9	1,98	2,11	2,32	20	2,38	2,56	2,88
10	2,04	2,18	2,41	21	2,41	2,58	2,91
11	2,09	2,23	2,48	22	2,43	2,60	2,94
12	2,13	2,28	2,55	23	2,45	2,62	2,96
13	2,18	2,33	2,61	24	2,47	2,64	2,99
14	2,21	2,37	2,66	25	2,49	2,66	3,01

Додаток 7

Таблиця критичних значень D_α

n	$D_{0,10}$	$D_{0,05}$	n	$D_{0,10}$	$D_{0,05}$
3	0,636	0,708	23	0,247	0,275
4	0,565	0,624	24	0,242	0,269
5	0,509	0,563	25	0,238	0,264
6	0,468	0,519	26	0,233	0,259
7	0,436	0,483	27	0,229	0,254
8	0,410	0,454	28	0,225	0,250
9	0,387	0,430	29	0,221	0,246
10	0,369	0,409	30	0,218	0,242
11	0,352	0,391	31	0,214	0,238
12	0,338	0,375	32	0,211	0,234
13	0,325	0,361	33	0,208	0,231
14	0,314	0,349	34	0,205	0,227
15	0,304	0,338	35	0,202	0,224
16	0,295	0,327	36	0,199	0,221
17	0,286	0,318	37	0,196	0,218
18	0,278	0,309	38	0,194	0,215
19	0,271	0,301	39	0,191	0,213
20	0,265	0,294	40	0,189	0,210
21	0,259	0,287	50	0,170	0,177
22	0,253	0,281	100	0,121	0,134

Критичні точки F- розподілу Фішера, рівень значущості $\alpha = 0{,}01$

ν_1 – число ступенів свободи чисельника, ν_2 – число ступенів свободи знаменника

ν_2	ν_1										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**
1	4052	4999,5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,42
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,89
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,71
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,46
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,37
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,30
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,23
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,17
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,12
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,07
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,03
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	2,99
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	2,96
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,93
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,90
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,87
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,84
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,66
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,50
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,34
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,18

ν_2	ν_1							
	15	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	99,43	99,45	99,46	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	26,87	26,69	26,60	26,50	26,41	26,32	26,22	26,13
4	14,20	14,02	13,93	13,84	13,75	13,65	13,56	13,46
5	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,20	9,11	9,02
6	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,06	6,97	6,88
7	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,82	5,74	5,65
8	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,03	4,95	4,86
9	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,48	4,40	4,31
10	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,08	4,00	3,91
11	4,25	4,10	4,02	3,94	3,86	3,78	3,69	3,60
12	4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,54	3,45	3,36
13	3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,34	3,25	3,17
14	3,66	3,51	3,43	3,35	3,27	3,18	3,09	3,00
15	3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,05	2,96	2,87
16	3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,93	2,84	2,75
17	3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,83	2,75	2,65
18	3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,75	2,66	2,57
19	3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,67	2,58	2,49
20	3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,61	2,52	2,42
21	3,03	2,88	2,80	2,72	2,64	2,55	2,46	2,36
22	2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,50	2,40	2,31
23	2,93	2,78	2,70	2,62	2,54	2,45	2,35	2,26
24	2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,40	2,31	2,21
25	2,85	2,70	2,62	2,54	2,45	2,36	2,27	2,17
26	2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,33	2,23	2,13
27	2,78	2,63	2,55	2,47	2,38	2,29	2,20	2,10
28	2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,26	2,17	2,06
29	2,73	2,57	2,49	2,41	2,33	2,23	2,14	2,03
30	2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,21	2,11	2,01
40	2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,02	1,92	1,80
60	2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,84	1,73	1,60
120	2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,66	1,53	1,38
∞	2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,47	1,32	1,00

Критичні точки F- розподілу Фішера, рівень значущості $\alpha = 0,05$

ν_1 – число ступенів свободи чисельника, ν_2 – число ступенів свободи знаменника

ν_2	ν_1										
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**12**
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75

ν_2	ν_1							
	15	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	**∞**
1	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,3	254,3
2	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,23
8	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,11	5,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,97	1,73
25	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Барковський, В. В., Барковська, Н. В. та Лопатін, О. К. (2017). *Теорія ймовірностей та математична статистика.* Київ: Центр учбової літератури, 424 с.

2. Валь, О. Д., Мельничук, О. Д. та Королюк, С. Л. (2017). *Теорія ймовірностей від найпростішого: навчальний посібник.* Чернівці: Книги-XXI, 160 с.

3. Донченко, В. С., Сидоров, М. В. та Шарапов, М. М. (2019). *Теорія ймовірності та математична статистика: навчальний посібник*. Київ: Академія, 288 с.

4. Єрьоменко, В. О., Шинкарик М. І. (2010). *Теорія імовірностей: навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей*. Тернопіль: Економічна думка, 176 с.

5. Зайцев, Е. П. (2016). *Теорія ймовірностей і математична статистика. Базовий курс з індивідуальними завданнями і розв'язком типових варіантів.* Київ: Алерта, 440 с.

6. Коваленко, І. П. (2017). *Математична статистика у прикладах і задачах*. Київ: Видавничий Дім «Слово», 496 с.

7. Конет, І. М. (2011). *Теорія ймовірностей та математична статистика в прикладах і задачах: навчально-методичний посібник*. Кам'янець-Подільський: Абетка, 218 с

8. Медведєв, М. Г., Пащенко І. О. (2017). *Теорія ймовірностей та математична статистика*. Київ: Вид-во «Ліра-К», 536 с.

9. Пушак, Я. С., Лозовий, Б. Л. (20016). *Теорія імовірностей і елементи математичної статистики: навчальний посібник.* Львів: УАД, 428 с

10. Турчин, В. М. (2016). *Теорія ймовірностей і математична статистика. Основні поняття, приклади, задачі*. Дніпропетровськ: ІМА-прес, 556 с.

11. Черняк, О. І., Обушна, О. М. та Ставицький А. В. (2012). *Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник задач: навчальний посібник*. 2-ге видання, виправлене. Київ: Т-во «Знання», КОО, 199 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Серія «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ ТА СОЦІОЛОГІВ»

Михайленко Світлана Василівна
Свіщова Євгенія Віталіївна
Янцевич Артем Артемович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

для самостійного вивчення дисципліни

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка *Є. В. Свіщова*

Підписано до друку ___.2022. Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Гарнітура «Таймс».
Умов. друк. арк. 10,62. Обл.-вид. арк. 10,23.
Тираж 100 пр. Зам №

План 2021/22 навч. р., поз. № 3 в переліку робіт кафедри.

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво № 1153 от 16.12.2002.

Надруковано у видавництві Народної української академії
Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Лермонтовська, 27.