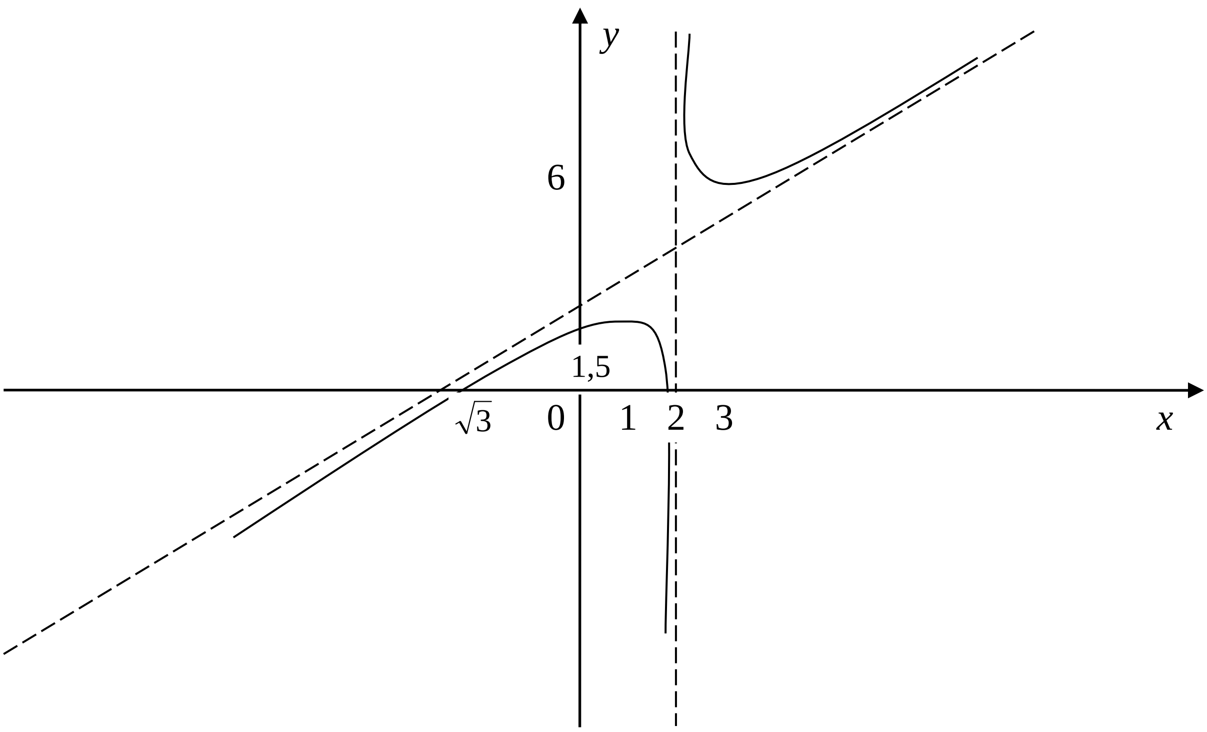
НАРОДНАЯ УКРАИНСКАЯ АКАДЕМИЯ

В. Г. Михайленко, Е. В. Свищева, А. Ю. Петрова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие



Издательство НУА

НАРОДНАЯ УКРАИНСКАЯ АКАДЕМИЯ

Серия «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ»

В. Г. Михайленко, Е. В. Свищева, А. Ю. Петрова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие
для самостоятельного изучения дисциплины

Издание второе, исправленное и дополненное

Харьков
Издательство НУА
2021

УДК 517(075.8+076.1)

М69

Утверждено на заседании
кафедры информационных технологий и математики.
Протокол № 6 от 01.02.2021

Р е ц е н з е н т канд. физ.-мат. наук *С. Б. Данилевич*

Посібник містить задачі, які відносяться до розділу «Математичний аналіз». На початку кожного розділу подано необхідні короткі теоретичні відомості (визначення, формули і т. д.). Більшість задач супроводжуються вказівками щодо їх розв'язання, детально розбираються типові приклади.

Для студентів економічних спеціальностей.

Михайленко, Виталий Григорьевич.

М69 Математический анализ: учеб. пособие для самостоят. изучения дисциплины / В. Г. Михайленко, Е. В. Свищева, А. Ю. Петрова ; Нар. укр. акад., [каф. информ. технологий и математики]. – 2-е изд., испр. и доп. – Харьков : Изд-во НУА, 2021. – 128 с. – (Математика для экономистов).

Пособие содержит задачи, относящиеся к разделу «Математический анализ». В начале каждого раздела приведены необходимые краткие теоретические сведения (определения, формулы и т. д.). Большинство задач снабжены указаниями по их решению, подробно разбираются типовые примеры.

Для студентов экономических специальностей.

УДК 517(075.8+076.1)

ВВЕДЕНИЕ

Переход к рыночным отношениям привел к необходимости подготовки экономистов, в совершенстве владеющих математическим аппаратом экономических исследований и умеющих применить его на практике. Фундаментальную основу в математической подготовке экономистов составляет курс «Математика для экономистов».

У изучающих математику будущих экономистов наибольшие трудности вызывает решение задач. В обширной математической литературе недостаточно руководств к практическим занятиям по этому курсу, которые в систематическом изложении подробно знакомили бы студентов с методами решения задач и помогли бы им приобрести необходимые навыки.

Цель этого пособия – восполнить в известной мере этот пробел, помочь студентам научиться самостоятельно решать основные типы задач.

Учебное пособие охватывает следующие разделы курса «Математика для экономистов»: введение в анализ (предел и непрерывность), дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных, интегральное исчисление (неопределенный и определенный интеграл), дифференциальные уравнения и ряды.

Весь материал пособия разделен на отдельные параграфы. В начале каждого параграфа помещены определения, теоремы, формулы и другие краткие сведения из теории и методические указания, необходимые для решения последующих задач. Затем приводятся подробные решения типовых задач с краткими пояснениями теоретических положений. В конце каждого параграфа содержится достаточное количество задач для самостоятельного решения.

Такое построение учебного пособия позволяет использовать его как для работы под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения указанных разделов курса «Математика для экономистов».

Студенты получат большую пользу, если будут работать над пособием активно. Это значит, что прежде чем приступить к решению задач, следует основательно изучить теоретический материал, относящийся к соответствующему параграфу. Хочется также обратить внимание на учебное пособие [1], написанное авторами и содержащее более полно изложенные теоретические сведения. Затем надо внимательно, подробно, с выполнением всех действий на бумаге разобрать решенные задачи и обязательно закрепить знания решением задач, предназначенных для самостоятельной работы. Еще лучше, если студенты, усвоив теорию, сразу приступают к самостоятельному решению задач, обращаясь к решениям в тексте лишь в случае затруднений.

Учитывая, что учебное пособие предназначено для студентов-экономистов, в нем рассматривается значительное число задач с экономическим смыслом, которые помогут приобрести навыки применения математики к решению простейших прикладных задач в экономике, планировании и управлении производством, в финансовой и коммерческой деятельности.

Для удобства работы с пособием некоторые основные правила и формулы элементарной математики, а также рассмотренных разделов курса «Математика для экономистов» приведены отдельно в виде Приложения и помещены в конце пособия. Там же размещен список рекомендуемой литературы, который может быть использован студентами для более детального изучения курса.

Пособие написано в полном соответствии с программой по курсу «Математика для экономистов». Оно рассчитано как на студентов очной формы обучения, так и на студентов-заочников.

Таким образом, данное учебное пособие может быть использовано как справочник, решебник и в то же время как задачник, что весьма удобно для студентов и предоставляет им широкие возможности для активной самостоятельной работы.

1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1.1. Вещественные числа и их основные свойства

Множество вещественных чисел состоит из рациональных и иррациональных чисел. Рациональным называется число, которое можно представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, где p и q – целые числа, причем $q \neq 0$. Иррациональными называются числа, которые не являются рациональными.

Любые два вещественные числа a и b связаны одним из следующих соотношений: $a = b$, или $a > b$, или $a < b$. Каковы бы ни были числа a, b и c:

1) если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$;
2) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Свойства арифметических действий

Каковы бы ни были числа a, b и c:

1) $a + 0 = a$; $a + b = b + a$; $(a+b)+c = a+(b+c) = a+b+c$;
2) $ab = ba$; $(ab)\cdot c = a\cdot(bc) = a\cdot b\cdot c$; $a\cdot 0 = 0\cdot a = 0$; $1\cdot a = a\cdot 1 = a$;
3) $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$;
4) если $a < b$, то $a + c < b + c$;
5) если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$; если же $c < 0$, то $ac > bc$;
6) если $a \neq 0$, то $\frac{1}{a} = a^{-1}$; $\frac{a}{a} = 1$; $\frac{0}{a} = 0$;
7) $(a^b)^c = a^{bc}$.

Абсолютной величиной (или ***модулем***) числа a называется само число a, если $a \geq 0$, и число $-a$, если $a < 0$. Абсолютная величина числа a обозначается символом $|a|$.

Таким образом:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}.$$

Абсолютная величина числа обладает следующими свойствами:

$|a| \geq 0$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$; $|-a| = |a|$, $-|a| \leq a \leq |a|$, $|a \pm b| \leq |a| + |b|$; $|ab| = |a|\cdot|b|$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (если $b \neq 0$); $\sqrt{a^2} = |a|$, $|a|^2 = a^2$.

Если $\varepsilon > 0$, то неравенства $|a| < \varepsilon$ и $-\varepsilon < a < \varepsilon$ равносильны (эквивалентны).

Числа a_1, a_2, a_3, ..., a_n образуют арифметическую прогрессию, если $a_{k+1} = a_k + d$, $k = 1,\ 2, ..., n-1$. Число d называется разностью арифметической прогрессии. Общий член прогрессии $a_k = a_1 + (k-1) \cdot d$; сумма

n членов арифметической прогрессии: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$.

Числа a_1, a_2, …, a_n образуют геометрическую прогрессию, если $a_{k+1} = a_1 q^k$ $(a_1 \neq 0,\ q \neq 0)$ $k = 1, 2, ..., n-1$. Число q называется знаменателем геометрической прогрессии. Общий член прогрессии $a_k = a_1 q^{k-1}$, сумма n членов геометрической прогрессии: $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$. Для бесконечно убывающей геометрической прогрессии $(|q| < 1)$ сумма членов прогрессии $S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Решением уравнения $a + x = b$ является число $x = b - a$; решением уравнения $ax = b$ $(a \neq 0)$ является число $x = \dfrac{b}{a}$.

Решением уравнения $|x| = a$ $(a > 0)$ являются числа $x_1 = a$ и $x_2 = -a$.

Решениями (корнями) уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если дискриминант $b^2 - 4ac \geq 0$, являются числа $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; если же дискриминант $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение вещественных корней (решений) не имеет.

Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет вещественные корни x_1 и x_2, то квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ раскладывается на множители: $ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Если a и b произвольные числа, причем $a < b$, то множество всех чисел x, заключенных между числами a и b, т. е. удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, обозначается $x \in (a, b)$ и называется интервалом (открытым интервалом, промежутком), а сами числа a и b называются концами интервала (соответственно левым и правым). Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$, обозначается $x \in [a, b]$ и называется отрезком (замкнутым интервалом).

Множество чисел x, удовлетворяющих условию $x < a$ $(x > a)$, обозначается $x \in (-\infty, a)$ $(x \in (a, +\infty))$; множество чисел x, удовлетворяющих условию $x \le a$ $(x \ge a)$, обозначается $x \in (-\infty,\ a]$ $\left(x \in [a,\ +\infty)\right)$; множество всех вещественных чисел обозначается $x \in \left(-\infty,\ +\infty\right)$.

Каждому вещественному числу a соответствует точка на числовой оси (координатной прямой); каждой точке числовой оси соответствует некоторое вещественное число a, которое называется ее координатой. Числовым промежуткам (интервалам) соответствуют промежутки (интервалы) на координатной (числовой) прямой. Множеству всех вещественных чисел соответствует вся координатная прямая (поэтому множество $x \in \left(-\infty,\ +\infty\right)$ называется также числовой прямой, а любое число – точкой этой прямой).

Неравенство $|x| < a$, $(a > 0)$ эквивалентно двойному неравенству $-a < x < a$.

Если a – произвольная точка числовой оси, а ε – любое положительное число, то интервал $x \in \left(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon\right)$ называется ε, т. е. окрестностью точки a. Этот интервал может быть записан так: $|x - a| < \varepsilon$.

ПРИМЕРЫ

Пример 1. Записать в виде интервалов множества чисел (точек), удовлетворяющих неравенствам:

1) $|x| < 5$; 2) $|x| \ge 7$; 3) $x^2 \le 225$; 4) $|x + 2| < 4$; 5) $|x - 9| \ge 12$.

Р Е Ш Е Н И Я.

1. Неравенство $|x| < 5$ эквивалентно (равносильно) неравенствам $-5 < x < 5$. Следовательно, $x \in \left(-5,\ 5\right)$.

2. Неравенство $|x| \ge 7$ эквивалентно неравенствам $x \ge 7$ и $x \le -7$. Следовательно, $x \in (-\infty,\ -7] \cup [7,\ +\infty)$.

3. Неравенство $x^2 \le 225$ эквивалентно неравенству $|x| \le 15$, которое в свою очередь эквивалентно неравенствам $-15 \le x \le 15$. Значит, $x \in [-15,\ 15]$.

4. Неравенство $|x + 2| < 4$ эквивалентно неравенствам $-4 < x + 2 < 4$. Решая левое неравенство $-4 < x + 2$, получаем $-6 < x$; решая правое неравенство $x + 2 < 4$, получаем $x < 2$. Следовательно, $x \in (-6,\ 2)$.

5. Неравенство $|x - 9| \ge 12$ эквивалентно двум неравенствам $x - 9 \ge 12$ и $x - 9 \le -12$. Из первого неравенства получаем $x \ge 21$, а из второго – $x \le -3$. Следовательно, $x \in (-\infty,\ -3] \cup [21,\ +\infty)$.

Пример 2. Разложить на множители: 1) $x^2 - 5x + 6$; 2) $3x^2 - 2x - 1$.

РЕШЕНИЯ.

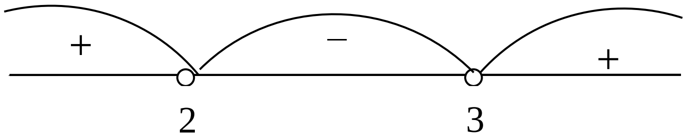
1. Найдем корни уравнения $x^2-5x+6=0$: $x_{1,\,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 6}}{2}=$ $=\dfrac{5\pm 1}{2}\ \Rightarrow\ x_1=3,\quad x_2=2$. Следовательно, $x^2-5x+6=(x-3)\cdot(x-2)$.

2. Корнями уравнения $3x^2-2x-1=0$ будут $x_{1,\,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+3\cdot 4}}{6}=$ $=\dfrac{2\pm 4}{6}\Rightarrow x_1=1,\qquad x_2=-\dfrac{1}{3}$. Значит, $3x^2-2x-1=3\cdot(x-1)\cdot(x+\dfrac{1}{3})=$ $=(x-1)\cdot(3x+1)$.

Пример 3. Решить неравенства: 1) $x^2-5x+6\geq 0$; 2) $3x^2-2x-1<0$.

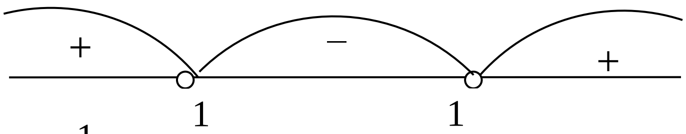
РЕШЕНИЯ.

1. Неравенство $x^2-5x+6\geq 0$ эквивалентно неравенству $(x-3)(x-2)\geq 0$ (см. пример 2), которое удобно решить методом интервалов:



Следовательно, $x\in(-\infty,\ 2]\cup[3,\ +\infty)$.

2. Неравенство $3x^2-2x-1<0$ эквивалентно неравенству $3(x-1)(x+\dfrac{1}{3})<0$, которое решаем аналогично предыдущему примеру:



Значит, $x\in(-\dfrac{1}{3},\ 1)$ $-\dfrac{1}{3}$

ЗАДАНИЯ

1.1. Записать в виде интервалов множества чисел (точек), удовлетворяющих условиям:

1) $|x|<3$; 2) $|x|\geq 4$; 3) $x^2\leq 25$; 4) $x^2>36$; 5) $|x-2|<1$; 6) $|x-3|\geq 2$;

7) $(x-2)^2 \geq 9$; 8) $(x+3)^2 < 16$; 9) $-3 \leq x+2 \leq 5$; 10) $|2x+1| < 1$.

1.2. Найти сумму членов прогрессии:

1) $1 + 3 + 5 + \ldots + 121$; 2) $5 + 2 - 1 - 4 - \ldots -(8 - 3n)$;

3) $1 + 2 + 4 + \ldots + 1024$; 4) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}$;

5) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots$; 6) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$; 7) $\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\ldots$.

1.3. Разложить на множители:

1) x^2+3x-4; 2) $2x^2+3x-5$; 3) $6x^2+x-2$; 4) $15x^2-11x+2$.

1.4. Решить уравнения:

1) $|x|+|x-2| = 2$; 2) $|x+1|-|x+3| = 0$; 3) $|x+3|-|x+1| = 2$.

1.2. Функциональная зависимость

Переменной величиной называется величина, которая принимает различные числовые значения. Величина, численные значения которой не меняются, называется постоянной величиной или константой.

Если каждому значению переменной x, принадлежащему некоторому интервалу, соответствует одно определенное значение другой переменной y, то говорят, что y есть функция от x и символически это записывают так: $y = f(x)$, или $y = \varphi(x)$, или $y = y(x)$ и т. п. При этом переменная x называется аргументом или независимой переменной, а множество значений x, для которых определено значение функции $y = f(x)$, называется областью определения функции $f(x)$.

Если функция задана уравнением вида $y = f(x)$, то она называется явной (заданной в явном виде). Функция, заданная уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенном относительно y, называется неявной. Говорят, что функция задана параметрически, если x и y заданы как функции третьей переменной, называемой параметром и обозначаемой обычно буквой t: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$.

Если переменная y зависит от переменной u, которая сама является функцией от x, то y называется ***сложной функцией*** от x или ***суперпозицией функций*** и обозначается $y = f(u(x))$ или $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости $x0y$, координаты которых удовлетворяют условию: $y = f(x)$, т. е. множество точек плоскости $x0y$ с координатами $(x, f(x))$.

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей***, если большему значению аргумента отвечает большее значение функции, т. е., если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $f(x)$ называется ***убывающей,*** если большему значению аргумента отвечает меньшее значение функции, т. е., если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$.

Функция $f(x)$ называется ***четной***, если $f(-x) = f(x)$ и ***нечетной,*** если $f(-x) = -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси $0y$, график нечетной – относительно начала координат.

Функция $f(x)$ называется ***периодической***, если существует положительное число T, такое что $f(x+T) = f(x)$. Наименьшее положительное число T, обладающее указанным свойством, называется ***основным периодом функции***.

Основными элементарными функциями называются:

1) степенная функция $y = x^a$, где a – любое вещественное число;

2) показательная функция $y = a^x$, где a – положительное число, не равное единице;

3) логарифмическая функция $y = \log_a x$, где a – положительное число, не равное единице;

4) тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

5) обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарными функциями называются функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и суперпозиций.

Пример 4. Найти области определения функций:

1) $y = \sqrt{x^2 + 4x - 5}$; 2) $y = \log_a(x-1)$; 3) $y = \dfrac{2x+3}{x^2 + 4x - 5}$.

Р Е Ш Е Н И Я.

1. Функция $y=\sqrt{x^2+4x-5}$ определена для тех значений x, при которых $x^2 + 4x - 5 \geq 0$. Так как корнями уравнения $x^2 + 4x - 5 = 0$ являются $x_1 = -5$ и $x_2 = 1$, то областью определения этой функции будет $x\in(-\infty,\ -5]\cup[1,\ +\infty)$.

2. Функция $y=\log_a(x-1)$ будет определена для тех значений x, при которых $x - 1 > 0$, т. е. $x\in(1,\ +\infty)$.

3. Функция $y=\dfrac{2x+3}{x^2+4x-5}$ определена для всех значений x, при которых $x^2 + 4x - 5 \neq 0$. Следовательно, областью определения этой функции будет вся числовая ось, за исключением точек $x = 1$ и $x = -5$, т. е. $x\in(-\infty,\ -5)\cup(-5,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$.

Пример 5. Есть ли среди функций: 1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$, 2) $g(x)=3^x+3^{-x}$, 3) $\varphi(x)=1+x+x^2$ четные или нечетные?

Р Е Ш Е Н И Я.

1. Заменяя x на $-x$, получим: $f(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{-x}=\dfrac{\cos x}{-x}=-f(x)$. Значит, функция $f(x)$ нечетная.

2. В данном случае $g(-x)=3^{-x}+3^{-(-x)}=3^{-x}+3^{x}=g(x)$. Значит, функция $g(x)$ четная.

3. Здесь $\varphi(-x)=1+(-x)+x^2=1-x+x^2$. Так как $\varphi(-x)\neq\varphi(x)$ и $\varphi(-x)\neq-\varphi(x)$, то функция $\varphi(x)$ не является ни четной, ни нечетной, т. е. $\varphi(x)$ – функция общего вида.

Пример 6. Найти $\varphi(f(x))$ и $f(\varphi(x))$, если $\varphi(x)=\sqrt{x}$, а $f(x)=\sin x$.

Р Е Ш Е Н И Е. $\varphi(f(x))=\sqrt{\sin x}$, $f(\varphi(x))=\sin\sqrt{x}$.

ЗАДАНИЯ

1.5. В точках $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm 2$ вычислить значения функций:

1) $y=|x|$; 2) $y=|x-1|$; 3) $y=|x|-x$; 4) $y=|x|+|x-1|+|x-2|$;

5) $y=2^x+2^{-x}$; 6) $y=3^x-3^{-x}$; 7) $y=\sin\dfrac{\pi x}{2}$; 8) $y=\cos\pi x$.

1.6. Найти области определения функций:

1) $y=\sqrt{x-1}$; 2) $y=\sqrt{x^2-1}$; 3) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$; 4) $y=\sqrt{x^2+x+1}$;

5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$; 6) $y=\sqrt[3]{x}$; 7) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x+2}$;

8) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$; 9) $y=\dfrac{1}{1+2^x}$; 10) $y=\dfrac{3^x}{1+3^x}$; 11) $y=\lg(2x^2+5x-7)$;

12) $y=\dfrac{1}{\log_2(x^2-3x+2)}$; 13) $y=\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$; 14) $y=\sqrt{\sin x}$;

15) $y=\sqrt{1+\cos 3x}$; 16) $y=\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}$.

1.7. Вычислить $\varphi(a),\ \varphi(a+h),\ \varphi(b)-\varphi(a)$, $\dfrac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{h}$, $\dfrac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$, если:

1) $\varphi(x)=x^2$; 2) $\varphi(x)=x^3$; 3) $\varphi(x)=\sqrt{x}$; 4) $\varphi(x)=x^2+x+2$.

1.8. Какие из указанных функций четные, а какие – нечетные:

1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$; 2) $y=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$; 3) $y=\dfrac{(x+1)^2}{x}$; 4) $y=a^x+\dfrac{1}{a^x}$;

5) $y=\dfrac{1+\cos x}{x}$; 6) $y=x+x^2+x^3$; 7) $y=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^3$.

1.9. Найти $\varphi(f(x))$ и $f(\varphi(x))$, если: 1) $\varphi(x)=x^2,\ f(x)=2^x$;

2) $\varphi(x)=x^3,\ f(x)=\lg x$; 3) $\varphi(x)=\sin x,\ f(x)=\dfrac{1}{x}$.

1.10. Построить графики функций:

1) $y=x$; 2) $y=|x|$; 3) $y=-|x|$; 4) $y=|x+1|$; 5) $y=x^2$;
6) $y=x^3$; 7) $f(x)=\log_a x$; 8) $y=a^x$; 9) $y=2\sin x,\ x\in[0,\ 2\pi]$;
10) $y=\cos\ 2x,\ x\in[0,\ 2\pi]$.

1.3. Предел числовой последовательности (переменной величины)

Переменная величина x_n принимает бесконечную последовательность значений: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, т. е. x_n является функцией от n, и для любого натурального числа n можно указать соответствующее значение x_n.

Число a называется ***пределом числовой последовательности*** $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ или ***пределом переменной*** x_n, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, (зависящее от ε), что для всех $n \geq N$ выполняется условие $|x_n - a| < \varepsilon$. Символически это записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Если переменная величина x_n стремится к своему пределу a, оставаясь меньше a, то используется запись $x_n \to a - 0$, если же переменная x_n стремится к a, оставаясь больше a, то используется запись $x_n \to a + 0$.

Переменная величина может иметь только один предел.

Предел постоянной равен самой постоянной, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

Переменная величина называется ***бесконечно малой***, если ее предел равен нулю. Бесконечно малые, для удобства, часто обозначают буквами α_n, β_n, γ_n, … и т. п. Алгебраическая сумма *конечного* числа бесконечно малых является бесконечно малой.

Бесконечно малые α_n и β_n называются ***эквивалентными*** ($\alpha_n \sim \beta_n$), если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = 1$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n}{\beta_n} = 0$, то говорят, что бесконечно малая α_n более высокого порядка (малости), чем β_n.

Для того чтобы переменная x_n имела предел, равный a, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде $x_n = a + \alpha_n$, где α_n – бесконечно малая.

Переменная x_n называется ***ограниченной***, если существует такое число $A > 0$, что для всех n выполняется условие $|x_n| < A$. Если переменная x_n имеет предел, то она ограниченная. Если переменная x_n не принимает нулевых значений и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$, то переменная $\dfrac{1}{x_n}$ – ограниченная.

Произведение ограниченной величины на бесконечно малую есть бесконечно малая.

Переменная величина x_n называется ***бесконечно большой***, если для любого сколь угодно большого положительного числа A, можно указать такое натуральное число N, что для всех $n \geq N$ имеет место неравенство $|x_n| > A$. При этом используется следующая символика: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Если бесконечно большая величина принимает только положительные (отрицательные) значения, то это символически записывают так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ или $x_n \to -\infty$ при $n \to -\infty$). Если x_n – бесконечно большая, то $\dfrac{1}{x_n}$ – бесконечно малая; если α_n – бесконечно малая и $\alpha_n \neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha_n}$ – бесконечно большая.

При вычислении пределов используются следующие их свойства.

Если существуют $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (cx_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} x_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Свойства 2) и 3) справедливы для любого *конечного числа переменных,* имеющих пределы;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, если y_n не принимает нулевых значений и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$;

5) если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентными им бесконечно малыми, т. е., если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n}{\beta_n}=a$ и $\alpha_n \sim \alpha_n{}^1$, $\beta_n \sim \beta_n{}^1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n^1}{\beta_n^1}=a;$$

6) если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$ и $x_n \le z_n \le y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$.

Пример 7. Показать, что при $n\to\infty$ последовательность 5, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{3}$, …, $4+\frac{1}{n}$, … имеет пределом число 4.

РЕШЕНИЕ.

Так как общий член последовательности равен $x_n=4+\dfrac{1}{n}$ и $\dfrac{1}{n}$ при $n\to\infty$ стремится к нулю, т. е. является бесконечно малой, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}(4+\dfrac{1}{n})=4$.

Пример 8. Найти пределы переменных:

1) $x_n=1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}$; 2) $x_n=\dfrac{n^2+2n-3}{3n^2+2n+1}$; 3) $x_n=\dfrac{\sqrt{n^6+n^2+10}}{2n^3+n}$;

4) $x_n=\dfrac{1+2+3+...+n}{n^2+1}$; 5) $x_n=\dfrac{2^n+3^n}{1+3^n}$; 6) $x_n=\dfrac{\sin n}{n}$;

7) $x_n=\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{n^2-n+3}$; 8) $x_n=n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+3})$.

РЕШЕНИЯ.

1. Так как $\frac{2}{n}$ и $\frac{3}{n^2}$ являются бесконечно малыми, то $\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}$ тоже является бесконечно малой. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2})=1$.

2. Переменная величина является дробью, числитель и знаменатель которой неограниченно растут, т. е. являются бесконечно большими (в таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$). Поэтому, при вычислении предела воспользоваться свойством (4) нельзя. Разделив числитель и знаменатель на n^2, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-3}{3n^2+2n+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}=\frac{1}{3},$$

так как при $n\to\infty$ каждая из дробей $\frac{2}{n}$, $\frac{3}{n^2}$, $\frac{1}{n^2}$ являются бесконечно малой.

3. В данном случае также имеет место неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель на n^3 (при делении $\sqrt{n^6+n^2+10}$ на n^3 подкоренное выражение делится на n^6): $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^6+n^2+10}}{2n^3+n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{10}{n^6}}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^4}+\frac{10}{n^6}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{2}.$$

4. Выражение, стоящее в числителе, представляет собой сумму членов арифметической прогрессии: $1+2+3+...+n=\frac{(n+1)n}{2}$. Поэтому,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n}{2(n^2+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2(1+\frac{1}{n^2})}=\frac{1}{2}.$$

5. $\frac{2^n+3^n}{1+3^n}$ при $n\to\infty$ представляет собой неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Разделим числитель и знаменатель на 3^n. Получим: $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{1+3^n}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\frac{1}{3^n}+1}=1$, так как $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ и $\frac{1}{3^n}$ – бесконечно малые.

6. В данном случае предел числителя не существует, но при всех n $\sin n$ является ограниченной величиной, так как $|\sin n|\le 1$. Поэтому,

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=\lim_{n\to\infty}\sin n\cdot\frac{1}{n}=0$, так как $\frac{1}{n}$ – бесконечно малая.

7. Здесь имеет место неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Преобразуем ее к неопределенности вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. С этой целью умножим и разделим переменную x_n на $\sqrt{n^2+2n-1}+\sqrt{n^2-n+3}$, после чего числитель и знаменатель разделим на n (подкоренные выражения при этом делятся на n^2). Получим:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{n^2-n+3}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{n^2-n+3})(\sqrt{n^2+2n-1}+\sqrt{n^2-n+3})}{\sqrt{n^2+2n-1}+\sqrt{n^2-n+3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1-(n^2-n+3)}{\sqrt{n^2+2n-1}+\sqrt{n^2-n+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{\sqrt{n^2+2n-1}+\sqrt{n^2-n+3}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}}=\frac{3}{2}.$$

8. В данном случае имеем дело с неопределенностью вида $(\infty(\infty-\infty))$. Для нахождения предела выполним предварительно преобразования, аналогичные преобразованиям предыдущего примера:

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+3})=(\infty(\infty-\infty))=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+3})(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+3})}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+1-(n^2+3))}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+3}}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}}=-\frac{2}{2}=-1.$$

ЗАДАНИЯ

1.11. Найти пределы переменных:

1) $x_n=\dfrac{5n^3+3n^2+4}{4n^3+2n+5}$; 2) $x_n=\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+2n+3}$; 3) $x_n=\dfrac{n^5+3n^2+n}{2n^2+n+7}$;

4) $x_n=\dfrac{n^3+5n-4}{n^2+3n+6}$; 5) $x_n=\dfrac{n^2+n+1}{n^3+2n-1}$; 6) $x_n=\dfrac{n+3}{n^3+n^2+1}$;

7) $x_n=\dfrac{1+3+5+...+(2n-1)}{2+4+6+...+2n}$; 8) $x_n=\dfrac{2+5+8+...+(3n-1)}{5n^2+1}$;

9) $x_n = \dfrac{\sqrt{n^4 + n^2 + 2}}{2n^2 + n}$; 10) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^6 + n^4 + 1}}{n^2 + 2}$; 11) $x_n = \dfrac{2\sqrt{n} - 3\sqrt[3]{n}}{3\sqrt{n} + 2\sqrt[3]{n}}$;

12) $x_n = \dfrac{1 + \sqrt{n} + n}{2 + \sqrt{n} - n}$; 13) $x_n = \dfrac{2^n + 2 \cdot 5^n}{3^n + 3 \cdot 5^n}$; 14) $x_n = \dfrac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}$;

15) $x_n = \dfrac{2^{-n} + 2^n}{2^{-n} - 2^n}$; 16) $x_n = \dfrac{3^{-n}}{n}$; 17) $x_n = \dfrac{\cos n}{n}$; 18) $x_n = \dfrac{\sin n}{\lg(n+1)}$;

19) $x_n = \dfrac{\sin n + 2\cos n}{\sqrt{n}}$; 20) $x_n = \dfrac{\sin n - 3\cos n}{\sqrt[3]{n}}$; 21) $x_n = \dfrac{n + \sin n}{n - \sin n}$;

22) $x_n = \dfrac{\cos n - \sqrt{n}}{\sin n + \sqrt{n}}$; 23) $x_n = \sqrt{n^2 + 5n + 1} - \sqrt{n^2 + 3n + 2}$;

24) $x_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 7n + 1}$; 25) $x_n = \sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n + 3}$;

26) $x_n = \sqrt{5n - 1} - \sqrt{n^2 + 2n}$; 27) $x_n = \sqrt{n} + 2\sqrt[3]{n + 1}$; 28) $x_n = \sqrt[4]{n + 2} + \sqrt[3]{n - 1}$;

29) $x_n = n(\sqrt{2n^2 + 3} - \sqrt{2n^2 - 1})$; 30) $x_n = n(\sqrt{n^4 + n^2 - 1} - \sqrt{n^4 + n^2 + n + 1})$.

1.4. Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a (т. е. на некотором интервале, содержащем точку a), за исключением, быть может, самой точки a, а $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ – произвольная бесконечная последовательность значений аргумента x (из этого интервала) такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ($x_n \neq a$). Этой последовательности значения аргумента соответствует последовательность значений функции: $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$.

Определение 1 (предел функции по Гейне). Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$ и обозначается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, если для любой последовательности $x_n \to a$ $(x_n \neq a)$ значений аргумента x, соответствующая последовательность $f(x_n)$ значений функции $f(x)$ имеет пределом число b.

Определение 2 (предел функции по Коши). Число b называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$.

Определения 1 и 2 эквивалентны (равносильны).

Числа $f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ и $f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ (если они существуют) называются ***односторонними пределами*** (соответственно, ***левым*** и ***правым*** пределом) функции $f(x)$ в точке a. Для существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство: $f(a-0) = f(a+0)$. Функция $f(x)$ в точке a может иметь только один предел.

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется ***бесконечно малой при*** $x \to a$. Бесконечно малые функции часто символически обозначают так: $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, ... Сумма и произведение *конечного* числа бесконечно малых функций, произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть функция бесконечно малая.

Бесконечно малые при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют ***эквивалентными***, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$; при этом используется запись $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.

Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b\right)$, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число $A(\varepsilon)$, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ для всех $|x| > A$.

Если $|f(x)| > M$ при $0 < |x - a| < \delta$ (при $|x| > A$), где M – произвольное положительное число, то условно записывают $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty\right)$. В этом случае функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой*** при $x \to a$ $(x \to \infty)$.

Если $f(x)$ – бесконечно большая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая функция: если $\alpha(x)$ – бесконечно малая, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ – бесконечно большая функция.

При вычислении пределов функций используются следующие их свойства (теоремы).

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, где a может быть как числом, так и символом ∞, то:

1) $\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Свойства (2) и (3) справедливы для любого *конечного* числа функций, имеющих пределы;

4) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, если $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел);

6) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e=2{,}71828\ldots$ (второй замечательный предел) (логарифм числа x по основанию e называется *натуральным* логарифмом и обозначается $\ln x$);

7) если отношение двух бесконечно малых функций имеет предел, то этот предел не изменится при замене каждой из бесконечно малых функций эквивалентной ей бесконечно малой, т. е., если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=b$, и $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=b$.

При решении примеров бывает полезным использовать эквивалентность следующих бесконечно малых функций: если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ при $x\to a$, то

$\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$, $\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$, $\arcsin\alpha(x)\sim\alpha(x)$, $\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x)$, $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$, $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$.

Пример 9. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{4x+5}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x+2}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x+2}\right)$;

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+1}{x+3}$; 7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x^3}{1-x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2-x-4}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-3x+1}}{x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2x^2+x-3)}{x^2-1}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x}$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1+x^2}\right)^{\frac{3}{x}}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln(1+2x)}$.

РЕШЕНИЯ.

1. В данном случае имеет место неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель на x. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{4x+5}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{4+\frac{5}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x}\right)}=\frac{3}{4}.$$

2. Здесь тоже неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Преобразуем знаменатель: $\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$. Так как x $\to +\infty$, то $x > 0$ и, следовательно, $|x| = x$. Поэтому:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3}{1}=3.$$

3. Решаем аналогично предыдущему, учитывая, что из условия $x \to -\infty$ следует, что $x < 0$ и, следовательно, $|x| = -x$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{3} = -3.$$

4. В данном случае имеет место неопределенность вида $(\infty - \infty)$. Умножим и разделим данное выражение на $\left(\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-x+2}\right)$, после чего числитель и знаменатель разделим на x:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x+2}\right) = (\infty-\infty) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x+2}\right)\left(\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-x+2}\right)}{\left(\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2-x+2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x-1-(x^2-x+2)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)} =$$

$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2.$$

5. Решаем аналогично предыдущему, учитывая, что в данном случае $|x| = -x$. Получим: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x+2}\right) = -2$.

6. Так как $\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)=7$ и $\lim\limits_{x\to 2}(x+3)=5$, то $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+1}{x+3}=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(3x+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+3)}=\frac{7}{5}=1{,}4.$$

7. При $x\to 1$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю (неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Так как $x^2-1=(x-1)(x+1)$, $x^3-1=$ $=(x-1)(x^2+x+1)$ и $x\neq 1$ при $x\to 1$, то числитель и знаменатель можно сократить (разделить) на $x-1$. Поэтому:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}.$$

8. Так как $\lim\limits_{x\to -1}(1-x^2)=0$, а $\lim\limits_{x\to -1}(1-x^3)=2$, то при $x\to -1$ функция $\dfrac{1-x^3}{1-x^2}$ неограниченно растет $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-x^3}{1-x^2}=\left(\dfrac{2}{0}\right)=\infty$.

9. Здесь неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для нахождения предела числитель и знаменатель необходимо разложить на множители:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-x-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(x+\frac{1}{2})}{3(x+1)(x-\frac{4}{3})}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+\frac{1}{2})}{3(x-\frac{4}{3})}=\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{3x-4}=$$

$$=\frac{-1}{-7}=\frac{1}{7}.$$

10. Это также неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{9+x}+3$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{9+x}-3)(\sqrt{9+x}+3)}{x(\sqrt{9+x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{9+x-9}{x(\sqrt{9+x}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{9+x}+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{9+x}+3}=\frac{1}{6}.$$

11. Решаем аналогично предыдущему:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-3x+1}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{2x^2-3x+1})(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2-3x+1})}{x(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2-3x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x+1-(2x^2-3x+1)}{x(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2-3x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{4x-x^2}{x(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2-3x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4-x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{2x^2-3x+1}}=\frac{4}{2}=2.$$

12. Так как при x $\to$ 0 $\sin 3x \sim 3x$, то $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$.

13. Принимая во внимание, что: $1-\cos 4x=2\sin^2 2x$ и $\sin 2x\sim 2x$ при x $\to$ 0, получаем: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(2x)^2}{x^2}=8.$

14. Так как при $x \to 1$ $2x^2 + x - 3 \to 0$, то $\sin(2x^2 + x - 3) \sim 2x^2 + x - 3$. Поэтому: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(2x^2 + x - 3)}{x^2 - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(x+\frac{3}{2})}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x+\frac{3}{2})}{x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+3}{x+1} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

15. В данном случае имеет место неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$. Следовательно, необходимо использовать второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x} = \left(1^{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}\cdot 5\cdot 3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}\cdot 15} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{15} = e^{15}.$$

16. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$, то мы снова имеем дело с неопределенностью вида $\left(1^{\infty}\right)$. Поэтому, преобразуем функцию так, чтобы можно было использовать второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x} = \left(1^{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[1 + \left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 1\right]^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left[1 + \frac{x+1-(x-1)}{x-1}\right]^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left[1 + \frac{2}{x-1}\right]^{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[1 + \frac{2}{x-1}\right]^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}2x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{4x}{x-1}}.$$

Так как $\frac{2}{x-1} \to 0$ при $x \to \infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}} = e$. Принимая во внимание, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{1-\frac{1}{x}} = 4$, окончательно получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{4x}{x-1}} = \left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{x-1}} = e^4.$$

17. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{1+x^2} = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$, то для нахождения предела необходимо использовать второй замечательный предел. Выполним преобразования, аналогичные преобразованиям предыдущего примера:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^{\frac{3}{x}} = \left(1^{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\left[1+\frac{1+x}{1+x^2}-1\right]^{\frac{3}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x-x^2}{1+x^2}\right]^{\frac{3}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[1+\frac{x-x^2}{1+x^2}\right]^{\frac{1+x^2}{x-x^2}\cdot\frac{x-x^2}{1+x^2}\cdot\frac{3}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x-x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1+x^2}{x-x^2}}\right]^{\frac{3x(1-x)}{x(1+x^2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3(1-x)}{1+x^2}} = e^3.$$

18. При $x \to 0$ $e^x - 1 \sim 2x$ и $\ln(1+2x) \sim 2x$. Поэтому: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\ln(1+2x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.

Пример 10. Найти односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$, $x_0 = 0$;   2) $f(x)=e^{\frac{1}{x-1}}$, $x_0 = 1$;   3) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-4}$, $x_0 = 2$.

РЕШЕНИЯ.

1. Если $x \to +0$, то $\dfrac{1}{x}\to+\infty$ и $2^{\frac{1}{x}}\to\infty$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$.

Если же $x\to-0$, то $\dfrac{1}{x}\to-\infty$ и $2^{\frac{1}{x}}\to 0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1$.

2. Если $x \to 1 + 0$, то $x - 1 \to +0$, $\dfrac{1}{x-1}\to+\infty$ и $\lim\limits_{x\to1+0} e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$.

Если же $x \to 1 - 0$, то $x - 1 \to -0$ и $\dfrac{1}{x-1}\to-\infty$, тогда: $\lim\limits_{x\to1-0} e^{\frac{1}{x-1}}=0$.

3. В данном случае $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)(x+2{,}5)}{(x-2)(x+2)}=$

$$=\lim_{x\to2}\frac{2(x+2{,}5)}{(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{9}{4}=2{,}25.$$

Поэтому: $\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-4}=2{,}25$.

ЗАДАНИЯ

1.12. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+x-3}{2x^2-x+1}$;   2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2+5x-3}$;   3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+1}{4x^3+x^2-2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+4}{x^4+3x-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+5}{3x+4}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-1}{3x^2-x+2}$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+5}}{x+5}$; 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}}{2x+3}$; 9) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}}{2x+3}$;

10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+5}}{x+5}$; 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1}\right)$;

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-5}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)$; 13) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$;

14) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2-5x-2}\right)$; 15) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{5x+3}{3x+5}$;

16) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-x+2}$; 17) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; 18) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x+1}{x^3-8}$;

19) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+2x-5}{5x^2-2x-3}$; 20) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2-x-3}$; 21) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+x-6}{x^2+x-2}$;

22) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+x-10}$; 23) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{4-2x}}{x}$;

24) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{9+x}-\sqrt{9+x^2}}$; 25) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{x}$; 26) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin2x}$;

27) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-1}$; 28) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sin(x^2-4)}{x^3-8}$;

29) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\sin3x}{x}$; 30) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin2x+\sin3x}$;

31) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{x^2}$; 32) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos3x}{x^2}$;

33) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{2x+1}{x+2}\right]^{\frac{x+1}{x+3}}$; 34) $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1+x}{2-x}\right]^{x}$;

35) $\lim\limits_{x\to 0}[1+2x]^{1/3x}$; 36) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{3}{x}\right]^{5x}$; 37) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x+1}{x+5}\right]^{3x-1}$;

38) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1-x}{1+2x}\right]^{\frac{21}{x}}$; 39) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{e^x-1}$; 40) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{\ln(1+5x)}$.

1.13. Найти односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0:

1) $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$, $x_0=0$; 2) $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$, $x_0=0$;

3) $f(x)=e^{\frac{x}{\sin x}}$, $x_0=\pi$.

1.14. Найти пределы функции $f(x)$ в точках: $x = 0$, $x \pm 1$ и при $x \to \infty$.

1) $f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x}$; 2) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+3x+2}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$.

1.5. Непрерывность функции

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если:

1) $f(x)$ определена в некоторой окрестности этой точки;

2) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и 3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Необходимое и достаточное условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0: $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$.

Под ***приращением аргумента***, которое обычно обозначается Δx, подразумевается как положительное, так и отрицательное достаточно малое по абсолютной величине число. ***Приращением функции*** $y = f(x)$ в точке x, соответствующим приращению аргумента Δx, называется число $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$. В этих обозначениях условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 может быть записано так: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторого интервала, называется ***непрерывной на этом интервале***.

Все основные элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Алгебраическая сумма и произведение *конечного* числа непрерывных функций есть непрерывная функция. Частное двух непрерывных функций есть непрерывная функция везде, где знаменатель отличен от нуля. Сложная функция (суперпозиция функций), составленная из непрерывных функций, есть непрерывная функция.

Функции, непрерывные на замкнутом интервале, обладают следующими свойствами. Если $f(x)$ непрерывна на замкнутом интервале $[a, b]$, то:

1) $f(x)$ ограничена на этом интервале, т. е. существует такое число $A > 0$, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место $|f(x)| < A$;

2) $f(x)$ принимает по крайней мере в одной точке $x_1 \in [a, b]$ свое наибольшее и по крайней мере в одной точке $x_2 \in [a, b]$ наименьшее значения: $f(x_1) \geq f(x)$; $f(x_2) \leq f(x)$;

3) $f(x)$ принимает на этом интервале все промежуточные значения между своими наименьшим и наибольшим значениями;

4) если $f(x)$ на концах интервала принимает значения противоположных знаков, то, по крайней мере, в одной точке $x_0 \in [a, b]$ она обращается в нуль: $f(x_0) = 0$.

Точки из области определения функции или являющиеся граничными точками этой области, в которых нарушается условие непрерывности, называются ***точками разрыва функции.*** Точки разрыва принято классифицировать следующим образом:

– x_0 называют точкой ***устранимого разрыва***, если $f(x_0+0)=$ $=f(x_0-0)\neq f(x_0)$;

– x_0 называют точкой ***разрыва первого рода,*** если в этой точке у функции существуют конечные односторонние пределы, но $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$. При этом разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называют ***скачком функции в точке*** x_0;

– x_0 называют точкой ***разрыва второго рода,*** если в этой точке функция не имеет ни одного из односторонних пределов.

Пример 11. Исследовать на непрерывность функции:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}$; 2) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^2+x}{\sin x}$.

РЕШЕНИЯ.

1. Числитель и знаменатель дроби являются функциями, непрерывными на всей числовой оси. Поэтому функция $f(x)$ будет непрерывной везде, кроме точек $x_1=-3$ и $x_2=1$, в которых знаменатель обращается в нуль. Эти точки будут точками разрыва функции. Исследуем эти точки.

Так как $\lim\limits_{x\to-3}f(x)=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}=\left(\dfrac{-4}{0}\right)=\infty$, то в точке $x=-3$ у функции разрыв второго рода. Исследуем точку $x=1$:

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+4)}{(x-1)(x+3)}=\lim_{x\to1}\frac{x+4}{x+3}=\frac{5}{4}.$$

Значит, в точке $x=1$ у функции устранимый разрыв $\left(f(1-0)=f(1+0)=\dfrac{5}{4}\right)$.

2. Как числитель, так и знаменатель дроби являются непрерывными функциями при $x \neq 0$, причем, знаменатель $2^{\frac{1}{x}} + 1 \neq 0$. Поэтому, при $x \neq 0$ функция непрерывна. Точка $x = 0$ является точкой разрыва функции. Если $x \to -0$, то $\frac{1}{x} \to -\infty$ и $2^{\frac{1}{x}} \to 0$. Поэтому:

$$f(-0) = \lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = -1.$$

Если же $x \to +0$, то $\frac{1}{x} \to +\infty$ и $2^{\frac{1}{x}} \to \infty$. Следовательно,

$$f(+0) = \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +0} \frac{1 - \frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}{1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}} = 1.$$

Значит, в точке $x = 0$ у функции разрыв первого рода. Скачок функции $f(+0) - f(-0) = 2$.

3. Числитель и знаменатель дроби – непрерывные функции. Следовательно, функция непрерывна везде, где $\sin x \neq 0$, т. е. везде кроме точек $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. В точке $x = 0$ $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot (x+1)}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \to 0} (x+1) = 1$. Поэтому, $f(+0) = f(-0) = 1$, следовательно, $x = 0$ – точка устранимого разрыва. В точках $x = k\pi$ $(k \neq 0)$ $\lim_{x \to k\pi} \frac{x^2 + x}{\sin x} = \left(\frac{(k\pi)^2 + k\pi}{0}\right) = \infty$. Следовательно, в этих точках у функции разрывы второго рода.

ЗАДАНИЯ

1.15. Исследовать на непрерывность функции:

1) $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x-2)}$; 2) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-3}$; 3) $f(x)=\dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+5x+6}$;

4) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+x+1}$; 5) $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-3x+5}$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Производная и дифференциал

Производной функции $y = f(x)$ по x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Для обозначения производной используются следующие символы: y', $f'(x)$, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$. Таким образом:

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Отыскание производной называется ***дифференцированием функции.*** Если функция имеет производную, то она (функция) называется ***дифференцируемой.***

Основные правила дифференцирования (свойства производной).

Если c – постоянная, а $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то:

1) $c'=0$; 2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$; 3) $(cu)'=cu'$

4) $(uv)'=u'v+uv'$; 5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$;

6) $\left(f\left(u(x)\right)\right)' = f'_u \cdot u'_x$ (правило дифференцирования сложной функции);

7) если функция задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$;

8) если функция y задана неявно, т. е. определяется из уравнения $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной y' дифференцируют по x обе части уравнения, учитывая при этом, что y есть функция от x. Из полученного уравнения находят y'.

Формулы дифференцирования (u – функция от x).

1) $\left(u^a\right)' = au^{a-1} \cdot u'$; в частности: $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

2) $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$; в частности: $\left(e^u\right)' = e^u u'$;

3) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$; в частности: $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$;

4) $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$; 5) $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$; 6) $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

7) $\left(\operatorname{ctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$; 8) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

9) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 10) $\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

11) $\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Производной второго порядка (второй производной) функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной. Вторая производная обозначается одним из следующих символов: y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2f}{dx^2}$. Таким образом, $y''=(y')'$.

Аналогично, ***производная третьего порядка (третья производная)*** есть производная от второй производной и обозначается: y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $\dfrac{d^3f}{dx^3}$. Таким образом, $y'''=(y'')'$.

Производной n-го порядка (n-й производной) называется производная от $(n-1)$-й производной, обозначается $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $\dfrac{d^nf}{dx^n}$. Таким образом, $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$.

Производные высших порядков обычно вычисляются последовательным дифференцированием функции.

Геометрический смысл производной. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то значение $f'(x_0)$ производной в этой точке является угловым коэффициентом (тангенсом угла наклона) касательной к графику функции в точке (x_0, y_0), где $y_0 = f(x_0)$. Уравнение касательной: $y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$.

Механический смысл производной. Если $s=s(t)$ – закон движения материальной точки, которая движется прямолинейно (s – длина пути, отсчитываемая от некоторой начальной точки; t – время, за которое пройден путь s), то $s'(t)$ – величина скорости движения точки в момент времени t, т. е. $s'(t)=v(t)$.

Экономический смысл производной. Если функция $u=u(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t, то $u'(t)$

представляет собой производительность труда в момент времени t, т. е. производная от объема произведенной продукции есть производительность труда в момент времени t.

В экономических исследованиях широко используется понятие ***эластичности***, которое связано с тем, что в экономических задачах часто удобнее вычислять в процентах изменение зависимой переменной (функции), соответствующее изменению независимой переменной (аргумента) на один процент.

Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительного приращения $\frac{\Delta y}{y}$ функции y к относительному приращению $\frac{\Delta x}{x}$ аргумента x при $\Delta x \to 0$. Эластичность функции символически обозначают $E_x(y)$, таким образом, $E_x(y) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{x}{y} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} y'$.

Эластичность – безразмерная величина, значения которой не зависят от того, в каких единицах измерялись величины x и y. Она, в частности, широко используется при анализе спроса и предложения. Так, эластичность спроса y относительно цены x показывает приближенно на сколько процентов изменится спрос при изменении цены на один процент.

Дифференциалом функции в точке x называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента. Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначается dy или df. ***Дифференциалом*** dx ***аргумента*** x называется приращение аргумента: $dx = \Delta x$. Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x определяется равенством: $dy = df = y'dx = f'(x)dx$.

Если приращение Δx аргумента мало (по абсолютной величине), то $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx dy$, откуда $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$. Последние равенства используются для приближенных вычислений и, в частности, для оценки погрешности значений функции. На практике, как правило, величину x измеряют (или вычисляют) с некоторой погрешностью Δx, которая влечет за собой погрешность Δy величины $y = f(x)$. При малых значениях Δx полагают $\Delta y = dy$.

Дифференциал $dy = df(x)$ функции $y = f(x)$ является функцией от x. Дифференциал $d(dy) = d(df(x))$ этой функции называется ***дифференциалом второго порядка*** или ***вторым дифференциалом*** функции $y = f(x)$ и обозначается d^2y или $d^2 f(x)$ (читается дэ два игрек и, соответственно, дэ два эф от x): $d^2y = d^2 f(x) = y''dx^2 = f''(x)dx^2$, где $dx^2 = (dx)^2$.

Пример 1. Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные функций:

1) $y = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$; 2) $y = x^3 \sin x$; 3) $y = x\sqrt{x} \arcsin x$;

4) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$; 5) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$; 6) $y = (3x^2 + 4)^5$;

7) $y = \operatorname{tg}^3 x$; 8) $y = \cos(5x+2)$; 9) $y = \operatorname{ctg}(\ln x)$; 10) $y = \operatorname{tg}^2 3x$;

11) $y = \ln(x^2 + x + 1)$; 12) $y = \ln \sin \dfrac{x}{2}$; 13) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

14) $y = 2^{x^4}$; 15) $y = x^{\sin x}$; 16) $y = (\sin x)^{\cos x}$;

17) $x^2 + \sin y - e^{xy} = 0$; 18) $x = t^3 + t + 1, \quad y = t^3 - t - 1$.

РЕШЕНИЯ.

1. $y' = (3x^4 - 2x^3 + 5x - 7)' = (3x^4)' - (2x^3)' + (5x)' - (7)' = 3(x^4)' -$
$- 2(x^3)' + 5(x)' - 0 = 3 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + 5 \cdot 1 = 12x^3 - 6x^2 + 5$.

2. $y' = (x^3 \sin x)' = (x^3)' \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$.

3. Воспользуемся тем, что $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$. Тогда $y' = (x\sqrt{x} \arcsin x)' =$

$$= (x^{\frac{3}{2}} \arcsin x)' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \arcsin x + x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \arcsin x + \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. $$y' = \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)' = \frac{x(\operatorname{arctg} x)' - x' \operatorname{arctg} x}{x^2} = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x}{x^2} =$$

$$= \frac{x - (1+x^2)\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)}.$$

5. $$y' = \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)' =$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x) - (\sin x - \cos x)(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{2}{1 + \sin 2x}.$$

6. Обозначим $3x^2 + 4 = u$, тогда $y = u^5$. По правилу дифференцирования сложной функции будем иметь: $y' = \left(u^5\right)'_u \cdot (3x^2 + 4)'_x = 5u^4 \cdot 6x = = 30x(3x^2 + 4)^4$.

7. $$y' = \left(\operatorname{tg}^3 x\right)' = 3\operatorname{tg}^2 x \cdot (\operatorname{tg} x)' = 3\operatorname{tg}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}.$$

8. $y' = \left(\cos(5x + 2)\right)' = -\sin(5x + 2) \cdot (5x + 2)' = -5\sin(5x + 2)$.

9. $y' = \left(\mathrm{ctg}(\ln x)\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2(\ln x)} \cdot (\ln x)' = -\dfrac{1}{x\sin^2(\ln x)}$.

10. $y' = \left(\mathrm{tg}^2 3x\right)' = 2\mathrm{tg}3x(\mathrm{tg}3x)' = 2\mathrm{tg}3x\dfrac{1}{\cos^2 3x}(3x)' = \dfrac{6\mathrm{tg}3x}{\cos^2 3x}$.

11. $y' = \left(\ln(x^2 + x + 1)\right)' = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}(x^2 + x + 1)' = \dfrac{2x+1}{x^2 + x + 1}$.

12. $y' = \left(\ln\sin\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2}}\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2}} \cdot \cos\dfrac{x}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{2}\mathrm{ctg}\dfrac{x}{2}$.

13. $y' = \left(\ln(x + \sqrt{x^2+1})\right)' = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)' =$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

14. $y' = \left(2^{x^4}\right)' = 2^{x^4} \cdot \ln 2 \cdot \left(x^4\right)' = 4\ln 2 \cdot x^3 2^{x^4}$.

15. В данном случае и основание, и показатель степени зависят от x. Логарифмируя, получим $\ln y = \sin x \cdot \ln x$. Теперь продифференцируем левую и правую части последнего равенства по x. Так как y является функцией от x, то $\ln y = \sin x \cdot \ln x$ есть сложная функция от x и $\left(\ln y\right)' = \dfrac{1}{y} \cdot y'$. Следовательно, $\dfrac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \dfrac{\sin x}{x}$, откуда:

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

16. Аналогично предыдущему примеру $\ln y = \cos x \cdot \ln\sin x$, откуда $\dfrac{y'}{y} = -\sin x \cdot \ln\sin x + \cos x\dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln\sin x}{\sin x}$. Тогда:

$$y' = y\frac{\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln\sin x}{\sin x} = (\sin x)^{\cos x}\frac{\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln\sin x}{\sin x} =$$
$$= (\sin x)^{\cos x - 1}\left(\cos^2 x - \sin^2 x \cdot \ln\sin x\right).$$

17. Дифференцируя по x обе части уравнения, получаем $2x + y'\cos y - e^{xy}(y + xy') = 0$, откуда $y' = \dfrac{ye^{xy} - 2x}{\cos y - xe^{xy}}$.

18. Так как $x'_t = 3t^2 + 1$, $y'_t = 3t^2 - 1$, то $y'_x = \dfrac{3t^2 - 1}{3t^2 + 1}$.

Пример 2. Найти производные n-го порядка:

1) $y = x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 3x - 7$; 2) $y = e^x$; 3) $y = 2^x$; 4) $y = \sin x$.

РЕШЕНИЯ.

1. $y' = 4x^3 + 15x^2 - 4x + 3$, $y'' = 12x^2 + 30x - 4$, $y''' = 24x + 30$, $y^{IV} = 24$, $y^{V} = y^{VI} = ... = 0$.

2. $y' = e^x$, $y'' = e^x$, ..., $y^{(n)} = e^x$.

3. $y' = 2^x \ln 2$, $y'' = 2^x \ln^2 2$, $y''' = 2^x \ln^3 2, ..., y^{(n)} = 2^x \ln^n 2$.

4. $y' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$, $y''' = -\cos x = = \sin\left(x + 3\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$, …, $y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Пример 3. Найти эластичность функции $y = x^2 - 3x + 2$, при $x = 5$.

РЕШЕНИЕ. $E_x(y) = \dfrac{x}{y}\cdot y' = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}(2x - 3)$.

При $x = 5$, получаем: $E_5(y) = \dfrac{5}{12}\cdot 7 = \dfrac{35}{12} \approx 2{,}92$.

Пример 4. $y=\dfrac{x+70}{2x+5}$ – функция спроса на некоторый товар (y – количество товара покупаемого в единицу времени по цене x ден. ед.). Найти эластичность спроса для цены x = 10.

Р Е Ш Е Н И Е. Так как $y'=\left(\dfrac{x+70}{2x+5}\right)'=-\dfrac{135}{(2x+5)^2}$, то эластичность спроса относительно цены $E_x(y)=\dfrac{x}{y}\cdot y'=x\cdot\dfrac{2x+5}{x+70}\cdot\left(-\dfrac{135}{(2x+5)^2}\right)=$ $=-\dfrac{135x}{(x+70)(2x+5)}$. При цене x = 10, получаем: $E_{10}(y)=-\dfrac{135\cdot 10}{80\cdot 25}=-\dfrac{27}{40}\approx$ $\approx -0{,}68$. Следовательно, при увеличении цены x = 10 на товар на 1%, спрос уменьшится примерно на 0,68%.

Пример 5. Найти дифференциалы функций:

1) $y=x^3+2x-1$; 2) $y=2\sin\sqrt{x}$; 3) $y=\operatorname{arctg} x^2$; 4) $y=e^{-x^2}$.

Р Е Ш Е Н И Я.

1. $dy=\left(x^3+2x-1\right)'dx=\left(3x^2+2\right)dx$;

2. $dy=\left(2\sin\sqrt{x}\right)'dx=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

3. $dy=\dfrac{2x}{1+x^4}dx$;

4. $dy=-2xe^{-x^2}dx$.

ЗАДАНИЯ

2.1. Найти производные функций:

1) $y=x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$; 2) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$; 3) $y=x\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}$;

4) $y=\left(3x^2+2x-1\right)e^x$; 5) $y=3x^3\ln x-x^3+1$;

6) $y = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x$; 7) $y = x\arcsin x + \arccos x$; 8) $y = \dfrac{\sin x}{x}$;

9) $y = x^2 \operatorname{ctg} x$; 10) $y = \dfrac{x^3}{\operatorname{tg} x}$; 11) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$; 12) $y = \sqrt{x}\operatorname{arctg} x$;

13) $y = x - \operatorname{tg} x$; 14) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; 15) $y = x\ln x$; 16) $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$;

17) $y = x^2 2^x$; 18) $y = x^3 e^x$; 19) $y = x - \operatorname{arctg} x$; 20) $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$;

21) $y = \ln\left(2x^3 + 3x^2\right)$; 22) $y = \ln(1+\cos x)$; 23) $y = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}\right)$;

24) $y = \arccos\dfrac{x}{2}$; 25) $y = \sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}$; 26) $y = \operatorname{tg}^2 3x$;

27) $y = \sqrt{2-3x^2}$; 28) $y = \cos^2\dfrac{x}{5}$; 29) $y = \ln(\operatorname{tg}3x)$;

30) $y = \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; 31) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}$; 32) $y = \arccos\dfrac{4-x^2}{4+x^2}$;

33) $y = \sin e^{-2x}$; 34) $y = e^{\operatorname{tg}3x}$; 35) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

36) $y = \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\cos x}$; 37) $y = e^{\sqrt{2x}}$; 38) $y = 2^{\sin^2 x}$;

39) $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$; 40) $y = 2x\cdot\sin x\cos x + \cos^2 x$; 41) $y = \arccos e^{\sqrt{x}}$;

42) $y = \ln\left(\operatorname{tg} x^5\right)$; 43) $y = \ln\ln\ln x$; 44) $y = \ln\cos\sqrt[3]{x}$;

45) $y = \dfrac{x-e^{2x}}{x+e^{2x}}$; 46) $y = \dfrac{\ln x}{x^4} + \dfrac{1}{x^4}$; 47) $y = 5^{\cos^3 x - 3\cos x}$;

48) $y=\log_2 \sin^4 x$; 49) $y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}\right)^3$; 50) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

51) $y=\left(\dfrac{x-\arcsin x}{x-\arccos x}\right)^2$; 52) $y=(1+\sin x)(1+\cos x)$;

53) $y=x(x+1)(x+2)(x+3)$; 54) $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$;

55) $y=x^2e^{x^2}\ln x$; 56) $y=e^{\operatorname{tg}^2 x}$; 57) $y=\lg\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$;

58) $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^5$; 59) $y=\operatorname{arctg} e^{3x}$; 60) $y=\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^6$;

61) $y=e^{\frac{x}{a}}\cos\dfrac{x}{a}$; 62) $y=e^{-x}(\sin x+\cos x)$; 63) $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$;

64) $y=\arccos\sqrt{1-2x}$; 65) $y=x\arcsin\sqrt{x}$; 66) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$;

67) $y=2^{\operatorname{arctg} 2x}$; 68) $y=(\arccos 3x)^2$; 69) $y=\left(\operatorname{tg}\sqrt[3]{\sqrt{x}}\right)^6$;

70) $y=e^{\sin 4x}$; 71) $y=\sqrt{\cos\sqrt{x}}$; 72) $y=\sqrt{\ln\cos x+1}$;

73) $y=\operatorname{arcctg}\sqrt{x^2+x+1}$; 74) $y=2x\operatorname{tg} 2x+\ln\cos 2x$;

75) $y=\ln(x\cdot\cos x+\sin x)$; 76) $y=a^{x\sin x+\cos x}$; 77) $y=\dfrac{\cos^2 3x}{1+\sin^2 3x}$;

78) $y=\dfrac{1}{x\ln 3x}$; 79) $y=x^{\frac{1}{x}}$; 80) $y=x^{-x}$; 81) $y=(\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$;

82) $y=(\operatorname{tg} x)^x$; 83) $y=x^{\ln x}$; 84) $y=x^{\arcsin x}$;

85) $x^2+y^2-3xy=0$; 86) $ye^x+xe^y=0$;

87) $\sin x+\sin y-\sin xy=0$; 88) $x=a\cos\ t,\quad y=a\sin\ t$;

89) $x=e^{-t}\sin t,\quad y=e^{-t}\cos t$; 90) $x=t+\operatorname{tg}\ t,\quad y=t-\operatorname{ctg}\ t$.

2.2. Найти производные второго порядка:

1) $y=x\sin 2x$; 2) $y=x\sqrt{x}$; 3) $y=x\arccos\ x$; 4) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

5) $y=e^{x^2}$; 6) $y=\ln\sin x$.

2.3. Найти производные третьего порядка:

1) $y=\frac{1}{2}\ln^2 x$; 2) $y=e^{\cos x}$; 3) $y=x\operatorname{tg} x$; 4) $y=xe^{2x}$;

5) $y=\ln(1+x)$; 6) $y=x^2\ln x$.

2.4. Найти производные *n*-го порядка:

1) $y=e^{kx}$; 2) $y=x^n$; 3) $y=\cos x$.

2.5. Найти эластичность функции $f(x)$ при $x = x_0$:

1) $f(x)=3x^2+2,\quad x_0=2$; 2) $f(x)=x^3-2x^2+x,\quad x_0=5$;

3) $f(x)=e^{2x+1},\quad x_0=1$; 4) $f(x)=xe^{-x},\quad x_0=2$.

2.6. $f(x)$ – функция спроса на некоторый товар, продаваемый по цене x ден. ед., т. е. количество товара продаваемого в единицу времени по цене x. Найти эластичность спроса на товар при цене $x = x_0$:

1) $f(x)=2x+3,\quad x_0=10$; 2) $f(x)=2x\sqrt{x}-x,\quad x_0=25$.

2.7. Найти дифференциалы функций:

1) $y=\cos^2 x$; 2) $y=\operatorname{tg} 3x$; 3) $y=\cos e^x$; 4) $y=\arcsin e^x$;

5) $y=2\cos\sqrt{x}$; 6) $y=\arccos\sqrt{x}$; 7) $y=e^{\sin 2x}$; 8) $y=e^{\sin^2 x}$.

2.2. Правило Лопиталя

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой точки x_0) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы, $\varphi'(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) =$ $= \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty$, т. е. $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точке x_0 представляет собой неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} =$ $= \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, если предел в правой части этого равенства существует.

Если $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке x_0 также представляет собой неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ и $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют соответствующим условиям, то следует перейти к отношению вторых производных и т. д.

В случае неопределенности вида $(0\cdot\infty)$ или $(\infty-\infty)$ ее нужно алгебраически преобразовать в неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ и далее воспользоваться правилом Лопиталя.

В случае неопределенности вида (0^0), (∞^0) или (1^∞), следует прологарифмировать данную функцию и найти предел ее логарифма. Затем воспользоваться тождеством $y = e^{\ln y}$.

Пример 6. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-x-10}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x}{e^x-e}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$;

5) $\lim\limits_{x\to +0} x^2\ln x$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\sin x}$;

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$; 9) $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\ln x}$.

РЕШЕНИЯ.

1. При $x = 2$ числитель и знаменатель обращаются в нуль, т. е. имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Воспользуемся правилом Лопиталя, т. е. рассмотрим предел отношения производных числителя и знаменателя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{3x^2-x-10}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-3x+2\right)'}{\left(3x^2-x-10\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-3}{6x-1}=\frac{1}{11}.$$

2. $$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x}{e^x-e}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x)'}{\left(e^x-e\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1}{e^x}=\frac{1}{e}.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

4. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{e^x}=0.$$

5. Здесь имеет место неопределенность вида $(0\cdot\infty)$. Представим произведение в виде частного, а затем, получив неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+0}x^2\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}x^2=0.$$

6. В данном случае имеет место неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Приведем дроби к общему знаменателю, а затем, получив неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\cdot\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

7. Это неопределенность вида $\left(0^0\right)$. Обозначим $x^{\sin x}=y$ и прологарифмируем: $\ln y=\sin x\cdot\ln x=\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}$;

$$\lim_{x\to+0}\ln y=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\operatorname{tg}\,x=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to+0}\operatorname{tg}\,x=1\cdot 0=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+0}y=\lim\limits_{x\to+0}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\ln y}=e^0=1.$

8. Это неопределенность вида $\left(\infty^0\right)$. Положим $(\operatorname{tg} x)^{\cos x}=y$ и прологарифмируем: $\ln y=\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}\,x=\dfrac{\ln\operatorname{tg}\,x}{\dfrac{1}{\cos x}}$.

Применяя правило Лопиталя, получим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\dfrac{1}{\cos x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} x\cdot\cos^2 x}}{\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cos x}{\sin^2 x}=0,$$

откуда: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}y=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\ln y}=e^0=1.$

9. Это неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$. Прологарифмируем и применим правило Лопиталя: $(1+x)^{\ln x}=y \;\Rightarrow\; \ln y=\ln x\cdot\ln(1+x)$;

$$\lim_{x\to+0}\ln y=\lim_{x\to+0}\ln x\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\ln x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{-1}{x\ln^2x}}=-\lim_{x\to+0}\frac{x\ln^2x}{1+x}=$$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2x}{1+\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-\lim_{x\to+0}\frac{\frac{2}{x}\ln x}{\frac{-1}{x^2}}=2\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=-2\lim_{x\to+0}x=0,$$

откуда: $\lim\limits_{x\to+0}(\ln(1+x))^{\ln x}=\lim\limits_{x\to+0}y=\lim\limits_{x\to+0}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\ln y}=e^0=1.$

ЗАДАНИЯ

2.8. Используя правило Лопиталя, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+3x^2-4}{2x^3+3x-5}$;
2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$;
3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{1-e^{\frac{1}{x}}}$;
5) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x-1}{\ln x}$;
6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x-\sin x}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to+0}x\ln x$;
8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;
9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}$;
11) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$;
12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$;

13) $\lim\limits_{x\to+0}x^x$;
14) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{1-x^2}$;
15) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x\right)$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$; 17) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; 18) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$.

2.3. Возрастание и убывание функции. Экстремум

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей (убывающей)*** в точке x_0, если при любом достаточно малом $\Delta x > 0$ выполняется условие $f(x_0-\Delta x) < f(x_0) < f(x_0+\Delta x)$ $\left(f(x_0-\Delta x) > f(x_0) > f(x_0+\Delta x)\right)$.

Функция называется ***возрастающей (убывающей) на интервале,*** если она возрастает (убывает) в каждой точке этого интервала. Если функция возрастает (убывает) на интервале (a, b), то для любых двух точек x_1
и x_2 из этого интервала, удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

Если $f'(x_0) > 0$ $\left(f'(x_0) < 0\right)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0; если $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$ для всех x из интервала (a, b), то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом интервале.

Значение $f(x_0)$ называется ***максимумом*** или ***локальным максимумом*** (***минимумом*** или ***локальным минимумом***) функции $f(x)$, если при любом достаточно малом Δx выполняется условие $f(x_0) > f(x_0 \pm \Delta x)$ $\left(f(x_0) < f(x_0 \pm \Delta x)\right)$, т. е., если в пределах некоторой окрестности точки x_0 значение $f(x_0)$ является наибольшим (наименьшим). При этом сама точка x_0 называется ***точкой максимума*** (***минимума***) функции $f(x)$. Максимумы и минимумы функции называются ***экстремумами*** или ***экстремальными значениями*** функции, а точки максимума и минимума – ***точками экстремума*** или ***экстремальными точками*** функции.

Необходимое условие экстремума: если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то ее производная $f'(x)$ в этой точке либо обращается в нуль, либо не существует.

Точки из области определения функции $f(x)$, в которых $f'(x)$ обращается в нуль или не существует, называются ***критическими точками*** или ***точками подозрительными на экстремум***. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Достаточные условия экстремума.

1. Если x_0 – критическая точка функции $f(x)$ и при произвольном достаточно малом $\Delta x > 0$ выполняются неравенства $f'(x_0 - \Delta x) > 0$, а $f'(x_0 + \Delta x) < 0$ ($f'(x_0 - \Delta x) < 0$, а $f'(x_0 + \Delta x) > 0$), то x_0 – точка максимума (минимума); если же знаки $f'(x_0 - \Delta x)$ и $f'(x_0 + \Delta x)$ одинаковы, то в точке x_0 у функции $f(x)$ экстремума нет.

Другими словами: если при переходе (слева направо) через критическую точку x_0 производная меняет знак с «+» на «–» (с «–» на «+»), то x_0 – точка максимума (минимума), если же производная знак не меняет, тогда
в точке x_0 экстремума нет.

2. Если $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то у функции $f(x)$ в точке x_0 экстремум есть; причем, максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Функция $f(x)$ в точке $x_0 \in [a,\ b]$ достигает ***наибольшего (наименьшего) значения на интервале*** $[a,\ b]$, если для всех точек этого интервала выполняется условие $f(x_0) \geq f(x)$ $\left(f(x_0) \leq f(x)\right)$. Наибольшее (наименьшее) значение функции обозначают так: $\max\limits_{x \in [a,\ b]} f(x)$ ($\min\limits_{x \in [a,\ b]} f(x)$).

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке $[a, b]$ нужно найти все критические точки функции, принадлежащие этому интервалу, вычислить значения функции в этих точках и на концах интервала, после чего из найденных значений выбрать наибольшее (наименьшее).

Пример 7. Найти интервалы возрастания и убывания функций:

1) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 5$; 2) $y = \operatorname{arctg} x$.

РЕШЕНИЯ.

1. Так как $y' = x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$, то $y' > 0$ на интервалах $(-\infty, 1)$ и $(2, \infty)$, и $y' < 0$ на интервале $(1, 2)$, следовательно, на интервалах $(-\infty, 1)$ и $(2, \infty)$ данная функция возрастает, а на интервале $(1, 2)$ – убывает.

2. В данном случае $y' = \frac{1}{1+x^2} > 0$ для всех x. Следовательно, функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастает на всей числовой оси.

Пример 8. Исследовать на экстремум функции:

1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = x^3 - 12x + 8$; 3) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

РЕШЕНИЯ.

1. Функция определена на всей числовой оси. Ее производная $y' = -2xe^{-x^2}$ тоже определена для всех x и обращается в нуль в единственной точке $x = 0$. Очевидно, что для $x < 0$ производная $y' > 0$, а для $x > 0$ производная $y' < 0$. Следовательно, согласно первому достаточному условию экстремума, в точке $x = 0$ функция имеет максимум $y_{\max} = 1$.

2. Функция определена на всей числовой оси. Находим производную $y' = 3x^2 - 12$ и, приравняв ее нулю, определим точки, подозрительные на экстремум: $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Найдем вторую производную: $y'' = 6x$. Так как $y''(-2) = -12 < 0$, $y''(2) = 12 > 0$, то, согласно второму достаточному условию экстремума, заключаем, что в точке $x_1 = -2$ функция имеет максимум $y_{\max} = 24$, а в точке $x_2 = 2$ – минимум $y_{\min} = -8$.

3. В данном случае функция тоже определена на всей числовой оси. Ее производная $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ в нуль не обращается ни при каких значениях x, но не существует при $x = 1$ (критическая точка). При $x < 1$ производная $y' < 0$, а при $x > 1$ $y' > 0$. Следовательно, согласно первому достаточному условию экстремума, в точке $x = 1$ функция имеет минимум $y_{\min} = 0$.

Пример 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2$ на интервале $[-3, 3]$.

РЕШЕНИЕ.

Найдем критические точки: $y' = x^2 + 2x$, $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 0$.

Вычислим значения функции в этих точках: $y(-2) = \dfrac{4}{3}$, $y(0) = 0$.

Вычислим значения функции на концах интервала: $y(-3) = 0$, $y(3) = 18$. Из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее. Итак, наибольшее значение функции на интервале $[-3, 3]$ равно 18 (достигается на правом конце интервала), а наименьшее значение равно нулю (достигается на левом конце интервала и внутри интервала в точке $x = 0$).

Пример 10. При производстве x единиц продукции фирма получает прибыль $y_n = 1200x + 45x^2 - x^3 - 300$ ден. ед. от их реализации. Сколько единиц продукции необходимо производить фирме, чтобы получать максимум прибыли?

РЕШЕНИЕ.

Найдем точки возможного экстремума функции прибыли: $y_n' = 1200 + 90x - 3x^2 \;\Rightarrow\; 1200 + 90x - 3x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 30x - 400 = 0 \;\Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 = -10$, $x_2 = 40$. Точка $x_1 = -10$ по смыслу задачи нам не подходит. Исследуем точку $x_2 = 40$. Так как $y_n'' = 90 - 6x$ и $y_n''(40) = 90 - 240 < 0$, то в точке $x_2 = 40$ функция $y_{\text{п}}$ достигает максимума. Значит, фирма будет продукции. Вычислим максимальную прибыль фирмы:

$$y_n(40) = 1200 \cdot 40 + 45 \cdot 1600 - 64000 - 300 = 55700 \text{ ден. ед.}$$

Пример 11. Фирма может производить не более 60 единиц продукции, которые продает по цене 3000 ден. ед. При производстве x единиц продукции затраты фирмы составляют $y_з = x^3 - 90x^2 + 4500x + 200$ ден. ед. Определить объем выпуска продукции при котором фирма будет получать максимум прибыли.

РЕШЕНИЕ.

При производстве x единиц продукции доход фирмы будет составлять $y_д = 3000x$ ден. ед., затраты на их производство $y_з = x^3 - 90x^2 + 4500x +$ $+ 200$ ден. ед., а прибыль $y_n = y_д = y_з = 3000x - (x^3 - 90x^2 + 4500x + 200) =$ $= -1500x + 90x^2 - x^3 - 200$ ден. ед. Для решения задачи необходимо найти наибольшее значение функции прибыли y_n при условии, что объем производимой продукции не может быть более 60 ед., т. е.: $0 \le x \le 60$.

Найдем точки возможного экстремума функции y_n: $y'_n = -1500x + 180x - 3x^2$; $y'_n = 0 \Rightarrow -1500x + 180x - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 60x + 500 = 0 \Rightarrow$ $x_1 = 10$, $x_2 = 50$. Вычисляем значения функции $y_{\text{п}}$ в точках: $x = 0$, $x = 10$, $x = 50$ и $x = 60$. Получаем: $y_{\text{п}}(0) = -200$, $y_{\text{п}}(10) = -1500 \cdot 10 + 90 \cdot 100 - 1000 - 200 = -7200$,

$$y_{\text{п}}(50) = -1500 \cdot 50 + 90 \cdot 2500 - 125000 - 200 = 24800,$$

$$y_{\text{п}}(60) = -1500 \cdot 60 + 90 \cdot 3600 - 216000 - 200 = 17800.$$

Следовательно, фирма будет получать максимум прибыли (24800 ден. ед.), если будет производить 50 единиц продукции.

ЗАДАНИЯ

2.9. Найти интервалы возрастания и убывания функций:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 24$; 2) $y = xe^x$; 3) $y = x\ln x$;

4) $y = x^2e^{-x}$; 5) $y = x2^{-x^2}$; 6) $\dfrac{1}{1+x^2}$.

2.10. Исследовать на экстремум функции:

1) $y = \dfrac{x^3}{3} - 4x$; 2) $y = \dfrac{x^4}{4} - x^3$; 3) $y = \dfrac{x}{5} + \dfrac{5}{x}$; 4) $y = x^2(1-x)$;

5) $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$; 6) $y = xe^{-x}$; 7) $y = \ln\left(x^2+1\right)$; 8) $y = x - \sin^2 x$;

9) $y = x + \sqrt{3-x}$; 10) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$; 11) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$; 12) $y = x\sqrt{1-x}$.

2.11. Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

1) $y = x^4 - 2x^2 + 1$ на интервале $[-3, 2]$;

2) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$ на интервале $[-2, 3]$;

3) $y = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 100$ на интервале $[-4, 5]$.

2.12. Земельный участок прямоугольной формы площадью 625 м^2 требуется обнести забором. Каковы должны быть размеры участка, чтобы затраты на сооружение забора были наименьшими?

2.13. Определить размеры закрытой коробки объемом 1000 см^3 с квадратным основанием, на изготовление которой расходуется наименьшее количество материала.

2.14. Лист картона имеет форму прямоугольника со сторонами 50 см и 80 см. Вырезая по углам этого прямоугольника квадраты и сгибая выступающие части, получим открытую сверху коробку, высота которой равна стороне квадрата. Какой должна быть сторона квадрата, чтобы объем коробки был наибольшим?

2.15. Затраты фирмы при производстве x ед. продукции составляют $100 + 570x - 16x^2 + 0{,}1x^3$ ден. ед. Свою продукцию фирма продает по цене $300 - x$ ден. ед. Сколько единиц продукции нужно производить фирме, чтобы получать максимум прибыли? Какую прибыль при этом она будет получать? По какой цене будет продавать продукцию?

2.16. При производстве x ед. продукции фирма получает прибыль $2\sqrt{x} - \frac{0{,}02}{3}x\sqrt{x} - 2$ тыс. ден. ед. Производственные мощности фирмы позволяют производить до 144 ед. продукции в сутки. Сколько единиц продукции должна производить фирма в сутки, чтобы получать максимум прибыли? Какую прибыль будет получать фирма? Сколько единиц продукции должна производить фирма в сутки, чтобы получать максимум прибыли, если ее производственные мощности позволяют производить не более 81 ед. продукции?

2.4. Выпуклость функции. Точки перегиба кривой

Кривая $y = f(x)$ (график функции $y = f(x)$) называется ***выпуклой вверх (вниз)*** в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки кривая расположена ниже (выше) касательной к этой кривой в точке x_0. Если $y''(x_0) < 0$, $\left(y''(x_0) > 0\right)$ то кривая в этой точке выпукла вверх (вниз). Если кривая выпукла вверх (вниз) в каждой точке интервала (a, b), то говорят, что она ***выпукла вверх (вниз) на этом интервале.***

Точка $M(x_0, f(x_0))$ называется ***точкой перегиба кривой (графика функции)***, если при переходе через эту точку кривая меняет характер выпуклости. Если $M(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба, то $y''(x_0) = 0$ или не существует (необходимое условие перегиба).

Точки из области определения функции, в которых $y'' = 0$ или не существует, называются точками подозрительными на перегиб. Если при переходе через точку $M(x_0, f(x_0))$, подозрительную на перегиб, y'' меняет знак, то $M(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба (достаточное условие перегиба).

Пример 12. Определить интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции $y = e^{-x^2}$.

РЕШЕНИЕ.

Область определения функции – вся числовая ось. Находим вторую производную: $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = -2e^{-x^2}(1-2x^2)$. Из условия $y'' = 0$ следует, что $1 - 2x^2 = 0$, т. е. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Так как $y'' > 0$ для $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$, то на этих интервалах график выпуклый вниз. На интервале $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ вторая производная $y'' < 0$, следовательно, на этом интервале график функции выпуклый вверх. При переходе через точки $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ вторая производная меняет знак – значит точки $A(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}})$, $B(\frac{1}{\sqrt{2}},\ e^{-\frac{1}{2}})$ являются точками перегиба.

ЗАДАНИЯ

2.17. Определить интервалы выпуклости кривых:

1) $y = x^2$; 2) $y = x^3$; 3) $y = e^x$; 4) $y = \ln x$;

5) $y=\dfrac{x^2}{x+1}$; 6) $y=\dfrac{x^3}{x+1}$.

2.18. Найти точки экстремума и точки перегиба:

1) $y=\dfrac{x^3}{6}-x^2-6x+1$; 2) $y=x^4-18x^2+1$; 3) $y=e^{-x^2}$;

4) $y=xe^x$; 5) $y=x\ln x$; 6) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

2.5. Асимптоты

Асимптотой кривой $y=f(x)$ называется прямая, к которой неограниченно приближается точка, движущаяся по кривой при неограниченном удалении ее от начала координат. Асимптоты бывают ***вертикальные*** (уравнение такой асимптоты $x=a$) и ***наклонные*** (уравнение наклонной асимптоты $y=kx+b$).

Для того чтобы прямая $x=a$ была вертикальной асимптотой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$; т. е. точка $x=a$ должна быть точкой разрыва второго рода функции $y=f(x)$.

Прямая $y=kx+b$ будет наклонной асимптотой при $x\to+\infty$ ($x\to-\infty$), если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$). Если область определения функции $y=f(x)$ конечный интервал, то наклонных асимптот нет.

Пример 13. Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

РЕШЕНИЕ.

Функция определена на всей числовой оси, за исключением точек $x=\pm1$. Прямые $x=\pm1$ являются вертикальными асимптотами, так как $\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty$. Ищем наклонные асимптоты: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x^2-1)}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

Следовательно, прямая $y=x$ является наклонной асимптотой как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$. Таким образом, асимптотами будут прямые: $x=\pm1$ и $y=x$.

Пример 14. Найти асимптоты кривой $y=xe^{-x}$.

РЕШЕНИЕ.

Областью определения функции является вся числовая ось. Так как у функции нет точек разрыва, то вертикальных асимптот нет. Ищем наклонные асимптоты:

1. $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0$;

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[xe^{-x}-0\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$ Значит, при $x\to+\infty$ наклонная асимптота есть и ее уравнение $y=0$ (ось $0x$).

2. $k=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{xe^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\infty$. Следовательно, при $x\to-\infty$ наклонной асимптоты нет.

ЗАДАНИЯ

2.19. Найти асимптоты кривых:

1) $y=x^2+x+1$; 2) $y=x^3+2x-3$; 3) $y=\frac{x^2-2}{x}$; 4) $y=\frac{x^2}{x-2}$;

5) $y=\frac{x^3}{x^2+1}$; 6) $y=\frac{x^2+1}{x^2+2}$; 7) $y=\frac{x^2-1}{x^2-4}$; 8) $y=\frac{x^3+2x+1}{x^2-9}$;

9) $y=(x+1)e^x$; 10) $y=xe^{-x^2}$.

2.6. Построение графиков функций

Для построения графика функции вначале необходимо исследовать эту функцию. Исследование удобно проводить в следующем порядке:

1. Найти область определения функции.
2. Проверить, обладает ли график функции симметрией:

а) если функция четная ($f(-x) = f(x)$), то график симметричен относительно оси $0y$;

б) если функция нечетная ($f(-x) = -f(x)$), то график симметричен относительно начала координат;

в) если функция периодическая ($f(x + T) = f(x)$), то достаточно построить ее график на одном периоде.

3. Проверить наличие асимптот (вертикальных и наклонных).

4. Найти (если они существуют) точки пересечения графика функции с осями координат. Для этого нужно решить уравнение $f(x) = 0$ (найдем точки пересечения графика с осью $0x$) и вычислить $f(0)$ (найдем точку пересечения графика с осью $0y$).

5. Найти первую и вторую производные и определить точки, подозрительные на экстремум, и точки, подозрительные на перегиб (точки из области определения функции, в которых эти производные обращаются в нуль или не существуют).

6. Разбить область определения функции на интервалы, концами которых являются точки разрыва функций $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ и точки, в которых они обращаются в нуль. На каждом из таких интервалов эти функции сохраняют знак.

7. Для области определения функции (с учетом разбиения ее на интервалы) построить следующую таблицу (см. табл. 1).

Таблица 1

x	$(-\infty,\ x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	…..	x_{n-1}	(x_{n-1}, x_n)	x_n	$(x_n, +\infty)$
$f(x)$									
$f'(x)$									
$f''(x)$									

В столбцах x_i этой таблицы записывают значения функции $f(x_i)$, а так же те значения $f'(x_i)$ и $f''(x_i)$, которые равны нулю. В столбцах $(x_i,\ x_{i+1})$ отмечают знаки $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$. По заполненной таблице легко увидеть точки экстремума и точки перегиба.

8. Построить систему координат, асимптоты и «замечательные» точки (точки пересечения графика функции с осями координат, точки экстремума и точки перегиба).

9. Построить эскиз графика.

Пример 15. Построить график функции $y = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$.

Р Е Ш Е Н И Е.

1. Функция определена на всей числовой оси, за исключением точки $x = 2$.

2. График симметрией не обладает, так как $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-3}{(-x)-2}=$

$$=\frac{x^2-3}{-x-2}\neq\begin{cases}f(x)\\-f(x)\end{cases}.$$

3. Прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой, так как $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3}{x-2}=\left(\dfrac{1}{0}\right)=\infty$.

Проверяем наличие наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3}{x(x-2)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3}{x^2-2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2-3}{x-2}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-3-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{1}=2.$$

Наклонная асимптота есть. Ее уравнение $y = x + 2$.

4. Ищем точки пересечения графика

с осью $0x$: $\dfrac{x^2-3}{x-2}=0\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$;

с осью $0y$: $f(0)=\dfrac{3}{2}=1{,}5$. График функции пересекает ось $0x$ в точках $(-\sqrt{3};\ 0)$ и $(\sqrt{3};\ 0)$, а ось $0y$ – в точке $(0;\ 1{,}5)$.

5. Находим y' и y'': $y'=\dfrac{2x(x-2)-(x^2-3)}{(x-2)^2}=\dfrac{2x^2-4x-x^2+3}{(x-2)^2}=$

$$=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2};$$

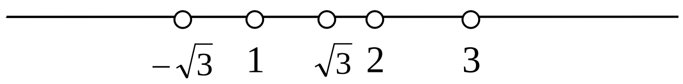
$$y''=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x+3)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{(2x-4)(x-2)-2(x^2-4x+3)}{(x-2)^3}=$$

$$= \frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x - 6}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^3}.$$

Находим точки, подозрительные на экстремум: $y' = 0 \Rightarrow$ $\frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3.$

Точек перегиба нет, так как $y'' = \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0$, а точка $x = 2$ не принадлежит области определения функции.

6. Разобьем область определения функции на интервалы (концами интервалов являются «замечательные» точки).



7. Построим таблицу 2 (см. табл. 1).

Таблица 2

x	$(-\infty,\ -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},\ 1)$	1	$(1,\ \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\ 2)$	2	(2, 3)	3	$(3, \infty)$
$f(x)$	–	0	+	2	+	0	–	не сущ.	+	6	+
$f'(x)$	+		+	0	–		–	не сущ.	–	0	+
$f''(x)$			–		–		–	не сущ.	+		+

Из таблицы видно, что $x = 1$ – точка максимума (при переходе через эту точку $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–»), x = 3 – точка минимума ($f'(x)$ меняет знак с «–» на «+»).

8. Строим систему координат, асимптоты ($x = 2$ и $y = x + 2$), замечательные точки (($-\sqrt{3}$, 0), (0, $\sqrt{3}$), (1, 2), (3, 6)) и рисуем эскиз графика
(см. рис. 1).

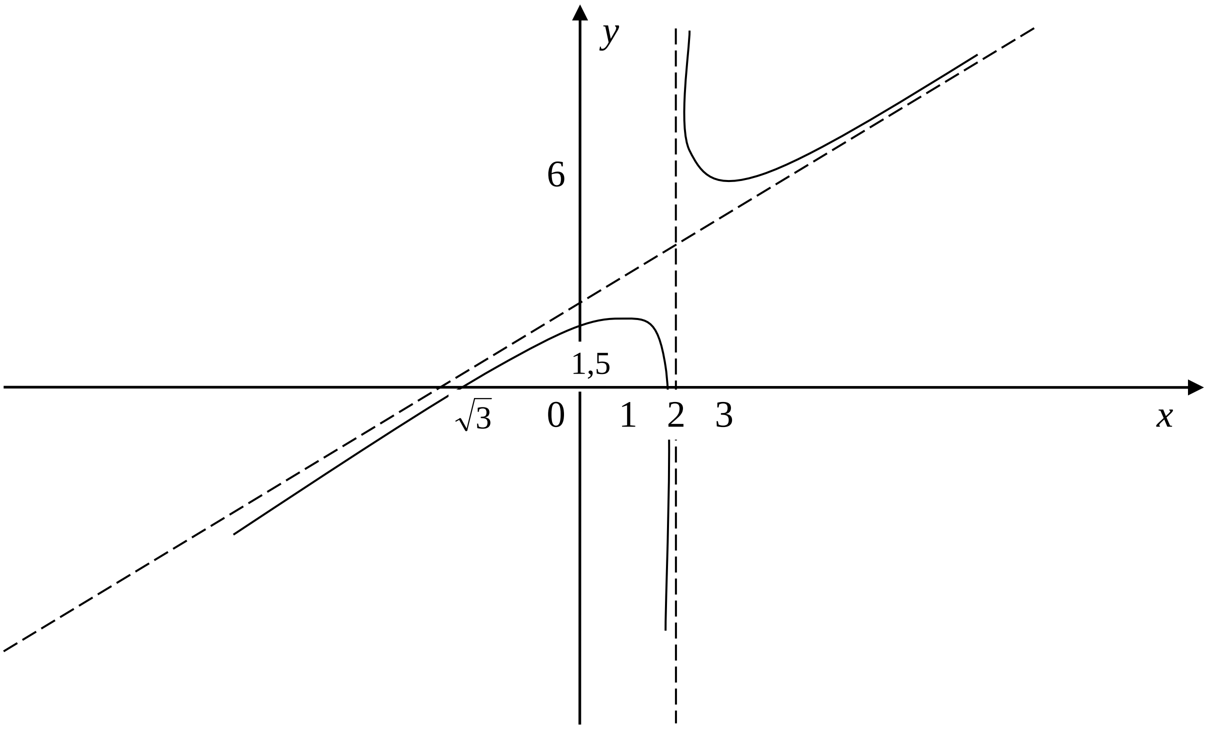


Рис. 1.

ЗАДАНИЯ

2.20. Исследовать функции и построить их графики:

1) $y = x^3 - 6x^2$; 2) $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{x^3}$; 3) $y = \dfrac{x^2}{x+1}$; 4) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$;

5) $y = \dfrac{x^3}{x-1}$; 6) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$; 7) $y = xe^{-x}$; 8) $y = (x+1)e^x$;

9) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; 10) $y = x\ln x$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. Функции нескольких переменных

Если каждой паре (x, y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой области их изменения $D \in R^2$ по определенному правилу ставится в соответствие одно и только одно значение переменной величины z, то говорят, что в области D задана

функция** z **двух независимых переменных x и y. Эту функцию символически обозначают следующим образом: $z = f(x, y)$, $z = z(x, y)$ и т. п. Переменные x и y называются ***аргументами,*** а область D – ***областью определения функции*** z.

Так как каждой упорядоченной паре чисел (x, y) соответствует единственная точка M плоскости $x0y$ и, наоборот, каждой точке M плоскости $x0y$ соответствует единственная пара упорядоченных чисел, то функцию двух переменных можно рассматривать как функцию точки $M(x, y)$ и вместо $z = f(x, y)$ писать $z = f(M)$.

Область D определения функции $z = f(x, y)$ $(z = f(M))$ в простейших случаях представляет собой часть плоскости $x0y$, ограниченную некоторой кривой (при этом точки этой кривой могут принадлежать или не принадлежать области определения) или всю плоскость $x0y$. Линию, ограничивающую область D, называют ***границей области определения,*** а точки этой линии – ***граничными точками.*** Точки области D, не являющиеся граничными, называют ***внутренними точками области*** D. Область, состоящую из одних внутренних точек, называют ***открытой***; если все точки границы принадлежат области, то область называется ***замкнутой***.

Пример 1. Найти области определения функций:

$$1)\ z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}\,; \qquad 2)\ z = \ln\left(25 - x^2 - y^2\right); \qquad 3)\ z = e^{25 - x^2 - y^2}.$$

РЕШЕНИЯ.

1. Так как для нахождения значений функции необходимо извлекать квадратичный корень (а это возможно только в том случае, когда подкоренное выражение не отрицательно), то областью определения функции будет множество точек $M(x, y)$ плоскости $x0y$, координаты которых удовлетворяют условию: $25 - x^2 - y^2 \geq 0$, или, что то же самое, $x^2 + y^2 \leq 25$. Следовательно, областью определения функции будет круг с центром в начале координат и радиусом, равным 5. Область будет замкнутой, так как ее граница (окружность $x^2 + y^2 = 25$) принадлежит области определения.

2. Принимая во внимание, что логарифм определен только для положительных величин, то области определения будут принадлежать только те точки $M(x, y)$ плоскости $x0y$, координаты которых удовлетворяют условию: $25 - x^2 - y^2 > 0$, т. е. $x^2 + y^2 < 25$. Следовательно, областью определения функции будут точки, находящиеся внутри окружности

$x^2 + y^2 = 25$. Область определения является открытой областью, так как ее граница (окружность $x^2 + y^2 = 25$) не принадлежит области определения.

3. Областью определения этой функции будет вся координатная плоскость $x0y$, так как показательная функция определена для любых вещественных значений аргумента.

Графиком функции $z = f(x, y)$ в прямоугольной системе координат $0xyz$ является некоторая поверхность (геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$).

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек $M(x, y)$ плоскости $x0y$, в которых функция принимает одно и то же значение C, т. е. тех точек $M(x, y)$, для которых $f(x, y) = C$. При различных значениях C получаются различные линии уровня.

Пример 2. Найти линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Р Е Ш Е Н И Е. Линии уровня данной функции определяются условием $x^2 + y^2 = C$ (C > 0). Придавая C различные значения, получим концентрические окружности радиуса $\sqrt{C}$ с центром в начале координат (графиком функции является круговой конус, ось которого совпадает с осью $0z$).

Понятие функции двух переменных легко обобщается на случай функции любого конечного числа переменных.

Если каждой упорядоченной совокупности значений независимых переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из некоторой области их изменения $D \subset R^n$ по определенному правилу ставится в соответствие одно и только одно значение переменной величины u, то говорят, что в области D задана ***функция*** n ***переменных*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и используют символическую запись $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или $u = f(M)$.

Областью определения функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ является некоторое множество точек пространства $0xyz$. Область определения функции четырех и большего числа переменных не допускает простого геометрического истолкования.

Пример 3. Найти область определения функции $u = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

Р Е Ш Е Н И Е. Функция определена во всем пространстве R^3, за исключением точек $M(x, y, z)$, координаты которых удовлетворяют условию: $1 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$, т. е. областью определения функции будет все трехмерное пространство, за исключением точек, лежащих на единичной сфере с центром в начале координат.

В экономике часто используются так называемые ***многофакторные производственные функции*** $u = f(X) = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, выражающие зависимость объема или стоимости u выпускаемой продукции от объема $X = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ потребляемых ресурсов.

Наиболее используемой является двухфакторная производственная функция Кобба–Дугласа: $z = Ax^{\alpha}y^{\beta}$, где A, α и β некоторые неотрицательные числа (чаще всего $\alpha + \beta \le 1$), x – объем фондов, y – объем трудовых ресурсов.

ЗАДАНИЯ

3.1. Найти области определения функций:

1) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$; 2) $z = \left(1 - x^2 - y^2\right)^{-1}$; 3) $z = \ln(x + y)$;

4) $z = x + \sqrt{y}$; 5) $z = \dfrac{x + y}{x - y}$; 6) $y = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$;

7) $u = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$; 8) $u = \ln\left(x^2 - y^2 - z^2 - 4\right)$; 9) $u = \dfrac{xy}{z}$;

10) $u = \dfrac{y^2 + z^2}{x^2 - 1}$.

3.2. Найти линии уровня функций:

1) $z = 2x + 3y$; 2) $z = x - y^2$; 3) $z = x^2 - y$; 4) $z = \dfrac{x}{y}$; 5) $z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

3.2. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных

Полным приращением Δz ***функции*** $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется разность $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta z$, где Δx и Δy произвольные приращения аргументов. Если приращения даются лишь одному аргументу x или y, то такие приращения
$\Delta_x z = f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y)$
и $\Delta_y z = f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)$ называются ***частными приращениями*** функции $z = f(x, y)$ по x и по y соответственно.

Функция $z = f(x, y)$ называется ***непрерывной в точке*** $M(x, y)$, если ее полное приращение Δz стремится к нулю, когда приращения аргументов Δx и Δy стремятся к нулю, т. е., если $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \left[f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \right] = 0$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется ***непрерывной в этой области.***

Для функций большего числа переменных понятия полного приращения, частных приращений, непрерывности функции определяются аналогично. Так, полным приращением функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ будет $\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x, y, z)$.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по независимой переменной x называется предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ вычисленный при фиксированном (постоянном) y. Частную производную по x обозначают одним из следующих символов: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; $\dfrac{\partial f}{\partial x}$; z'_x; $f'_x(x, y)$.

Частная производная по y обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial y}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}$; z'_y; $f'_y(x, y)$ и определяется аналогично: $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$.

Аналогично вводятся понятия и обозначения частных производных функций большего числа переменных. Так, в случае функции трех переменных $u = f(x, y, z)$: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta_x u}{\Delta x}$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y\to 0} \dfrac{\Delta_y u}{\Delta y}$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{\Delta_z u}{\Delta z}$.

Из определения частных производных следует, что частная производная функции по любой переменной есть обыкновенная производная функции по этой переменной, вычисленная в предположении, что остальные переменные фиксированные (т. е. постоянные). Поэтому, частные производные вычисляются по формулам и правилам вычисления производных функций одной переменной.

Пример 4. Найти частные производные функций:

1) $z = x^2 + 3xy + 2y^2 - 5x + 6y - 7$;   2) $u = e^{x+y^2-z^3}$;

3) $u = x\sin y + y^2\cos z - z^3 \operatorname{tg} v + 3x^2 y z\sqrt{v}$.

РЕШЕНИЯ.

1. Считая y постоянной, получаем: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y - 5$; считая x постоянной, получаем: $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 4y + 6$.

2. Считая y и z постоянными, находим: $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x+y^2-z^3} \cdot 1 = e^{x+y^2-z^3}$; считая x и z постоянными, находим: $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x+y^2-z^3} \cdot 2y = 2ye^{x+y^2-z^3}$; считая x и y постоянными, находим: $\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x+y^2-z^3} \cdot \left(-3z^2\right) = -3z^2 \cdot e^{x+y^2-z^3}$.

3. $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin y + 6xyz\sqrt{v}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x\cos y + 2y\cos z + 3x^2 z\sqrt{v}$;

$\frac{\partial u}{\partial z} = -y^2 \sin z - 3z^2 \operatorname{tg} v + 3x^2 y\sqrt{v}$; $\frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{z^3}{\cos^2 v} + \frac{3x^2 yz}{2\sqrt{v}}$.

Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой в точке*** $M(x, y)$, если в этой точке ее полное приращение можно представить в виде $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \Delta x \cdot \alpha(\Delta x, \Delta y) + \Delta y \cdot \beta(\Delta x, \Delta y)$, где A и B некоторые не зависящие от Δx и Δy числа, $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ и $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ функции. Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то $A = \frac{\partial z}{\partial x}$, $B = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Приращения аргументов называют также ***дифференциалами аргументов*** и обозначают: dx и dy ($dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$). ***Полным дифференциалом*** dz дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Аналогично определяется полный дифференциал дифференцируемой функции любого (конечного) числа переменных. Так, если $u = f\left(x, y, z\right)$, то $du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$. При достаточно малых приращениях (дифференциалах) аргументов дифференцируемой функции справедливо приближенное равенство: $\Delta u \approx du$.

Пример 5. Найти полный дифференциал функции $u = x\sin x + y\cos z + z^2$.

РЕШЕНИЕ. Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin x + x\cos x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = \cos z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = -y\sin z + 2z$, то $du = (\sin x + x\cos x)dx + \cos z dy + (2z - y\sin z)dz$.

Градиентом функции $u = f(M)$ в точке M называется вектор, координатами которого являются частные производные функции в этой точке. Если $u = f(M) = f(x, y, z)$, то $grad\ u(M) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(M),\ \frac{\partial u}{\partial y}(M),\ \frac{\partial u}{\partial z}(M)\right)$. Градиент указывает направление наибыстрейшего роста функции в данной точке.

Пример 6. Найти градиент функции $u = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M_0(1, -2, 2)$ и его величину (длину).

РЕШЕНИЕ. Найдем частные производные $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 2z$ и вычислим их значения в точке M_0: $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 2$; $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = -4$; $\frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = 4$. Следовательно, $grad\ u(M_0) = (2, -4, 4)$, а $|grad\ u(M_0)| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$.

Производной функции $u = f(M)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$ (***производной по направлению***) называется предел $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0 M} = \frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$, вычисленный в предположении, что точка M неограниченно приближается к точке M_0 по прямой, проходящей через точку M_0 с направляющим вектором $\vec{l} = (l_1, l_2, ..., l_n)$, где M_0M – ориентированная длина отрезка M_0M. Если функция $u = f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируема в точке M_0, то производная по направлению вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(M_0)\cos\alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}(M_0)\cos\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}(M_0)\cos\alpha_n,$$

где $\cos\alpha_i = \frac{l_i}{l}$, $i = \overline{1, n}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$, а l – длина вектора $\vec{l}$.

В случае функции двух переменных $u = f(M) = f(x, y)$ формула имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\sin\alpha$$

(α и β – углы, образованные вектором $\vec{l}$ с осями 0x, 0y соответственно, $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$).

Если $u = f(M) = f(x, y, z)$, то:

$$\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(M_0)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(M_0)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(M_0)\cos\gamma$$

(α, β, γ – углы, образованные вектором $\vec{l}$ с осями 0x, 0y и 0z). Если $\vec{l}$ – единичный вектор, а φ – угол между градиентом функции $u = f(M)$ и вектором $\vec{l}$, то: $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\left(grad\ u(M_0), \vec{l}\right)=\left|grad\ u(M_0)\right|\cdot\cos\varphi$.

Производная $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)$ в направлении градиента имеет наибольшее значение: $\max\limits_{l}\frac{\partial u}{\partial l}(M_0)=\left|grad\ u(M_0)\right|$.

Пример 7. Найти производную функции $z=x^2+y^2+2x-4y+1$ в точке $M_0(1, -1)$: 1) в направлении вектора $\vec{l}$, составляющего угол $\alpha=\frac{\pi}{6}$ с положительным направлением оси 0x; 2) в направлении вектора $\vec{l}=(3,\ 4)$.

РЕШЕНИЕ.

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=2y-4$ и вычислим их значения в точке M_0: $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=2\cdot1+2=4,\quad \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)=2\cdot(-1)-4=-6$.

1. Так как $\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta=\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, то: $\frac{\partial z}{\partial l}(M_0)=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\ 6\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{3}-3\approx0{,}4$;

2. Так как длина вектора $\vec{l}$ равна $l=\sqrt{3^2+4^2}=5$, то: $\cos\ \alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$ и $\frac{\partial z}{\partial l}(M_0)=4\cdot\frac{3}{5}-\ 6\cdot\frac{4}{5}=\frac{12-24}{5}=-\frac{12}{5}=-2{,}4$.

Пример 8. Найти производную функции $u = e^{xyz}$ в точке $M_0(0, 2, -1)$ в направлении вектора $\overrightarrow{M_0M}$, если $M(-2, 1, 1)$.

РЕШЕНИЕ. Находим частные производные: $\frac{\partial u}{\partial x} = yze^{xyz}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xze^{xyz}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = xye^{xyz}$ и вычисляем их значения в точке M_0:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 2\cdot(-1)e^0 = -2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 0\cdot(-1)e^0 = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = 0\cdot 2e^0 = 0.$$

Находим направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{M_0M}$:

$\overrightarrow{M_0M} = (-2, -1, 2) \Rightarrow M_0M = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{1}{3}$, $\cos\gamma = \frac{2}{3}$ Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = -2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 0\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 0\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Пример 9. Найти производную функции $u = \frac{xy}{x+y}$ в точке $M_0(1, -2)$ в направлении градиента.

РЕШЕНИЕ. Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$; $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = \frac{(-2)^2}{(1-2)^2} = 4$, $\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = \frac{1^2}{(1-2)^2} = 1$, то $grad\, u(M_0) = (4, 1)$ и $\frac{\partial u}{\partial l}(M_0) = |grad\, u(M_0)| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$.

Частными производными второго порядка функции нескольких переменных называются частные производные от ее частных производных первого порядка. Так, для функции $z = f(x, y)$: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$;
$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{xy}(x, y)$; $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{yx}(x, y)$; $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$.

Аналогично обозначаются частные производные второго порядка и в случае функции трех и большего числа переменных.

«Смешанными» производными называются производные, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования; например, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Если смешанные производные непрерывны, то они равны между собой. Так, если $u = f(x,\ y,\ z)$, то $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$, если эти производные непрерывные.

Пример 10. Найти частные производные второго порядка:

1) $z = y \ln x$; 2) $u = x^2 y + yz^2 + z$.

РЕШЕНИЯ.

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \ln x$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = -\dfrac{y}{x^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{x}$;
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = \dfrac{1}{x}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2xy$; $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 + z^2$; $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 2yz + 1$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2x$;
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = 2z$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2y.$

ЗАДАНИЯ

3.3. Найти частные производные функций:

1) $z = x^2 - 5xy + 6y - x + 1$; 2) $z = 3x^2 + \sqrt{x}y - \sqrt{xy} + 3x$;

3) $z = \dfrac{x + y}{x^2 - 2y}$; 4) $z = \dfrac{x^2 - y^3}{x^2 + y}$; 5) $z = e^{x^2 y}$; 6) $z = \sin\left(x + y^2\right)$;

7) $z = \left(x + \sqrt{y}\right)\cos(2x + 3y)$; 8) $z = \sin\left(2x + y^2\right)\cos\left(x^2 + 3y\right)$;

9) $u = x + x^2 y + y^2 z + xyz^2$; 10) $u = 2x^2 - 3xy^2 + 5yz^3 - yz$;

11) $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}$; 12) $u = \dfrac{x + y}{y + z}$; 13) $u = \ln\left(x + y^2 + z^3\right)$; 14) $u = e^{xy + z^2}$.

3.4. Найти полные дифференциалы функций:

1) $u = \cos(x^2 + \sqrt{y})$; 2) $u = tg(x + 2y^2)$; 3) $u = \ln(x^2 + xy - e^x)$;

4) $u=e^{x^2+y^3}$; 5) $u=\dfrac{x^2}{y+z}$; 6) $u=\dfrac{x^2-y^3}{x^2+z^2}$.

3.5. Найти градиент функции $u=f(M)$ в точке M_0:

1) $u=x^2y^3$, $M_0(2,-1)$; 2) $u=\ln(x^2+y^2)$, $M_0(1,\ 3)$;

3) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(1,\ 2,\ -2)$; 4) $u=xy^2+yz^2$, $M_0(-1,\ 1,\ 2)$;

5) $u=e^{xyz}$, $M_0(0,\ 1,\ 2)$; 6) $u=\dfrac{x+y^2}{y+z^2}$, $M_0(1,\ 2,\ -1)$.

3.6. Найти производную функции $u=f(M)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{l}$:

1) $u=\ln(x^2+y^2)$, $M_0(1,\ -2)$, $\vec{l}=(3,\ 4)$;

2) $u=\sqrt{x^2-y^2+6}$, $M_0(2,\ -3)$, $\vec{l}=\left(-\dfrac{4}{5},\ \dfrac{3}{5}\right)$;

3) $u=e^{x+2y-3z}$, $M_0(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{l}=(1,\ -2,\ 2)$;

4) $u=\ln(x+3y+2z)$, $M_0(2,\ -2,\ 4)$, $\vec{l}=(2,\ 4,\ -4)$;

5) $u=xy^3-2x^2z+yz$; $M_0(2,\ 0,\ -1)$, $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M}$, $M(0,\ 2,\ -2)$;

6) $u=xe^x+ye^z$; $M_0(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{l}=\overrightarrow{M_0M}$, $M(5,\ -3,\ 0)$.

3.7. Найти производную функции $u=f(M)$ в точке M_0 в направлении градиента:

1) $u=x^2+2y^2-3x+y-2$, $M_0(0,\ 1)$;

2) $u=xy-x^2+y^2+7y$, $M_0(3,\ -2)$;

3) $u=xy+y^2z-x^2z-y+2z+3$, $M_0(1,\ 1,\ 1)$;

4) $u=xyz+xy+yz+xz-y-3z+5$, $M_0(1,\ 2,\ -1)$.

3.8. Найти частные производные второго порядка:

1) $z=x^2y$; 2) $z=xy+\cos(x+y)$; 3) $u=x^2+3xy+2y^3-x-2y+1$;

4) $u=xy^2+x^2y+2xy-x+3y-5$; 5) $u=\sin(x^2+y)+\cos(x-y^2)$;

6) $u=(3x+y^2)\sin x+(x-2y^2)\cos y$; 7) $u=e^{x+2y+3z}$;

8) $u = \ln(5x - 3y + 2z)$.

3.3. Экстремумы функций нескольких переменных

Точка $M_0\left(x_1^0,\ x_2^0,\ ...,\ x_n^0\right)$ является точкой локального максимума (минимума) функции $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если в некоторой окрестности этой точки значение функции $f(M_0)$ больше (меньше), чем ее значение в любой другой точке этой окрестности.

Точки локальных максимумов и минимумов называются ***точками локального экстремума функции,*** а значения функции в этих точках – ***экстремальными значениями.***

Необходимое условие экстремума. Если M_0 является точкой экстремума дифференцируемой функции $u = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то в этой точке все ее частные производные первого порядка равны нулю, т. е. $\frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}(M_0) = 0$, …, $\frac{\partial f}{\partial x_n}(M_0) = 0$. Точки, в которых частные производные равны нулю, называются ***стационарными точками*** или точками, ***подозрительными на экстремум***. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Пример 11. Найти стационарные точки функций:

1) $z = x^2 + y^3 + 4x - 3y + 12$; 2) $u = x^2 - 2y^2 + xz + 6x - 12y + 7$.

РЕШЕНИЯ.

1. Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 4$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3$, то стационарные точки находятся из условия: $\begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$. Следовательно, стационарными точками функции $z = x^2 + y^3 + 4x - 3y + 12$ будут точки M_1(–2, 1) и M_2(–2, –1).

2. Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + z + 6$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -4y - 12$, $\frac{\partial u}{\partial z} = x$, то стационарные точки находятся из условия $\begin{cases} 2x + z + 6 = 0 \\ -4y - 12 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \\ z = -6 \end{cases}$. Следовательно, у функции $u = x^2 - 2y^2 + xz + 6x - 12y + 7$ одна стационарная точка M_0(0, –3, –6).

Достаточные условия экстремума функции двух переменных**.**

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – стационарная точка функции $z = f(x, y)$. Значения частных производных второго порядка этой функции в точке M_0 обозначают буквами A, B, C: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0) = A$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0) = B$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0) = C$, а выражение $AC - B^2$ обозначают через Δ и называют дискриминантом: $\Delta = AC - B^2$.

Если в точке M_0 дискриминант положительный ($\Delta > 0$), то M_0 – точка экстремума функции $f(x, y)$, причем: 1) если $A > 0$, то M_0 – точка локального минимума; 2) если $A < 0$, то M_0 – точка локального максимума.

Если в точке M_0 дискриминант отрицательный ($\Delta < 0$), то в этой точке экстремума нет.

Если $\Delta = 0$, то необходимы дальнейшие исследования (сомнительный случай).

Пример 12. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 - y^3 - 3x + 12y - 23$.

Р Е Ш Е Н И Е. Находим частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 + 12$ и приравниваем их нулю:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ -3y^2 + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}.$$

Значит, у функции четыре стационарные точки: $M_1(1, 2)$, $M_2(1, -2)$, $M_3(-1, 2)$ и $M_4(-1, -2)$.

Находим частные производные второго порядка: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y$ и исследуем каждую из стационарных точек:

1. $M_1(1, 2)$: $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(M_1) = 6 \cdot 1 = 6$, $B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(M_1) = 0$,

$C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(M_1) = -6 \cdot 2 = -12$; $\Delta(M_1) = 6 \cdot (-12) - 0^2 = -72 < 0$. Следовательно, в точке M_1 у функции экстремума нет.

2. $M_2(1, -2)$: $A = 6 \cdot 1 = 6$, $B = 0$, $C = -6 \cdot (-2) = 12$; $\Delta(M_2) = 6 \cdot 12 - 0^2 = 72 > 0$. Следовательно, в точке M_2 экстремум есть. Так как $A = 6 > 0$, то M_2 – точка локального минимума: $z(M_2) = 1^3 - (-2)^3 - 3 \cdot 1 + 12 \cdot (-2) - 23 = -41$.

3. $M_3(-1, 2)$: $A = 6 \cdot (-1) = -6$, $B = 0$, $C = -6 \cdot 2 = -12$; $\Delta(M_3) = (-6) \cdot (-12) - 0^2 = 72 > 0$. Следовательно, в точке M_3 экстремум тоже есть. Так как $A = -6 < 0$, то M_3 – точка локального максимума: $z(M_3) = (-1)^3 - 2^3 - 3 \cdot (-1) + 12 \cdot 2 - 23 = -5$.

4. $M_4(-1, -2)$: $A = 6 \cdot (-1) = -6$, $B = 0$, $C = -6 \cdot (-2) = 12$; $\Delta(M_4) = -6 \cdot 12 - 0^2 = -72 < 0$. Следовательно, в точке M_4 экстремума нет.

Условным экстремумом функции $z = f(M) = f(x, y)$ называется экстремум этой функции при условии, что ее аргументы x и y не являются независимыми, а связаны некоторым условием $\varphi(x, y) = 0$, которое называется ***уравнением связи.***

Отыскание условного экстремума может быть сведено к исследованию на экстремум функции Лагранжа $L(x,\ y,\ \lambda) = f(x,\ y) + \lambda\varphi(x,\ y)$, где λ – неопределенный постоянный множитель (множитель Лагранжа).

Необходимые условия условного экстремума следующие:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x,\ y) = 0 \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находятся значения x и y (которые являются координатами точек возможного условного экстремума) и λ (которое играет вспомогательную роль).

Пример 13. Найти экстремумы функций:

1. $z = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 1$, при условии, что $x + 2y = 28$;

2) $z = xy$, при условии, что $3x + 2y = 24$.

РЕШЕНИЯ.

1. Запишем функцию Лагранжа:

$L(x,\ y,\ \lambda) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 1 + \lambda(x + 2y - 28)$ и найдем точку, возможного условного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 6x + 2y + 2 + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2x + 2y - 4 + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + 2y - 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 2y + 2 + \lambda = 0 \\ x + y - 2 + \lambda = 0 \\ x + 2y - 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + y + 4 = 0 \\ x + y - 2 + \lambda = 0 \\ x + 2y - 28 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 16 \\ \lambda = -10 \end{cases}.$$

Следовательно, $M_0(-4,\ 16)$ – точка возможного условного экстремума. Проверим, является ли эта точка точкой экстремума функции Лагранжа $L(x,\ y,\ -10) = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 1 - 10(x + 2y - 28)$. Так как $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 6 > 0$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 2$, $\Delta = 6 \cdot 2 - 2^2 = 8 > 0$, то в точке $M_0(-4,\ 16)$ у функции Лагранжа минимум. Следовательно, точка $M_0(-4,\ 16)$ является точкой условного минимума функции $z = 3x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y + 1$ при условии, что $x + 2y = 28$.

2. Запишем функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(3x + 2y - 24)$ и найдем точку возможного условного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y + 3\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 3x + 2y - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3\lambda \\ x = -2\lambda \\ 3(-2\lambda) + 2(-3\lambda) = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 4 \\ \lambda = -2 \end{cases}.$$

Следовательно, $M_0(4, 6)$ – точка возможного условного экстремума. У функции Лагранжа $L(x,\ y,\ -2) = xy - 2(3x + 2y - 24)$ в точке $M_0(4, 6)$ экстремума нет: $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1$, $\Delta = 0 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$. Однако это еще не означает, что в точке M_0 у функции $z = xy$, при условии, что $3x + 2y = 24$ нет условного экстремума. Продолжим исследования. Возьмем точку $M(4 + \Delta x, 6 + \Delta y)$ – соседнюю к точке $M_0(4, 6)$. Так как координаты этой точки должны удовлетворять условию $3x + 2y = 24$, то $3(4 + \Delta x) + {} + 2(6 + \Delta y) = 24 \Rightarrow 3\Delta x + 2\Delta y = 0 \Rightarrow \Delta y = -\dfrac{3}{2}\Delta x$ (Δx – любое). Следовательно, соседней точкой, удовлетворяющей уравнению связи

$3x + 2y = 24$, будет точка $M(4+\Delta x,\ 6-\frac{3}{2}\Delta x)$. Вычислим значение функции $z = xy$ в этой точке: $z(4 + \Delta x,\ 6 - \frac{3}{2}\Delta x) = (4 + \Delta x)(6 - \frac{3}{2}\Delta x) = 24 + 6\Delta x - 6\Delta x - \frac{3}{2}(\Delta x)^2 = 24 - \frac{3}{2}(\Delta x)^2$ и в точке $M_0(4, 6)$: $z(4, 6) = 4 \cdot 6 = 24$. Так как $\Delta z = z(M) - z(M_0) = z(4 + \Delta x,\ 6 - \frac{3}{2}\Delta x) - z(4, 6) = 24 - \frac{3}{2}(\Delta x)^2 - 24 = -\frac{3}{2}(\Delta x)^2 < 0$ при любых Δx, то это означает, что в точке $M_0(4, 6)$ функция $z = xy$ при условии $3x + 2y = 24$ достигает наибольшего значения. Следовательно, $M_0(4, 6)$ – точка условного максимума.

Чтобы найти наибольшее или наименьшее значение функции (***глобальный экстремум***) в замкнутой области, нужно:

1) найти стационарные точки функции внутри заданной области (точки подозрительные на локальный экстремум) и вычислить значения функции в этих точках;

2) найти точки возможного условного экстремума (на границе области) и вычислить значения функции в этих точках;

3) из этих значений функции выбрать наибольшее (глобальный максимум) или наименьшее (глобальный минимум).

Пример 14. Найти наименьшее и наибольшее значение функции $z = x^2 + y^2$ в круге $x^2 + (y-1)^2 \le 16$.

РЕШЕНИЯ. Найдем стационарные точки функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M_0(0,\ 0)$$ – стационарная точка. Очевидно, что эта точка принадлежит заданному кругу и в этой точке функция достигает своего наименьшего значения $\min\limits_{x^2+(y-1)^2\le 16} Z = 0$ (во всех остальных точках Z > 0).

Найдем точки возможного условного экстремума функции (при условии, что x и y связаны соотношением $x^2 + (y-1)^2 = 16$). Составим функцию Лагранжа $L(x,\ y,\ \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda[x^2 + (y-1)^2 - 16]$ и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda(y-1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + (y-1)^2 - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \lambda x = 0 \\ y + \lambda(y-1) = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1+\lambda) = 0 \\ y(1+\lambda) - \lambda = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 - 16 = 0 \end{cases}.$$

Эта система имеет два решения: $x_1 = 0$, $y_1 = 5$, $\lambda_1 = -\frac{5}{4}$ и $x_2 = 0$, $y_2 = -3$, $\lambda_2 = -\frac{3}{4}$. Следовательно, точками возможного условного экстремума будут точки $M_1(0,\ 5)$ и $M_2(0,\ -3)$. Вычисляем значения функции
в этих точках: $z(M_1) = 25$; $z(M_2) = 9$. Значит, наибольшее значение функции в заданном круге $\max\limits_{x^2+(y-1)^2 \le 16} Z = z(M_1) = 25$.

Пример 15. Фирма производит два вида продукции. При производстве x ед. продукции первого вида и y ед. продукции второго вида фирма получает прибыль $z = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - 5y^2 - 100$ ден. ед. Каким должен быть оптимальный план выпуска продукции (план, при выполнении которого фирма будет получать максимум прибыли), если:

1) фирма в состоянии произвести необходимое количество продукции;
2) фирме установлена квота: суммарный объем выпуска продукции должен составлять 66 ед., т. е. $x + y = 66$;
3) производственные мощности фирмы позволяют выпускать продукцию суммарным объемом: а) не более 82 ед. ($x + y \le 82$), б) не более 34 ед. ($x + y \le 34$).

РЕШЕНИЕ.

1. В данном случае речь идет об отыскании экстремума функции $z = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - 5y^2 - 100$. Ищем стационарные точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 20 + 5y - 4x = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 50 + 5x - 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 5y = 20 \\ -x + 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 20 \end{cases} \Rightarrow M_0(30,\ 20).$$

Проверяем наличие экстремума в точке M_0: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -10$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 5$, $\Delta = (-4)\cdot(-10) - 5^2 = 40 - 25 = 15 > 0$. Экстремум есть, причем, так как $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$, то в точке M_0 у функции максимум.

Следовательно, фирма будет получать максимум прибыли, если будет производить 30 ед. продукции первого вида и 20 ед. – второго:
$\max\ z = 20\cdot 30 + 50\cdot 20 + 5\cdot 30\cdot 20 - 2\cdot(30)^2 - 5\cdot(20)^2 - 100 = 600 + 1000 + 3000 - -1800 - 2000 - 100 == 4600 - 3900 = 700$ ден. ед.

2. В этом случае нужно решать задачу на условный экстремум:

$$\begin{cases} z = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - 5y^2 - 100 \\ x + y - 66 = 0 \end{cases}.$$

Составляем функцию Лагранжа: $L(x,\ y,\ \lambda) = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - -5y^2 - 100 + \lambda(x + y - 66)$ и ищем точки возможного условного экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 20 + 5y - 4x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 50 + 5x - 10y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 66 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 5y + \lambda + 20 = 0 \\ 5x - 10y + \lambda + 50 = 0 \\ x + y - 66 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ y = 26 \\ \lambda = 10 \end{cases}.$$

Значит, точкой, подозрительной на условный экстремум, будет точка $M_0(40, 26)$. Легко убедиться, что (при $\lambda = 10$) в точке M_0 у функции Лагранжа L(x, y, 10) максимум: $\frac{\partial^2 L(x, y, 10)}{\partial x^2} = -4 < 0$, $\frac{\partial^2 L(x, y, 10)}{\partial y^2} = -10$, $\frac{\partial^2 L(x, y, 10)}{\partial x \partial y} = 5$: $\Delta = (-4)\cdot(-10) - 5^2 > 0$.

Следовательно, при квоте $x + y = 66$ оптимальным планом выпуска продукции фирмой будет: 40 ед. продукции первого вида и 26 ед. второго.

3. В случае (а) – ответ очевиден: так как фирма в состоянии выпускать продукцию в суммарном объеме более 50 ед. (82 > 50), то оптимальным будет план: $x = 30$, $y = 20$ (см. вопрос 1 данной задачи).

В случае (б) – задача сводится к отысканию глобального максимума функции $z = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - 5y^2 - 100$ в ограниченной замкнутой области: $x + y \le 34$, $x \ge 0$, $y \ge 0$ (треугольник, ограниченный прямыми $x + y = 34$, $x = 0$, $y = 0$). Точка локального экстремума $M_0(30, 20)$ функции z

(см. вопрос 1 данной задачи) рассматриваемой области не принадлежит. Значит, наибольшее значение функция z достигает на границе области. Ищем точки возможных условных экстремумов:

$$\begin{cases} z = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - 5y^2 - 100 \\ x + y - 34 = 0 \end{cases}.$$

Составляем функцию Лагранжа: $L(x,\ y,\ \lambda) = 20x + 50y + 5xy - 2x^2 - 5y^2 - 100 + \lambda(x + y - 34)$ и ищем точки возможного условного экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 20 + 5y - 4x + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 50 + 5x - 10y + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 34 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 5y + \lambda + 20 = 0 \\ 5x - 10y + \lambda + 50 = 0 \\ x + y - 34 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 14 \\ \lambda = -10 \end{cases}.$$

Значит, на прямой $x + y = 34$ точкой возможного условного экстремума будет точка $M_1(20,\ 14)$.

На прямой $x = 0$ функция z принимает вид: $z = 50y - 5y^2 - 100$ и точка возможного условного экстремума легко находится из условия $z'_y = 50 - 10y = 0 \ \Rightarrow\ y = 5$. Значит, на прямой $x = 0$ возможен условный экстремум функции z в точке $M_2(0,\ 5)$.

На прямой $y = 0$ функция z принимает вид: $z = 20x - 2x^2 - 100$ и точкой возможного условного экстремума ($z'_x = 20 - 4x = 0 \ \Rightarrow\ x = 5$) будет точка $M_3(5,\ 0)$.

Точками возможного глобального экстремума будут также вершины треугольника $M_4(0,\ 0)$, $M_5(34,\ 0)$, $M_6(0,\ 34)$.

Вычислим значения функции в каждой из этих точек:

$$z(M_1) = 20 \cdot 20 + 50 \cdot 14 + 5 \cdot 20 \cdot 14 - 2 \cdot 20^2 - 5 \cdot 14^2 - 100 = 620;$$

$$z(M_2) = 20 \cdot 0 + 50 \cdot 5 + 5 \cdot 0 \cdot 5 - 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 5^2 - 100 = -830;$$

$$z(M_3) = 20 \cdot 5 + 50 \cdot 0 + 5 \cdot 5 \cdot 0 - 2 \cdot 5^2 - 5 \cdot 0^2 - 100 = -50;$$

$$z(M_4) = -100;$$

$$z(M_5) = 20 \cdot 34 + 50 \cdot 0 + 5 \cdot 34 \cdot 0 - 2 \cdot 34^2 - 5 \cdot 0^2 - 100 = -1632;$$

$$z(M_6) = 20 \cdot 0 + 50 \cdot 34 + 5 \cdot 0 \cdot 34 - 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 34^2 - 100 = -1080.$$

Наибольшее значение ($z = 620$) в рассматриваемой области функция достигает в точке $M_1(20,\ 14)$. Значит, оптимальный план выпуска продукции (при ограничениях $x + y \le 34$, $x \ge 0$, $y \ge 0$) будет следующим: 20 ед. продукции первого вида и 14 ед. второго. При этом прибыль фирмы будет составлять 620 ден. ед.

ЗАДАНИЯ

3.9. Найти стационарные точки функций:

1) $z = x^3 + y^3 - 12x - 27y + 12$; 2) $z = x^2 + y^2 - 18\ln y - \frac{16}{x} + 3$;

3) $u = x^2 + y^3 + z^4 + 2x - 12y + 32z - 5$;

4) $u = 2x^2 + 3y^2 - 4z^3 + v^4 + 12x - 18y + 24z + 4v + 3$;

5) $u = x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z + 6$; 6) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z - 1$.

3.10. Исследовать на экстремум функции:

1) $z = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 2$; 2) $z = x^4 + y^4 - 32y + 4x + 3$;

3) $z = x^2 + 2xy + 2y^2 - 5y - 1$; 4) $z = x^2 - 2xy^2 - y^4 + 8y - 2$;

5) $z = x^2 + y^2 - 8\ln x - \frac{2}{y} + 4$; 6) $z = 3x^2 + 2y^3 - 6y^2 - 24\ln x + 7$;

7) $z = x^2 - 2xy - 2y^4 + 6$; 8) $z = y^2 - 2x^2y - x^4 + 8y - 5$;

9) $z = x^2 - y^3 + 3xy - 5x + 8$; 10) $z = 3 + 4x - 32y + x^4 + y^4$;

11) $u = e^{\frac{y}{2}}(x^2 + y)$; 12) $z = 6xy + (47 - x - y)(4x + 3y)$.

3.11. Найти условные экстремумы функций:

1) $\begin{cases} z = x^2 + xy + y^2 + x - 3y + 5 \\ x + y = 6 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 2y + 5 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} z = xy - 4x - 2y + 30 \\ x + y = 12 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} z = xy + 2x - 6y - 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} z = 2x(1 + y) + 3y^2 - 4y - 1 \\ 2x + y = 17 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} z = x(x + 3y - 2) + 3y \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$.

3.12. Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

1) $z = xy$ в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

2) $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y + 1$ в круге $x^2 + y^2 \le 25$.

3.13. Предприятие производит продукцию двух видов и реализует ее по цене $p_1 = 1728$ ден. ед. и $p_2 = 2700$ ден. ед за единицу продукции. Затраты на производство x ед. продукции первого и y ед. продукции второго вида составляют $x^3 + y^3 + 1000$ ден. ед. Определить оптимальный план выпуска, если:

1) предприятие в состоянии произвести необходимое количество продукции;

2) предприятию установлена квота: суммарный (общий) объем выпуска должен составлять 18 ед. ($x + y = 18$);

3) предприятие в состоянии произвести не более 36 ед. продукции ($x + y \le 36$).

3.4. Эмпирические формулы

Эмпирическими формулами (функциями) называют формулы, служащие для аналитического представления опытных данных (результатов наблюдений, измерений), которые представлены в виде таблицы:

x_1	x_2	x_3	…	x_n
y_1	y_2	y_3	…	y_n

Подбор эмпирических формул по результатам наблюдений не может ставить перед собой задачу разгадать истинный характер зависимости между переменными. Даже в том случае, когда точно известны значения аргумента и функции, восстановить функцию по конечному числу ее значений – задача в общем случае неразрешимая.

Вид эмпирической формулы (функции) $y = f(x)$ определяется или из теоретических соображений, или на основании характера расположения на координатной плоскости точек, соответствующих опытным данным.

После определения (выбора) вида эмпирической формулы $y = f(x)$ необходимо так определить ее параметры (коэффициенты), чтобы эта формула в каком-то смысле была наилучшей.

При выборе параметров (коэффициентов) эмпирической формулы часто используется ***принцип наименьших квадратов***, который заключается в том, что из множества формул вида $y = f(x)$ наилучшей считается та, у которой сумма квадратов отклонений $\sum_{i=1}^{n}(y(x_i) - y_i)^2$, вычисленных по формуле $y = f(x)$ значений $y(x_i) = f(x_i)$ от наблюдаемых значений y_i, является наименьшей. Подбор параметров формулы $y = f(x)$, основанный на этом принципе, называется ***способом наименьших квадратов.***

Построение эмпирических формул по способу наименьших квадратов заключается в следующем: вначале – 1) определяется вид формулы $y = f(x)$, затем – 2) по способу наименьших квадратов находятся ее параметры (коэффициенты), после чего – 3) формула $y = f(x)$ проверяется на пригодность ее к использованию.

Проверка на пригодность полученной эмпирической формулы $y = f(x)$ проводится следующим образом. Вычисляются значения $y(x_i) = f(x_i)$ и сравниваются с наблюдаемыми значениями y_i. Если разности (погрешности) $y(x_i) - y_i$ достаточно малы (приемлемые), то построенная формула $y = f(x)$ принимается для использования; если же нет, формула не используется, а строится эмпирическая формула другого вида.

При построении эмпирической формулы вида $y = ax + b$ ее параметры (коэффициенты a и b) находятся из системы уравнений (3.1):

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \quad (n \text{ – число наблюдений}). \qquad (3.1)$$

При построении эмпирической формулы вида $y = ax^2 + bx + c$, ее параметры (коэффициенты a, b и c) находятся из системы уравнений (3.2):

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}. \qquad (3.2)$$

Пример 16. По данным наблюдений построить эмпирическую формулу вида $y = ax + b$.

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	4,98	8,57	12,51	16,06	19,94	23,42

РЕШЕНИЕ. В данном случае вид эмпирической формулы задан. Поэтому остается только найти ее параметры (коэффициенты a и b).

Для удобства составления системы (3.1) построим следующую таблицу:

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1	4,98	4,98	1
2	2	8,57	17,14	4
3	3	12,51	37,53	9
4	4	16,06	64,24	16
5	5	19,94	99,70	25
$6 = n$	6	23,42	140,52	36
$\sum$	21	85,48	364,11	91

В строке $\sum$ записаны суммы столбцов (коэффициенты системы (3.1)).

Запишем систему (3.1): $\begin{cases} 91a + 21b = 364{,}11 \\ 21a + 6b = 85{,}48 \end{cases}$. Решение этой системы дает следующие значения коэффициентов (параметров) эмпирической формулы: $a \approx 3{,}71$; $b \approx 1{,}26$. Следовательно, искомая эмпирическая формула $y = 3{,}71x + 1{,}26$.

Проверяем полученную формулу на пригодность к использованию. Результаты проверки тоже удобно записать в виде таблицы:

x_i	y_i	$y(x_i)$	$y(x_i) - y_i$
1	4,98	4,97	–0,01
2	8,57	8,68	0,11
3	12,51	12,39	–0,12
4	16,06	16,10	0,04
5	19,94	19,81	–0,13
6	23,42	23,52	0,10

Из таблицы видно, что построенная эмпирическая формула пригодна к использованию (разности $y(x_i) - y_i$ достаточно малы).

Пример 17. По данным наблюдений построить эмпирическую формулу вида $y = ax^2 + bx + c$.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	4,18	4,81	4,84	4,69	3,77

Р Е Ш Е Н И Е. Аналогично предыдущему примеру, для удобства составления системы (3.2), из которой находятся параметры (коэффициенты
a, b и c) искомой эмпирической формулы, построим следующую таблицу:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i\ y_i$	$x_i^2\ y_i$
1	1	4,18	1	1	1	4,18	4,18
2	2	4,81	4	8	16	9,62	19,24
3	3	4,84	9	27	81	14,52	43,56
4	4	4,69	16	64	256	18,76	75,04
5 = n	5	3,77	25	125	625	18,85	94,25
$\sum$	15	22,29	55	225	979	65,93	236,27

В строке $\sum$ как и в предыдущем примере записаны суммы столбцов.

Запишем систему (3.2): $\begin{cases} 979a + 225b + 55c = 236{,}27 \\ 225a + 55b + 15c = 65{,}93 \\ 55a + 15b + 5c = 22{,}29 \end{cases}$.

Решаем полученную систему табличным вариантом метода полного исключения:

979	225	55	236,27	1495,27
225	55	15	65,93	360,93
55	15	**5**	22,29	97,29
374	60	0	–8,92	425,08
60	**10**	0	–0,94	69,06
11	3	1	4,46	19,46
14	0	0	–3,28	10,72
6	1	0	–0,09	6,91
–7	0	1	4,74	–1,26
1	0	0	–0,23	0,77
0	1	0	1,29	2,29
0	0	1	3,13	4,13

Решение системы: $a \approx -0{,}23,\ b \approx 1{,}29,\ c \approx 3{,}13$, и, следовательно, искомая эмпирическая формула $y = -0{,}23x^2 + 1{,}29x + 3{,}13$.

Проверяем полученную формулу на пригодность к использованию:

x_i	y_i	$y(x_i)$	$y(x_i) - y_i$
1	4,18	4,19	0,01
2	4,81	4,79	–0,02
3	4,84	4,93	0,09
4	4,69	4,61	–0,08
5	3,77	3,83	0,06

Видно, что формула пригодна для использования.

ЗАДАНИЯ

3.14. Построить эмпирическую формулу вида $y = ax + b$ по данным наблюдений:

1)

x	0	1	2	3	4	5
y	4,25	1,55	–1,25	–3,90	–6,75	–9,35

2)

x	1	2	3	4	5
y	16,40	15,05	13,85	12,50	11,35

3.15. Построить эмпирическую формулу вида $y = ax^2 + bx + c$ по данным наблюдений:

1)

x	1	2	3	4	5
y	-2,4	2,3	8,5	16,0	25,1

2)

x	1	2	3	4
y	22,75	34,20	44,95	57,40

3.16. Построить эмпирические формулы по данным наблюдений:

1)

x	1	2	3	4	5
y	6	12	20	30	42

2)

x	1	2	3	4	5
y	16,0	18,0	20,5	23,0	25,0

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

4.1. Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то она имеет бесконечное множество первообразных, причем, любая ее первообразная имеет вид $F(x) + C$, где C – некоторая постоянная.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$. Здесь $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, x – переменная интегрирования. Таким образом, если $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функции $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$. Отыскание неопределенного интеграла называется ***интегрированием функции***.

Свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования):

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.
5. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.
6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (если $\alpha \neq -1$).
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \ln|\varphi(x)| + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.
10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$.
11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
12. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$. 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}$.

15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$. 16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}$.

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

18. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.

Непосредственным интегрированием называется интегрирование, заключающееся в прямом применении свойств неопределенного интеграла и формул из таблицы основных интегралов.

Пример 1. Найти интегралы:

а) $\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx$; б) $\int (2\sin x + 3\cos x + 4\operatorname{tg} x) dx$;

в) $\int \left(3e^x + 5 \cdot 2^x + \frac{6}{4+x^2} - \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} \right) dx$.

РЕШЕНИЯ:

а) $\int \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int x^2 dx - 3\int x dx + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} =$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + \frac{1}{x} + C$;

б) $\int (2\sin x + 3\cos x + 4\operatorname{tg} x) dx = 2\int \sin x dx + 3\int \cos x dx + 4\int \operatorname{tg} x dx =$

$= -2\cos x + 3\sin x - 4\ln|\cos x| + C$;

в) $\int \left(3e^x + 5 \cdot 2^x + \frac{6}{4+x^2} - \frac{2}{\sqrt{x^2+4}} \right) dx = 3\int e^x dx + 5\int 2^x dx +$

$+ 6\int \frac{dx}{4+x^2} - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = 3e^x + 5\frac{2^x}{\ln 2} + 6 \cdot \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - 2\ln\left(x + \sqrt{x^2+4} \right) + C =$

$$= 3e^x + \frac{5 \cdot 2^x}{\ln 2} + 3\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - 2\ln\left(x + \sqrt{x^2+4}\right) + C.$$

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью ***подстановок*** двух типов:

1) $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t. Формула замены переменной в этом случае имеет вид:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

После вычисления интеграла, стоящего в правой части, необходимо выполнить обратную подстановку, т. е. заменить $t = \varphi^{-1}(x)$, где $\varphi^{-1}(x)$ – функция, обратная к функции $x = \varphi(t)$;

2) $\psi(x) = t$, где t – новая переменная. Формула замены переменной при такой подстановке:

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int f(t)dt.$$

После вычисления интеграла, стоящего в правой части, необходимо вместо переменной t поставить $\psi(x)$.

Пример 2. Найти интегралы:

а) $\int \sin^2 x \cos x dx$; б) $\int x e^{x^2} dx$; в) $\int \frac{\ln x}{x} dx$;

г) $\int \sqrt{1-x^2}dx$; д) $\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+1}dx$.

РЕШЕНИЯ:

а) сделаем подстановку (замену) $\sin x = t$. Тогда $\cos x dx = dt$ и интеграл становится табличным:

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \left|\sin x = t; \cos x dx = dt\right| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

б) в этом случае удобно сделать подстановку (замену) $x^2 = t$. Дифференцируя это равенство, получаем: $2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$.

Следовательно: $\int x e^{x^2} dx = \left|x^2 = t;\ 2xdx = dt\right| = \int \frac{1}{2}e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$;

в) в данном случае удобно сделать замену $\ln x = t$. Тогда, дифференцируя, получим: $\frac{dx}{x} = dt$ и $\int \frac{\ln x}{x}dx = \left|\ln x = t,\ \frac{dx}{x} = dt\right| = \int t dt =$

$=\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{2}\ln^2 x+C$;

г) сделаем подстановку $x=\sin t$. Тогда получим: $dx=\cos t dt$ и $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$. Следовательно:

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\left|x=\sin t,\ dx=\cos t dt,\ \sqrt{1-x^2}=\cos t\right|=\int\cos^2 t dt=$$

$$=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}\int dt+\frac{1}{2}\int\cos 2t dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2t}{2}+C=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C.$$

Принимая во внимание, что из $x=\sin t$ следует $t=\arcsin x$, окончательно получим: $\int\sqrt{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{4}\sin(2\arcsin x)+C$;

д) в числителе дроби стоит производная знаменателя: $\left(x^3+x+1\right)'=3x^2+1$. Поэтому:

$$\int\frac{3x^2+1}{x^3+x+1}dx=\left|x^3+x+1=t,\ \left(3x^2+1\right)dx=dt\right|=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=$$

$$=\ln\left|x^3+x+1\right|+C.$$

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле $\int udv=uv-\int vdu$, где $u=\varphi(x),\ v=\psi(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int udv$ сводится к отысканию другого интеграла $\int vdu$. Такой прием целесообразно применять в тех случаях, когда $\int vdu$ проще, чем $\int udv$. При этом за u берется такая функция, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Пример 3. Найти интегралы:

а) $\int x\sin xdx$; б) $\int\left(x^2+1\right)e^x dx$; в) $\int\left(x^2+1\right)\ln xdx$.

РЕШЕНИЯ:

а) положим $u=x,\ dv=\sin xdx$, тогда $du=dx,\ v=-\cos x$. Используя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int x\sin xdx=\begin{vmatrix}u=x, & du=dx,\\ dv=\sin xdx, & v=-\cos x\end{vmatrix}=-x\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x+C;$$

б) в данном случае придется дважды интегрировать по частям:

$$\int\left(x^2+1\right)e^x dx=\begin{vmatrix} u=x^2+1, \; du=2xdx, \\ dv=e^x dx, \; v=e^x \end{vmatrix}=\left(x^2+1\right)e^x-2\int xe^x dx=\begin{vmatrix} u=x, \quad du=dx, \\ dv=e^x dx, \; v=e^x \end{vmatrix}=$$

$$=\left(x^2+1\right)e^x-2\left[xe^x-\int e^x dx\right]=\left(x^2+1\right)e^x-2xe^x+2\int e^x dx=\left(x^2+1\right)e^x-2xe^x+$$

$$+2e^x+C=\left(x^2-2x+3\right)e^x+C.$$

в) $$\int\left(x^2+1\right)\ln x dx=\begin{vmatrix} u=\ln x, & du=\dfrac{dx}{x}, \\ dv=\left(x^2+1\right)dx, & v=\dfrac{x^3}{3}+x \end{vmatrix}=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x-$$

$$-\int\frac{\frac{x^3}{3}+x}{x}dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^2}{3}+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-x+C.$$

ЗАДАНИЯ

4.1. Найти интегралы:

1) $\int\left(1+x+x^2-x^3\right)dx$;

2) $\int\left(3x^2+5x^3-2x^5-x^6\right)dx$;

3) $\int\left(2+x+x^{-1}-x^{-2}\right)dx$;

4) $\int\left(2x^{-1}+3x^{-2}-4x^{-5}\right)dx$;

5) $\int\left(2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+4\sqrt[4]{x}\right)dx$;

6) $\int\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$;

7) $\int\left(3+x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}-x^4\right)dx$;

8) $\int\left(7-x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{2}{5}}\right)dx$;

9) $\int\frac{x^2-3x+4}{x^3}dx$;

10) $\int\frac{x^3+2x^2-3}{x^2}dx$;

11) $\int\left(\sqrt{x}-1\right)^3 dx$;

12) $\int\frac{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}{x^3}dx$;

13) $\int\frac{dx}{x^2-9}$;

14) $\int\frac{dx}{x^2+9}$;

15) $\int\frac{dx}{\sqrt{16+x^2}}$;

16) $\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

17) $\int\left(\frac{1}{x^2+4}-\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx$;

18) $\int\left(\frac{2}{x^2-25}+\frac{3}{\sqrt{25-x^2}}\right)dx$;

19) $\int\left(\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}+\frac{2}{\sqrt{4+25x^2}}\right)dx$; 20) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{9+4x^2}}+\frac{3}{\sqrt{25-4x^2}}\right)dx$;

21) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$; 22) $\int \mathrm{ctg}^2 x dx$;

23) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$; 24) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

25) $\int \sin^2\frac{x}{2}dx$; 26) $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$;

27) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$; 28) $\int \frac{3+2\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$;

29) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$; 30) $\int\left(2\mathrm{tg}^2 x-3\mathrm{ctg}^2 x\right)dx$;

31) $\int\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx$; 32) $\int\left(2e^{\frac{x}{2}}+3e^{-\frac{x}{2}}\right)^2 dx$.

4.2. Найти интегралы:

1) $\int \sin(3x+4)dx$; 2) $\int \cos(2x-3)dx$; 3) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$;

5) $\int \mathrm{tg}5x dx$; 6) $\int \mathrm{ctg}4x dx$; 7) $\int e^{2x-3}dx$; 8) $\int 2^{3x+1}dx$;

9) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}dx$; 10) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+5}dx$; 11) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$; 12) $\int \frac{x^2dx}{x^3-1}$;

13) $\int \frac{dx}{1-2x}$; 14) $\int \frac{dx}{3x+2}$; 15) $\int x\sin x^2 dx$; 16) $\int x^2\cos x^3 dx$;

17) $\int x^2\mathrm{tg}(x^3+1)dx$; 18) $\int x\,\mathrm{ctg}(x^2-1)dx$; 19) $\int x^3 e^{-x^4}dx$;

20) $\int xe^{x^2+2}dx$; 21) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$; 22) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$;

23) $\int \sin x\cdot e^{\cos x}dx$; 24) $\int \cos 2x\cdot e^{-\sin 2x}dx$; 25) $\int \sqrt{3x+1}dx$;

26) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x}}$; 27) $\int (2x+1)^{10}dx$; 28) $\int \frac{dx}{(3x+2)^4}$; 29) $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-9}$;

30) $\int\left(e^{2x}+3e^x\right)dx$; 31) $\int (2\sin x+3)^2\cos x dx$; 32) $\int (\cos x-2)^3\sin x dx$.

4.3. Найти интегралы:

1) $\int x\cos x dx$; 2) $\int (2x+1)\sin x dx$; 3) $\int (x+1)e^x dx$; 4) $\int xe^{-2x}dx$;

5) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; 6) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; 7) $\int x^2 \sin xdx$; 8) $\int \left(x^2 + x + 1\right)\cos xdx$;
9) $\int \left(x^3 + 2x^2 - x + 1\right)\ln xdx$; 10) $\int (x+3)^2 \ln 2xdx$;
11) $\int x \operatorname{arctg} xdx$; 12) $\int \operatorname{arctg} xdx$.

4.2. Определенный интеграл

Если функция $f(x)$ определена на замкнутом интервале $[a,\ b]$, который произвольным образом разбит на n частичных интервалов точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина частичного интервала $[x_{i-1},\ x_i]$, а c_i – произвольная точка этого интервала, то сумма $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x)$ на интервале $[a,\ b]$.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на интервале $[a,\ b]$ (в пределах от a до b) называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из частичных интервалов ($\max\limits_i \Delta x_i$) стремится к нулю, если этот предел существует и не зависит от способа разбиения интервала $[a,\ b]$ на частичные и от выбора точек c_i.

Для определенного интеграла используется обозначение $\int\limits_a^b f(x)dx$, которое читается: интеграл от a до b от эф от икс дэ икс.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Если существует $\int\limits_a^b f(x)dx$, то о функции $f(x)$ говорят, что она ***интегрируема на интервале*** $[a, b]$. Числа a и b называются соответственно ***нижним*** и ***верхним пределами интегрирования***.

Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$, то она интегрируема на этом интервале (достаточное условие существования определенного интеграла).

Если $f(x) > 0$ на $[a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь ***криволинейной трапеции*** – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (см. рис. 4.1).

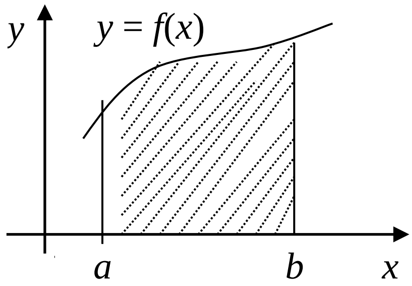


Рис. 4.1.

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где $c \in [a, b]$.

4. $\int_a^b \{f_1(x) \pm f_2(x)\}dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.

5. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, где c – постоянная.

6. $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$, если $m \le f(x) \le M$ при $x \in [a, b]$.

Правила вычисления определенного интеграла

1. Формула Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – какая-нибудь первообразная функции $f(x)$.

2. Интегрирование по частям: $\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du$.

3. Замена переменной:

а) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$,

где $x = \varphi(t)$ – функция, непрерывная вместе со своей производной на интервале $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;

б) $\int\limits_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$, где $t = \varphi(x)$.

Пример 4. Найти интегралы:

1) $\int\limits_1^2 \left(3x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{x}\right)dx$; 2) $\int\limits_0^3 xe^x dx$; 3) $\int\limits_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$.

РЕШЕНИЯ:

1) согласно формуле Ньютона – Лейбница, получаем:

$$\int\limits_1^2 \left(3x^2 + 2x + 1 + \frac{5}{x}\right)dx = \left(x^3 + x^2 + x + 5\ln|x|\right)\Big|_1^2 = 2^3 + 2^2 + 2 + 5\ln 2 -$$
$$-\left(1^3 + 1^2 + 1 + 5\ln 1\right) = 8 + 4 + 2 + 5\ln 2 - 3 = 11 + 5\ln 2;$$

2) воспользуемся методом интегрирования по частям, положив $u = x$, $dv = e^x dx$. Тогда: $\int\limits_0^3 xe^x dx = \left|\begin{matrix} u = x,\ du = dx \\ dv = e^x dx,\ v = e^x \end{matrix}\right| = xe^x\Big|_0^3 - \int\limits_0^3 e^x dx = 3e^3 -$

$$-e^x\Big|_0^3 = 3e^3 - (e^3 - e^0) = 2e^3 + 1;$$

3) положим $\ln x = t$. Тогда $\frac{dx}{x} = dt$; если $x = 1$, то $t = 0$; если $x = e$, то $t = 1$. Следовательно, $\int\limits_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx = \left|\begin{matrix} \ln x = t,\ x = 1 \Rightarrow t = 0 \\ \frac{dx}{x} = dt,\ x = e \Rightarrow t = 1 \end{matrix}\right| = \int\limits_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$.

ЗАДАНИЯ

4.4. Найти интегралы:

1) $\int_0^1 (2x^2+3x-2)dx$; 2) $\int_1^4 \left(x^2+\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)dx$; 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x+3\cos x)dx$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin x-\cos x)dx$; 5) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$; 6) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}$; 7) $\int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$;

8) $\int_0^3 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$; 9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cdot\cos x dx$; 10) $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x\cdot\sin^2 x dx$;

11) $\int_1^9 \frac{xdx}{1+x^4}$; 12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\cdot e^{\sin x}dx$; 13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx$;

14) $\int_2^3 x^2e^x dx$; 15) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx$; 16) $\int_1^3 x\sqrt{x^2-1}dx$;

17) $\int_1^e (x^2+x+1)\ln x dx$; 18) $\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x-1}$.

4.3. Вычисление площадей плоских фигур

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$), прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью $0x$, вычисляется по формуле $S=\int_a^b f(x)dx$. Если $f(x) \leq 0$, то $S=-\int_a^b f(x)dx$.

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($f_1(x)\geq f_2(x)$) и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле $S=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$.

Пример 5. Найти площади фигур, ограниченных линиями:

1) параболой $y=2x-x^2$ и осью $0x$;
2) параболой $y=-x^2$ и прямой $x+y+2=0$.

РЕШЕНИЯ:

1) фигура, ограниченная линиями $y = 2x - x^2$ и $y = 0$ изображена на рис. 4.2. Поэтому:

$$S = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} \text{ (кв. ед.);}$$

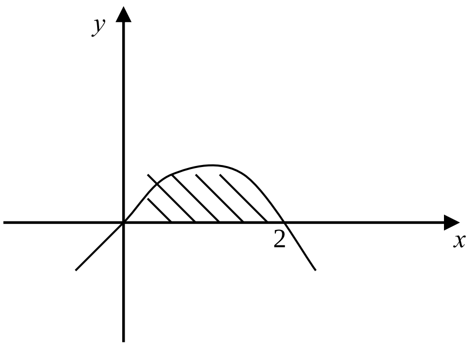


Рис. 4.2.

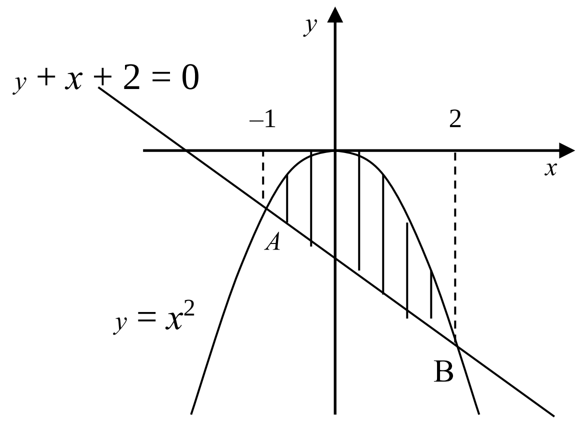


Рис. 4.3.

2) фигура, ограниченная указанными линиями, изображена на рис. 4.3. Координаты точек пересечения линий находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = -x^2 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(-1,\ -1) \\ B(2,\ -4) \end{cases}.$$

Принимая во внимание, что в нашем случае $f_1(x) = -x^2$ и $f_2(x) = -x - 2$, получаем:

$$S = \int_{-1}^{2} \left[-x^2 - (-x-2) \right] dx = \int_{-1}^{2} \left(-x^2 + x + 2 \right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right)\Bigg|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = 4{,}5 \text{ (кв. ед.).}$$

ЗАДАНИЯ

4.5. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y = x^2,\ y = 5x - 4$;

2) $xy = 1,\ x = 1,\ x = 3,\ y = 0$;

3) $y = \sin x,\ x = 0,\ x = \pi,\ y = 0$;

4) $y = x^3,\quad y = x^2$;

5) $y = \ln x,\ x = e,\ x = e^2,\ y = 0$.

4.4. Несобственные интегралы

Несобственными интегралами называются: 1) интегралы с бесконечными пределами; 2) интегралы от неограниченных функций.

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся; если же предел не существует или равен бесконечности – расходящимся.

Аналогично $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Если функция $f(x)$ не ограничена на интервале $(a, b]$ или $[a, b)$, но ограничена и интегрируема на любом интервале $[a + \alpha, b]$ или $[a, b - \alpha]$, то по определению полагают $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_{a+\alpha}^b f(x)dx$ или, соответственно, $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_a^{b-\alpha} f(x)dx$. Если эти пределы существуют, то несобственные интегралы называются ***сходящимися***, в противном случае – ***расходящимися***. Если функция $f(x)$ не ограничена на $[a, c)$ и $(c, b]$, где $a < c < b$,
но ограничена и интегрируема на любых интервалах $[a, c - \alpha]$ и $[c + \beta, b]$, то в этом случае полагают $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to+0}\int\limits_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim\limits_{\beta\to+0}\int\limits_{c+\beta}^b f(x)dx$.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, при $f(c) = \infty$, $c \in (a, b)$ называется ***сходящимся***, если существуют оба предела в правой части равенства, и ***расходящимся***, если не существует хотя бы один из них.

Пример 6. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_0^{+\infty}\sin x dx$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$; 4) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

РЕШЕНИЯ:

1) согласно определению имеем:

$$\int_0^{+\infty}\sin x dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \sin x dx = \lim_{b\to+\infty}(-\cos x\big|_0^b) = \lim_{b\to+\infty}(-\cos b + \cos 0) =$$

$$= 1 - \lim_{b\to+\infty}\cos b.$$

Так как $\lim\limits_{b\to+\infty}\cos b$ не существует, то данный несобственный интеграл расходится;

2) $$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-b} + e^0\right) =$$

$$= 1 - \lim_{b\to+\infty} e^{-b} = 1.$$

Таким образом, $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$, т. е. несобственный интеграл сходится;

3) подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке $x = 0$ не ограничена ($x = 0$ точка разрыва второго рода). Поэтому:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha\to+0}\left(\ln|x|\Big|_\alpha^1\right) = \lim_{\alpha\to+0}(\ln 1 - \ln\alpha) = -\lim_{\alpha\to+0}\ln\alpha = \infty,$$

т. е. несобственный интеграл расходится;

4) аналогично предыдущему:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha\to+0}\int_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha\to+0}\left(2\sqrt{x}\Big|_\alpha^1\right) = \lim_{\alpha\to+0}(2 - 2\sqrt{\alpha}) = 2.$$

Следовательно, несобственный интеграл сходится.

ЗАДАНИЯ

4.6. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_0^{+\infty}\cos x dx$; 2) $\int\limits_{-\infty}^{\pi}\sin 2x dx$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$; 4) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$;

5) $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{dx}{x^2}$; 6) $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции. Если независимая переменная одна, то уравнение называется ***обыкновенным***, если же независимых переменных несколько, то уравнение называется дифференциальным уравнением ***в частных производных***.

Наивысший порядок производной (или дифференциала), входящей в уравнение, называется ***порядком*** дифференциального уравнения.

Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка имеют вид $F(x, y, y')=0$ или (в разрешенном относительно y' виде) $y'=f(x, y)$. ***Общим решением*** данного уравнения называется такая функция $y = \varphi(x, C)$, которая является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C. Всякое решение $y = \varphi(x, C_0)$, получающееся из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при конкретном значении $C = C_0$, называется ***частным решением.*** Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y'=f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши. Простейшие обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка имеют вид $f_1(x)\varphi_1(y)dx+f_2(x)\varphi_2(y)dy=0$ или $y'=f(x)\varphi(y)$ и называются ***дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными***. Такое уравнение приводится к виду $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=0$ (это называется разделением переменных), после чего, почленно интегрируя, получают соотношение $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy=C$, которое и определяет (в неявной форме) решение исходного уравнения. Решение дифференциального уравнения, выраженное в неявной форме, называют ***интегралом*** этого уравнения.

Если уравнение задано в виде $y'=f(x)\varphi(y)$, то вначале заменяют производную на отношение дифференциалов $y'=\frac{dy}{dx}$, затем разделяют переменные: $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot\varphi(y) \Rightarrow \frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx$ и почленно интегрируют: $\int\frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C$.

Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$ называется ***линейным дифференциальным уравнением первого порядка*** (y и y' входят в первых степенях, не перемножаясь между собой). Решение такого уравнения может быть найдено следующим образом. С помощью подстановки $y = uv$, где u и v – две неизвестные функции, исходное уравнение преобразуют к виду:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \quad \text{или} \quad u'v + u\left[v' + P(x)v\right] = Q(x).$$

Пользуясь тем, что одна из неизвестных функций (например v) может быть выбрана совершенно произвольно, за v принимают любое частное решение уравнения $v' + P(x)v = 0$. Тогда предыдущее уравнение принимает вид $u'v = Q(x)$. Каждое из последних двух уравнений является уравнением с разделяющимися переменными. Решив эти уравнения, общее решение исходного уравнения находят умножением u на v: $y = v(u + c)$.

Дифференциальные уравнения второго порядка имеют вид $F(x,\ y,\ y',\ y'') = 0$. В уравнении обязательно должна быть вторая производная y'', в то время как x, y и y' могут отсутствовать. Общее решение уравнения имеет вид $y = y(x, C_1, C_2)$, а общий интеграл $Q(x, y, C_1, C_2) = 0$ (C_1 и C_2 – произвольные постоянные). Для определения частного решения (задача Коши) задаются начальные условия в виде $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0$.

При этом значения постоянных C_1 и C_2 находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} y(x_0,\ C_1,\ C_2) = y_0 \\ y'(x_0,\ C_1,\ C_2) = y'_0 \end{cases}.$$

Уравнение вида $y'' + \varphi(x)y' + \psi(x)y = f(x)$, где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ заданные функции или постоянные, называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется ***неоднородным***, если $f(x) = 0$ – ***однородным***.

Линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$, где коэффициенты p и q – некоторые действительные числа. Общее решение такого уравнения строится в зависимости от характера корней k_1 и k_2 ***характеристического уравнения*** $k^2 + pk + q = 0$:

1) если k_1 и k_2 действительны и различны, то $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2) если k_1 и k_2 действительны и равны ($k_1 = k_2$), то $y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x}$;

3) если k_1 и k_2 комплексные, т. е.: $k_1 = a + bi$, $k_2 = a - bi$ ($i = \sqrt{-1}$), то $y = (C_1 \sin bx + C_2 \cos bx)e^{ax}$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Пример 1. Решить уравнение $y' = \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, y$.

Р Е Ш Е Н И Е. Это уравнение с разделяющимися переменными. Заменяя $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделяя переменные, получаем уравнение $\mathrm{ctg}\, y dy = \mathrm{tg}\, x dx$. Интегрируя, будем иметь $\int \mathrm{ctg}\, y dy = \int \mathrm{tg}\, x dx$, или $\ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + \ln C$ (здесь для удобства произвольная постоянная записана в виде $\ln C$). Отсюда находим $\sin y = \frac{C}{\cos x}$ или $\sin y \cos x = C$ (общий интеграл).

Пример 2. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1 + x^2)dy + ydx = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$.

Р Е Ш Е Н И Е: Преобразуем уравнение (разделим переменные): $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$. Интегрируя, получим $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2}$ или $\ln|y| = -\mathrm{arctg}\, x + C$. Для нахождения постоянной C используем начальное условие $y(0) = 1$: $\ln 1 = -\mathrm{arctg}\, 0 + C$, т. е. $C = 0$. Следовательно, $\ln|y| = -\mathrm{arctg}\, x$, откуда получаем искомое частное решение $y = e^{-\mathrm{arctg}\, x}$.

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение $y' - \frac{2y}{x} = x$.

Р Е Ш Е Н И Е: Это линейное уравнение. Полагая $y = uv$, получаем $u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = x$ или $u'v + u\left[v' - \frac{2v}{x}\right] = x$. Выберем v так, чтобы $v' - \frac{2v}{x} = 0$. Отсюда, $\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}$ или $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$. Интегрируя, получаем $\ln|v| = 2\ln|x|$ (произвольную постоянную берем равной нулю, так как достаточно найти какое-либо частное решение), откуда $v = x^2$. Для определения *u* получаем уравнение $u'x^2 = x$ или $u' = \frac{1}{x}$, откуда находим $u = \ln|x| + C$. Перемножая найденные *u* и *v*, получаем общее решение $y = \left(\ln|x| + C\right)x^2$. Произвольную постоянную удобно представить в виде $\ln C$. Тогда общее решение можно записать в виде $y = x^2 \ln(Cx)$.

Пример 4. Решить уравнения:

1) $y'' + 2y' - 3y = 0$; 2) $y'' + 4y' + 4y = 0$; 3) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

Р Е Ш Е Н И Я:

1) это однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Корнями его характеристического уравнения $k^2 + 2k - 3 = 0$ будут: $k_1 = 1$, $k_2 = -3$. Так как $k_1 \neq k_2$, то общее решение $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$;

2) в данном случае корни характеристического уравнения $k^2 + 4k + 4 = 0$ равны: $k_1 = k_2 = -2$. Следовательно, общее решение $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$;

3) корни характеристического уравнения $k^2 - 2k + 10 = 0$ комплексные: $k_{1,2} = 1 \pm 3i$. Поэтому, общее решение:

$$y = (C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)e^x.$$

Пример 5. Найти решение уравнения $y'' - y' - 2y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Р Е Ш Е Н И Е. Характеристическое уравнение $k^2 - k - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = 2$ и $k_2 = -1$. Следовательно, общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$. Подставляя начальные условия в общее решение и его производную $(y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x})$, получим систему уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 - C_2 = 3 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases}.$$

Значит, решением, удовлетворяющим начальным условиям, будет $y = e^{2x} - e^{-x}$.

ЗАДАНИЯ

5.1. Решить уравнения:

1) $xy' - y = 0$; 2) $xy' + y = 0$; 3) $yy' + x = 0$;

4) $x^2y' + y = 0$; 5) $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x$; 6) $y' = e^{x+y}$.

5.2. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

1) $2y'\sqrt{x} = y$, $y(4) = 1$; 2) $x^2y' + y^2 = 0$, $y(-1) = 1$;

3) $dy + y\operatorname{tg} x dx = 0$, $y(\pi) = 2$; 4) $y' = 2^{x-y}$, $y(-3) = -5$.

5.3. Решить уравнения:

1) $y' + y\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$; 2) $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$;

3) $y' - \dfrac{3y}{x} = x$; 4) $y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$;

5) $xy' - y = x^2\cos x$; 6) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

5.4. Решить уравнения:

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$; 2) $y'' + 5y' - 6y = 0$;

3) $y'' + 6y' + 9y = 0$; 4) $y'' + 2y' + y = 0$;

5) $y'' + 4y' + 13y = 0$; 6) $y'' - 4y' + 5y = 0$.

5.5. Найти решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

1) $y'' - 2y' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

2) $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

3) $y'' - 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

4) $y'' + 9y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$;

5) $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$.

6. РЯДЫ

6.1. Числовые ряды

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ – бесконечная числовая последовательность. Выражение $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \equiv u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ называется ***числовым рядом***, числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ – ***членами ряда***, u_n – ***общим членом ряда***. Сумму первых n членов ряда обозначают S_n и называют n-й ***частичной суммой ряда***: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Ряд называется ***сходящимся***, если его n-я частичная сумма S_n при неограниченном возрастании n стремится к конечному пределу, т. е., если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S называют ***суммой ряда***. Если же n-я частичная сумма S_n при $n \to \infty$ не стремится к конечному пределу, то ряд называют ***расходящимся***.

Ряд $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots \ (|q| < 1)$, составленный из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, является сходящимся и его сумма $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Ряд $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$, называемый гармоническим, расходится.

Основные свойства сходящихся рядов

1. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$, получаемый из исходного ряда путем отбрасывания первых m членов (последний ряд называют m-м ***остатком*** исходного ряда); наоборот, из сходимости m-го остатка ряда вытекает сходимость данного ряда.

2. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и сумма его равна S, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$, причем сумма последнего ряда равна cS (c – любое вещественное число).

3. Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, а S_1 и S_2 соответственно их суммы, то сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$, причем их суммы соответственно равны $S_1 \pm S_2$.

4. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, т. е. при $n \to \infty$ предел общего члена сходящегося ряда равен нулю (***необходимый признак сходимости ряда)***. Таким образом, если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Если все члены ряда положительны (или отрицательны), то такой ряд называется ***знакопостоянным***.

Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов.

1. ***Признак сравнения***. Пусть даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причем каждый член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ не превосходит соответствующего члена ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, т. е. $u_n \leq v_n$ (n = 1, 2, …). Тогда, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Этот признак остается в силе, если условия $u_n \leq v_n$ выполняются не для всех n, а лишь начиная с некоторого номера $n = N$.

2. ***Признак Даламбера***. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то этот ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

3. ***Радикальный признак Коши***. Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то этот ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

4. ***Интегральный признак Коши***. Если $f(x)$ при $x \geq 1$ – непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где

$u_n = f(n)$, сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^\infty f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки, т. е. ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \equiv u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots$, где $u_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, называются ***знакочередующимися***.

5. ***Достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда (признак Лейбница).*** Знакочередующийся ряд сходится, если абсолютные величины его членов монотонно убывают, а общий член ряда стремится к нулю, т. е., если выполняются следующие два условия:

3) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$ и 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Величина n-го остатка R_n знакочередующегося ряда оценивается с помощью неравенства $|R_n| < u_{n+1}$.

Ряд с произвольным чередованием знаков своих членов называется ***знакопеременным***.

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

В этом случае исходный ряд называется ***абсолютно сходящимся***. Сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ называется ***условно сходящимся***, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Пример 1. Написать первые четыре члена ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$.

Р Е Ш Е Н И Е. Если $n = 1$, то $u_1 = \frac{1}{3}$; если $n = 2$, то $u_2 = \frac{2}{5}$; если $n = 3$, то $u_3 = \frac{3}{7}$; если $n = 4$, то $u_4 = \frac{4}{9}$. Ряд можно записать в виде $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \ldots$.

Пример 2. Найти общий член ряда $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \ldots$.

Р Е Ш Е Н И Е. Числители образуют арифметическую прогрессию 1, 3, 5, 7, …, n-й член которой находим по формуле $a_n = a_1 + d(n - 1)$. В нашем случае $a_1 = 1$, $d = 2$, поэтому $a_n = 2n - 1$. Знаменатели образуют геометрическую прогрессию $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$, n-й член этой прогрессии $b_n = 2^n$. Следовательно, общий член ряда $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}; \quad 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+10}; \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}; \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1};$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!} \quad (n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n); \qquad 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n; \qquad 7)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};$$

$$8)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

РЕШЕНИЯ:

1) данный ряд составлен из членов бесконечно убывающей $\left(q=\dfrac{1}{3}<1\right)$ геометрической прогрессии и поэтому сходится. Найдем его сумму. Здесь $a=\dfrac{2}{5}$, $q=\dfrac{1}{3}$ (q – знаменатель прогрессии). Следовательно,

$$S=\frac{a}{1-q}=\frac{2/5}{1-1/3}=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{5};$$

данный ряд получен из гармонического ряда отбрасыванием первых десяти членов. Следовательно, он расходится;

члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$, который сходится, так как является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Следовательно, сходится и данный ряд;

так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1}=\dfrac{1}{2}\neq 0$, то ряд расходится (не выполняется необходимый признак сходимости);

применим признак Даламбера. Так как $u_n = \dfrac{10^n}{n!}$, $u_{n+1} = \dfrac{10^{n+1}}{(n+1)!}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{10}{n+1}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10}{n+1} = 0$. Так как $l = 0 < 1$, то ряд сходится;

здесь удобно применить радикальный признак Коши. Так как $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{n}{2n+1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2} < 1$, то данный ряд сходится;

здесь

$u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^2}{(n+1)^2}$, $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Так как $l = 1$, то с помощью признака Даламбера не удается решить вопрос о сходимости ряда.

Применим интегральный признак Коши: $u_n = \dfrac{1}{n^2}$; следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \ \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^b \right) = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1.$$

Несобственный интеграл сходится, поэтому сходится и данный ряд;

данный ряд знакочередующийся. Применим признак Лейбница. Так как $1 > \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{3} > \ldots$, то первое условие признака Лейбница выполнено. Далее, так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, то выполнено и второе условие. Следовательно, ряд сходится. Принимая во внимание, что в данном случае ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ совпадает с гармоническим рядом (который расходится), заключаем. Что исходный ряд сходится условно.

ЗАДАНИЯ

6.1. Написать первые пять членов ряда:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+1}{2^{n+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{10^n + n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

6.2. Найти общий член ряда:

1) $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots;$ 2) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots;$

3) $\frac{1}{2\ln 3}+\frac{2}{3\ln 4}+\frac{3}{4\ln 5}+\ldots;$ 4) $\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{3}{8}-\frac{4}{17}+\ldots$.

6.3. Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+1};$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{5n+1};$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!};$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n};$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n+3};$ 6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)3^n};$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}};$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n};$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{10n};$ 10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n;$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3};$ 12) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

6.2. Степенные ряды

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\equiv u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$, члены которого – функции от x, называется **функциональным**. Совокупность значений x, при которых функции $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$, … – определены и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится, называют **областью сходимости функционального ряда**.

Функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n \equiv a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – действительные числа, называется степенным рядом. Всякий степенной ряд сходится (и притом абсолютно) на некотором интервале $(-R; R)$. На концах интервала сходимости (в точках $x = \pm R$) степенной ряд может как сходиться (абсолютно или условно), так и расходиться. Вне интервала $[-R; R]$ ряд расходится. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда. В частных случаях радиус сходимости ряда может быть равен нулю или бесконечности. Если $R = 0$, то степенной ряд сходится лишь при $x = 0$; если же $R = \infty$, то ряд сходится абсолютно на всей числовой оси $(-\infty < x < \infty)$.

Для отыскания радиуса сходимости степенного ряда можно пользоваться одним из следующих способов:

если среди коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ нет равных нулю, то $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$;

если среди коэффициентов ряда есть равные нулю, то радиус сходимости ряда можно находить по формуле $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, в которой используются лишь значения $a_n \neq 0$ (эта формула пригодна и в первом случае).

Функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \equiv a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + {}$ $+ \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$ называется рядом по степеням $(x - a)$. Такой ряд сходится абсолютно на интервале $(a - R;\ a + R)$ и расходится вне интервала $[a - R;\ a + \mathrm{R}]$. На концах интервала (в точках $x = a \pm R$) ряд может как сходиться, так и расходиться. Число R также называется радиусом сходимости и находится указанными выше способами.

Исследовать сходимость степенного ряда означает, что:

необходимо найти радиус сходимости ряда;

исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости;

сформулировать результат исследований.

Пример 4. Исследовать сходимость степенных рядов:

$x + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + \ldots + \dfrac{1}{n}x^n + \ldots;$

$1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \ldots + \dfrac{1}{n!}x^n + \ldots;$

3) $1 + \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2}{2^2}(x-1)^2 + \dfrac{3}{2^3}(x-1)^3 + \ldots + \dfrac{n}{2^n}(x-1)^n + \ldots.$

РЕШЕНИЯ:

1) в данном случае $a_n = \dfrac{1}{n}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Найдем радиус сходимости ряда: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$. Следовательно, на интервале (–1, 1) ряд сходится абсолютно. Исследуем сходимость ряда на концах интервала, т. е.

при $x = \pm 1$. Если $x = 1$, то степенной ряд превращается в гармонический $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, который, как известно, расходится. При $x = -1$ получаем ряд $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n}+\ldots$, который является знакочередующимся и сходится, так как удовлетворяет условиям признака Лейбница. Итак, ряд сходится на интервале [–1, 1), причем абсолютно при $x \in (-1, 1)$ и условно при $x = -1$;

здесь $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$; $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1) = \infty$.
Следовательно, ряд сходится при любом значении x (на всей числовой оси);

здесь $a_n = \frac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$; $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$.
Следовательно, ряд сходится абсолютно на интервале (–1, 3).

Исследуем сходимость ряда на концах интервала. Если $x = 3$, то получаем ряд 1 + 1 + 2 + 3 + … + n + …, который расходится, так как не выполняется необходимое условие сходимости ряда ($\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$): $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$; если $x = -1$, получаем ряд 1 – 1 + 2 – 3 + 4 – 5 + …, который также расходится (не выполняется необходимое условие сходимости). Следовательно, ряд абсолютно сходится на интервале (–1, 3) и расходится при любых других значениях x.

ЗАДАНИЯ

6.4. Исследовать сходимость степенных рядов:

$$1+\frac{x}{2\cdot 3}+\frac{x^2}{3\cdot 3^2}+\frac{x^3}{4\cdot 3^3}+\ldots+\frac{x^n}{(n+1)\cdot 3^n}+\ldots;$$

$$1+x+(2x)^2+(3x)^3+\ldots+(nx)^n+\ldots;$$

$$3x+\frac{3^2\cdot x^2}{2!}+\frac{3^3\cdot x^3}{3!}+\ldots+\frac{3^n\cdot x^n}{n!}+\ldots;$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^n$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n}$; 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}$; 9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-3}{2}\right)^n$.

6.3. Разложение функций в степенные ряды

Если функция $f(x)$ дифференцируема $n+1$ раз в некоторой окрестности точки $x=x_0$, то в этой окрестности она может быть представлена в виде:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x).$$

Такое представление функции называется ***формулой Тейлора***, а $R_n(x)$ – ***остаточным членом*** формулы Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора может быть представлен следующим образом:

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где C – некоторая точка, лежащая между точками x_0 и x.

При $x_0=0$ получается ***формула Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x);$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad C\in(0,x).$$

Формулы Маклорена для некоторых функций:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x); \qquad R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_{2n}(x);$$

$$R_{2n}(x)=(-1)^n\frac{\cos C}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1};$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+R_{2n+1}(x);$$

$$R_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}\frac{\cos C}{(2n+2)!}\cdot x^{2n+2}.$$

Всякая функция, бесконечно дифференцируемая на интервале (a, b), может быть разложена на этом интервале в сходящийся к ней ***ряд Тейлора***:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots,$$

если на этом интервале выполняется условие:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0,$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора (или остаток ряда), а C – некоторая точка интервала (a, b).

При $x_0 = 0$ получается ***ряд Маклорена***:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots.$$

Приведем разложения в ряд Маклорена некоторых функций:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty,\infty);$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty,\infty);$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\qquad x\in(-\infty,\infty);$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\qquad x\in(-1,1];$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,\qquad x\in[-1,1].$$

Пример 5. Представить функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$ в виде многочлена четвертой степени относительно $x-1$.

Р Е Ш Е Н И Я. Вычислим значения функции и ее производных до четвертого порядка включительно при $x_0 = 1$:

$f(1) = 1$, $\quad f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}$, $\quad f'(1)=\frac{1}{3}$, $\quad f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$, $\quad f''(1)=-\frac{2}{9}$,

$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-8/3}$, $f'''(1)=\frac{10}{27}$, $f^{iv}(x)=-\frac{80}{81}x^{-11/3}$, $f^{iv}(1)=-\frac{80}{81}$.

Следовательно, по формуле Тейлора получим:

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27 \cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{80}{81 \cdot 4!}(x-1)^4 + R_4(x),$$

где $R_4(x) = \dfrac{f^{v}(C)}{5!}(x-1)^5 = \dfrac{880}{243 \cdot 5!} C^{-14/3}(x-1)^5$, $C \in (1, x)$.

Пример 6. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)$:

1) $f(x) = 2^x$, 2) $f(x) = e^{-x^2}$.

РЕШЕНИЯ:

1) найдем значения функции и ее производных при $x = 0$:

$f(0) = 1$, $f'(x) = 2^x \ln 2$, $f'(0) = \ln 2$, $f''(x) = 2^x \ln^2 2$, $f''(0) = \ln^2 2$, …, $f^{(n)}(x) = 2^x \ln^n 2$, $f^{(n)}(0) = \ln^n 2$.

Так как $0 < \ln 2 < 1$, то при фиксированном x имеет место неравенство $f^{(n)}(x) < 2^x$ для любого n. Следовательно, функция 2^x может быть представлена рядом Маклорена:

$$2^x = 1 + x\ln 2 + \frac{1}{2!}x^2 \ln^2 2 + \frac{1}{3!}x^3 \ln^3 2 + \ldots,\ x \in (-\infty, \infty);$$

в разложении $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + \dfrac{1}{3!}x^3 + \ldots$, $x \in (-\infty, \infty)$ заменим x на $-x^2$, получим:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 - \frac{1}{5!}x^{10} \ldots,\ \ x \in (-\infty, \infty).$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^a e^{-x^2} dx$.

РЕШЕНИЯ. Известно, что первообразная от e^{-x^2} не является элементарной функцией. Поэтому для нахождения указанного интеграла разложим в ряд подынтегральную функцию:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 - \frac{1}{5!}x^{10} \ldots.$$

Проинтегрируем обе части этого равенства от 0 до a.

Получим: $\displaystyle\int_0^a e^{-x^2} dx = \int_0^a \left(1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 \ldots\right) dx =$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \ldots \right)\Bigg|_0^a = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{2! \cdot 5} - \frac{a^7}{3! \cdot 7} + \ldots.$$

При помощи этого равенства можно вычислить указанный интеграл с любой точностью при любом значении a.

ЗАДАНИЯ

6.5. Представить функцию $f(x)$ в виде многочлена пятой степени относительно x:

1) $f(x)=\sqrt{x-1}$; 2) $f(x)=3^x$.

6.6. Разложить в ряд по степеням x функции:

1) $\sin 2x$; 2) e^{3x}; 3) $\dfrac{1}{1-x}$; 4) $\operatorname{arctg} x^2$.

6.7. Разложить в ряд по степеням $x-1$ функции:

1) $\ln x$; 2) $\dfrac{1}{x}$; 3) x^5; 4) $x^4+2x^3-5x^2+6x-1$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Некоторые постоянные

$\pi = 3{,}14159$; $e = 2{,}71828$; $\ln\pi = 1{,}14473$;

$\pi^2 = 9{,}8696$; $e^2 = 7{,}3891$; $\sqrt{2} = 1{,}41421$;

$\sqrt{\pi} = 1{,}77245$; $\sqrt{e} = 1{,}64872$; $\sqrt{3} = 1{,}73205$.

$\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$; $\frac{1}{e} = 0{,}36788$;

Основные алгебраические формулы

$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$; $a^b : a^c = a^{b-c}$;

$(a^b)^c = a^{bc}$; $\sqrt[n]{a^b} = a^{\frac{b}{n}}$; $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$;

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a - b = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right);$$

$$a - b = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}\right);$$

$$a + b = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b^2}\right).$$

Корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Разложение квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Арифметическая прогрессия:

$a_{n+1} = a_n + d$ (определение арифметической прогрессии),

$a_n = a_1 + d(n-1)$ (формула n-го члена),

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ (формула суммы первых n членов).

Геометрическая прогрессия:

$b_{n+1} = b_n q$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$ (определение геометрической прогрессии),

$b_n = b_1 q^{n-1}$ (формула n-го члена),

$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ (формула суммы первых n членов),

$S = \frac{b_1}{1-q}$ (формула суммы бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$).

$a^{\log_a b} = b$ $(0 < a \neq 1,\ b > 0)$; $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$;

$\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$; $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

$\log_a b^c = c \cdot \log_a b$;

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ $(0 < c \neq 1)$ (формула перехода к новому основанию).

Основные тригонометрические формулы

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1$;

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;

$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$;

$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; $\qquad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$;

$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$; $\qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$;

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right);$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right).$$

Знаки тригонометрических функций по четвертям

Функция / Четверть	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
I	+	+	+	+
II	+	–	–	–
III	–	–	+	+
IV	–	+	–	–

Некоторые значения тригонометрических функций

Аргумент \ Функция	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
0	0	1	0	–
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	–	0
π	0	-1	0	–

Формулы приведения

Аргумент \ Функция	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{ctg}\, x$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$

Основные формулы дифференциального исчисления

Производная: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Основные правила дифференцирования

Если c – постоянная, а $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, то:

1) $c' = 0$; 2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 3) $(cu)' = cu'$;

4) $(uv)' = u'v + uv'$; 5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$;

6) $\left(f\left(u(x)\right)\right)' = f'_u \cdot u'_x$.

Основные формулы дифференцирования (u – функция от x)

1) $\left(u^a\right)' = au^{a-1} \cdot u'$; в частности: $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$; $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.

2) $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$; в частности: $\left(e^u\right)' = e^u u'$;

3) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$; в частности: $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$;

4) $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$; 5) $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$; 6) $\left(\operatorname{tg} u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

7) $\left(\operatorname{ctg}\, u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$; 8) $\left(\arcsin\, u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

9) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$; 10) $\left(\operatorname{arctg} u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

11) $\left(\operatorname{arcctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

Основные формулы интегрального исчисления

Неопределенный интеграл

$\int f(x)dx = F(x) + C$, $F'(x) = f(x)$.

Свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования)

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.
5. $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.
6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ (если $\alpha \neq -1$).
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln|\varphi(x)| + C$.
5. $\int e^x dx = e^x + C$.
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
8. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.
10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$.
11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}.$

15. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}.$

16. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C \end{cases}.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

18. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайленко, В. Г., Свищева, Е. В. и Петрова, А. Ю. (2017). *Высшая математика. Математический анализ*. Харьков: Изд-во НУА, 156 с.

2. Алілуйко, А. М., Дзюбановська, Н. В. та Лесик, О. Ф. (2017). *Вища математика у прикладах та задачах для економістів.* Тернопіль: ТНЕУ, 148 с.

3. Барковський, В. В., Барковська, Н. В. (2019). *Вища математика для економістів.* Київ: ЦУЛ, 448 с.

4. Васильченко, І. П. (2020). *Вища математика для економістів. Основні розділи.* Київ: Кондор, 608 с.

5. Зайцев Є. П. (2018). *Вища математика: інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних, звичайні диференціальні рівняння, ряди.* Київ: Алерта, 608 с.

6. Клепко, В. Ю., Голець, В. Л. (2019). *Вища математика в прикладах і задачах*. Київ: ЦУЛ, 594 с.

7. Козира, В. М. (2016). *Елементарна та вища математика*. Тернопіль: Астон, 166 с.

8. Литвин, І. І., Конончук, О. М. та Желізняк, Г. О. (2019). *Вища математика*. Київ: ЦУЛ, 368 с.

9. Приймак, В. І. (2017). *Математичні методи економічного аналізу.* Київ: ЦУЛ, 296 с.

10. Фортуна, В. В., Бескровний, О. І. (2016). *Вища та прикладна математика*. Львів: Магнолія-2006, 647 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

Серія «МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ»

МИХАЙЛЕНКО Віталій Григорович
СВІЩОВА Євгенія Віталіївна
ПЕТРОВА Анжела Юріївна

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник
для самостійного вивчення дисципліни

(російською мовою)

В авторській редакції
Комп'ютерний набір і верстка *Є. В. Свіщова*

Підписано до друку 01.03.2021. Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Гарнітура «Таймс».
Умов. друк. арк. 7,67. Обл.-вид. арк. 6,82.
Тираж 50 пр. Зам №

План 2020/21 навч. р., поз. № 2 в переліку робіт кафедри.

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво № 1153 від 16.12.2002.

Надруковано у видавництві Народної української академії

Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Лермонтовська, 27.