НАРОДНАЯ УКРАИНСКАЯ АКАДЕМИЯ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ 3

Издательство НУА

НАРОДНАЯ УКРАИНСКАЯ АКАДЕМИЯ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ 3

Учебное пособие
для слушателей Центра довузовской подготовки

Харьков
Издательство НУА
2013

УДК 51(075.4+076.1)
ББК 22.1я 727-4
С23

Утверждено на заседании
кафедры информационных технологий и математики
Народной украинской академии
Протокол № 6 от 12.01.2009

Составители: *С. В. Михайленко, Е. В. Свищева*

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. *А. А. Дубровин*
(ХНУ им. В. Н. Каразина)

С 23 **Сборник** задач по математике : учеб. пособие для слушателей Центра довуз. подгот. / Нар. укр. акад., [каф. информ. технологий и математики; сост.: С. В. Михайленко, Е. В. Свищева]. – Х., 2013. – Ч. 3. – 40 с.

Цель учебного пособия – помочь слушателям ЦДП подготовиться к тестированию по математике и к успешному изучению данного предмета в Харьковском гуманитарном университете «Народная украинская академия». Пособие охватывает следующие разделы элементарной математики: тригонометрические функции; формулы тригонометрии и их использование для тождественных преобразований тригонометрических выражений, обратные тригонометрические функции; решение некоторых тригонометрических уравнений.

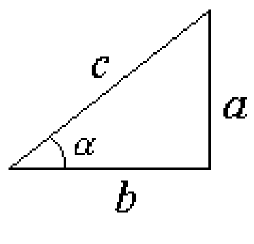
Мета навчального посібника – допомогти слухачам ЦДП підготуватися до тестування з математики і до успішного вивчення цього предмету в Харківському гуманітарному університеті «Народна українська академія». Посібник охоплює такі розділи елементарної математики: тригонометричні функції; формули тригонометрії та їх застосування для тотожних перетворень тригонометричних виразів; обернені тригонометричні функції; розв’язання деяких тригонометричних рівнянь.

УДК 51(075.4+076.1)
ББК 22.1я 727-4

13. Формулы тригонометрии. Преобразование тригонометрических выражений

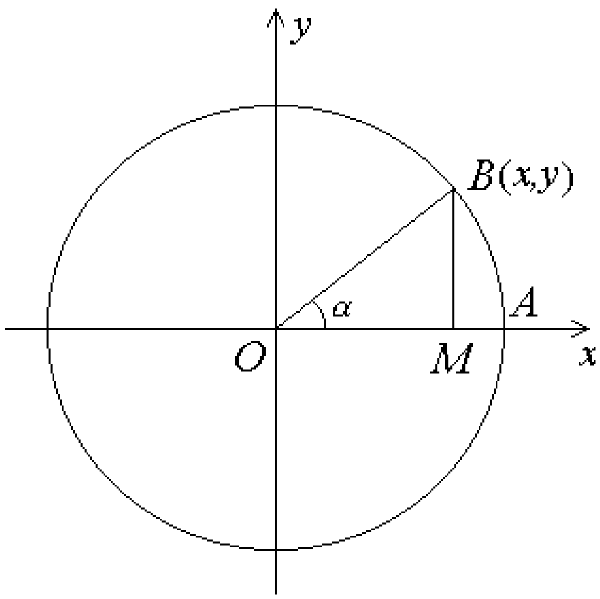
13.1. Определение тригонометрических функций

Если α – острый угол прямоугольного треугольника, то тригонометрические функции угла α определяются следующим образом:



$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$



Возьмем круг радиуса R и проведем в нем два взаимно перпендикулярных диаметра – горизонтальный и вертикальный. По первому из них направим ось абсцисс, а по второму – ось ординат. Повернем начальный радиус OA вокруг точки O на угол α. Отрезок OA перейдет при этом в радиус OB. Отсчет углов будем вести в обоих направлениях от положительной полуоси абсцисс. Если радиус OA будем вращать вокруг точки O против часовой стрелки, то он будет образовывать с Ox положительные углы. Если же радиус OA вращать вокруг точки O по часовой стрелке, будем получать отрицательные углы. Измерение углов осуществляется в градусной и радианной мере.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' \qquad (\pi \approx 3{,}1416).$$

Если угол содержит α радиан, то его градусное измерение a можно найти по формуле: $a = \dfrac{180}{\pi} \cdot \alpha$.

Радианную меру α по известной градусной мере a находим по формуле: $\alpha = \dfrac{\pi}{180} \cdot a$.

Пусть α – произвольный угол поворота и пусть точка B имеет координаты $OM = x$ и $BM = y$. Тригонометрические функции любого угла α определяются следующим образом:

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}; \qquad \cos\alpha = \frac{x}{R}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Отношения $\frac{y}{R}$, $\frac{x}{R}$ не зависят от радиуса окружности R, а зависят только от угла α. Если $R = 1$, получаем:

$\sin\alpha = y; \qquad \cos\alpha = x.$

Для $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ соотношения остаются прежними.

Отметим, что в силу определения синуса и косинуса для любого угла α справедливы неравенства: $|\sin\alpha| \le 1$ и $|\cos\alpha| \le 1$.

Приведем таблицу значений тригонометрических функций некоторых углов:

Функция	**Аргумент** α						
	0° (0 рад)	$30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^\circ\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$90^\circ\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$180^\circ(\pi)$	$270^\circ\left(\frac{3}{2}\pi\right)$
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	–1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	–1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.
$\operatorname{ctg}\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	не сущ.	0

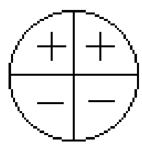
Рассмотрим основные свойства тригонометрических функций и их графики.

$$y = \sin x$$

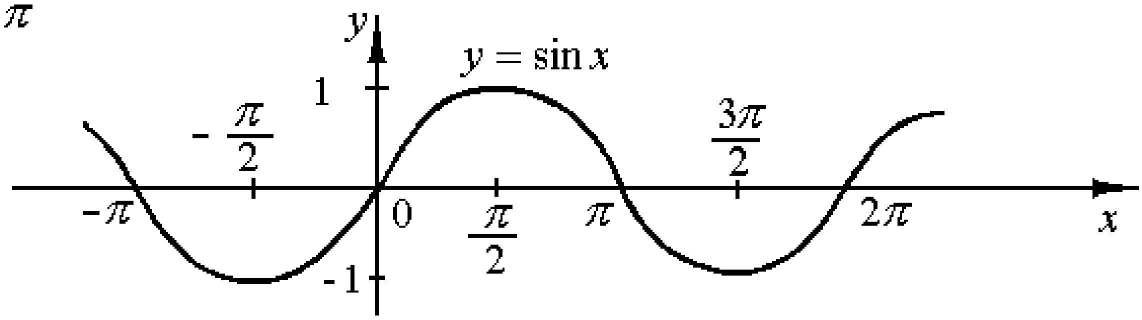
1) область определения – множество всех действительных чисел, т. е. $x \in (-\infty, \infty)$;
2) область значений: $y \in [-1;1]$;
3) функция нечетная, т. е. $\sin(-x) = -\sin x$.

   График функции $y = \sin x$ симметричен относительно начала координат;
4) функция периодическая с периодом $T = 2\pi$, т. е.

   $\sin(x + 2\pi) = \sin x$; $\sin(x + 2\pi \cdot k) = \sin x$, где k – любое целое число;
5) знак $\sin x$ по четвертям:



Графиком функции $y = \sin x$ является кривая, которая называется синусоидой.



$$y = \cos x$$

1) область определения: $x \in (-\infty, \infty)$;

2) область значений: $y \in [-1; 1]$;

3) функция четная, т. е. $\cos(-x) = \cos x$.

   График функции $y = \cos x$ симметричен относительно оси Оу;

4) функция периодическая с периодом $T = 2\pi$;

5) знаки $\cos x$ по четвертям:

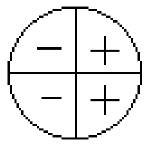
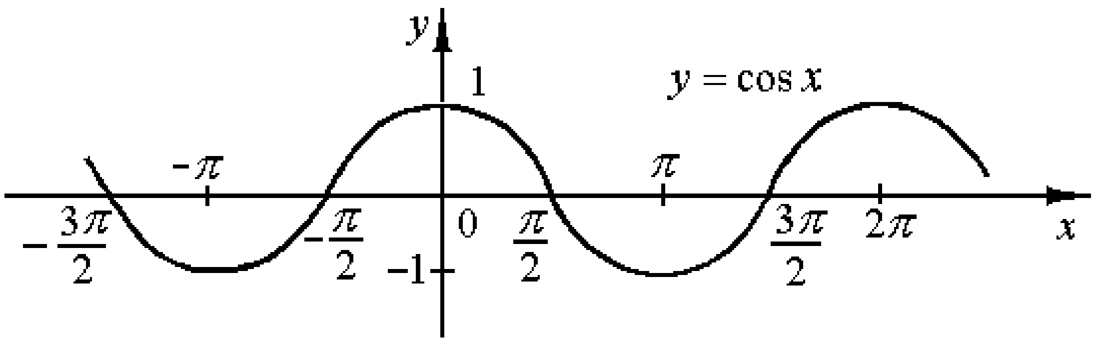


График функции $y = \cos x$ получается параллельным переносом графика функции $y = \sin x$ вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{2}$ влево.



$$y = \mathrm{tg}\, x, \quad y = \mathrm{ctg}\, x$$

1) область определения функции $y = \mathrm{tg}\, x$: $\quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$;

   область определения функции $y = \mathrm{ctg}\, x$: $\quad x \neq \pi n, \quad n \in Z$;

2) область значений обеих функций: $y \in (-\infty, \infty)$;

3) функции нечетные, т. е. $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$; $\quad \mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$;

4) функции периодические с периодом $T = \pi$;

5) знаки $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$ по четвертям:

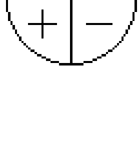


График функции $y = \operatorname{tg} x$:

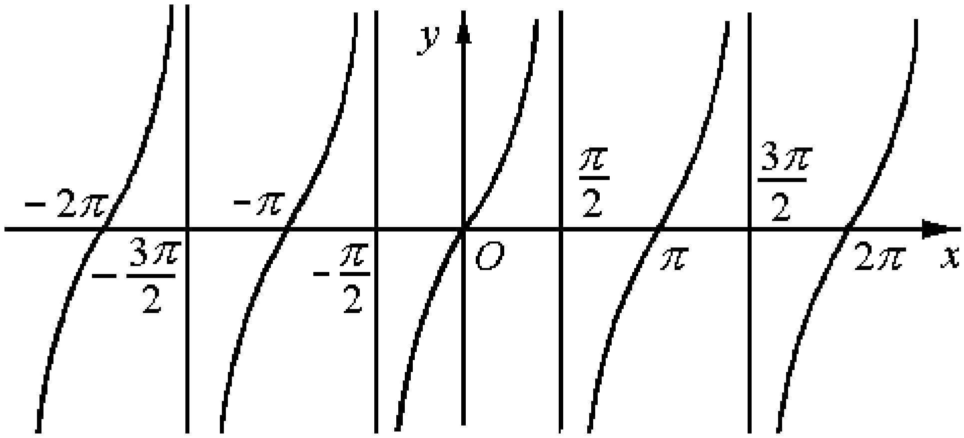
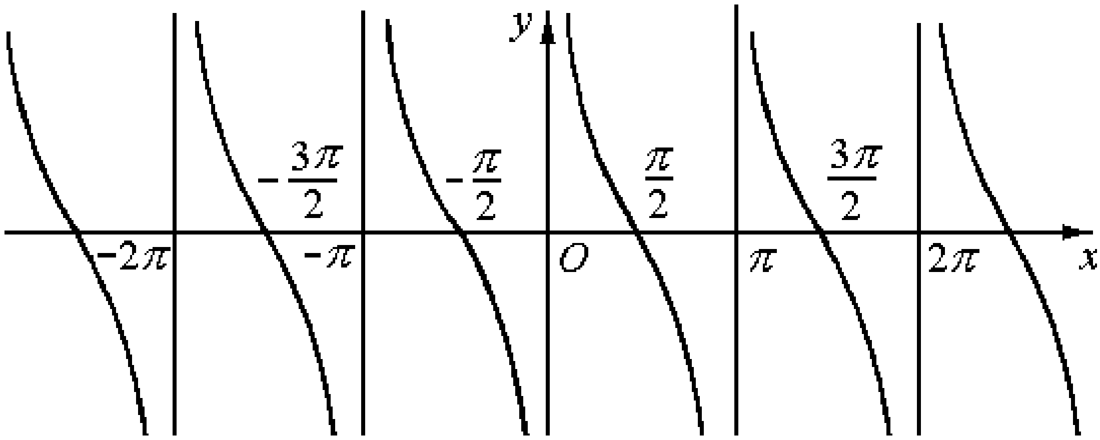


График функции $y = \operatorname{ctg} x$:



120. 1) Найти радианную меру угла, равного 135°;

2) выразить в градусах угол в $\frac{\pi}{18}$ радиан;

3) определить знак выражения $\cos 100^\circ \cdot \sin 510^\circ \cdot \operatorname{tg} 205^\circ$.

Решение.

1) $135^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 135 = \frac{3}{4}\pi$;

2) $\frac{\pi}{18} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{18} = 10^\circ$;

3) $90^\circ < 100^\circ < 180^\circ$, поэтому $\cos 100^\circ < 0$.

Функция $\sin x$ периодическая с периодом $2\pi = 360^\circ$, поэтому $\sin 510^\circ = \sin(360^\circ + 150^\circ) = \sin 150^\circ > 0$, т. к. $\sin x$ во второй четверти принимает положительные значения.

$\operatorname{tg} 205^\circ > 0$, т. к. $180^\circ < 205^\circ < 270^\circ$ (третья четверть). Учитывая знаки множителей, получаем $\cos 100^\circ \cdot \sin 510^\circ \cdot \operatorname{tg} 205^\circ < 0$.

121. Найти радианную меру угла, равного:

1) 36°; 2) 225°; 3) 300°; 4) 108°;

5) 210°; 6) 330°; 7) 315°; 8) 72°.

122. Найти в градусах углы, заданные в радианной мере:

1) $\frac{5}{6}\pi$; 2) $\frac{5}{4}\pi$; 3) $\frac{7}{4}\pi$; 4) $\frac{7}{6}\pi$;

5) $\frac{2}{3}\pi$; 6) 5π; 7) $3{,}5\pi$; 8) $\frac{4}{3}\pi$.

123. Определить знаки значений всех тригонометрических функций следующих углов:

1) 110°; 2) 220°; 3) 750°; 4) -135°;

5) $\frac{11}{6}\pi$; 6) $\frac{2}{3}\pi$; 7) $-\frac{\pi}{6}$; 8) $-\frac{7}{6}\pi$.

124. Определить знаки тригонометрических функций:

1) $\sin 130^\circ$; 2) $\cos 210^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 300^\circ$;

4) $\cos 100^\circ$; 5) $\operatorname{ctg} 200^\circ$; 6) $\sin 340^\circ$;

7) $\operatorname{tg} 140^\circ$; 8) $\sin 220^\circ$ 9) $\operatorname{ctg} 290^\circ$.

125. Определить знаки следующих выражений:

1) $\sin 200^\circ \cdot \cos 500^\circ$; 2) $\operatorname{tg} 400^\circ \cdot \sin 110^\circ$;

3) $\operatorname{ctg} 70^\circ \cdot \sin 230^\circ \cdot \cos 105^\circ$; 4) $\cos 290^\circ \cdot \sin 215^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ$;

5) $\sin\frac{5}{6}\pi \cdot \operatorname{tg}\frac{5}{4}\pi \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; 6) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{10}\right) \cdot \cos\frac{7}{6}\pi \cdot \sin\frac{7}{3}\pi$;

7) $\operatorname{tg} 4{,}1\pi \cdot \cos\frac{8\pi}{3} \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 8) $\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right) \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) \cdot \operatorname{ctg}\frac{2}{3}\pi$.

126. Вычислить:

1) $\operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \cos 180^\circ$; 2) $\sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$;

3) $5\cos 0^\circ + 3\sin 270^\circ + 2\sin 90^\circ$; 4) $5\sin 180^\circ + 4\cos 360^\circ + 2\operatorname{tg}^2 60^\circ$;

5) $6\sin\frac{\pi}{2} - 3\cos\frac{\pi}{2} + 5\operatorname{tg} 2\pi$; 6) $2\sin^2\frac{\pi}{6}\left(2\cos^2\frac{\pi}{4} + 1\right)$;

7) $\cos^2\frac{\pi}{3}\left(8\sin^2\frac{\pi}{3} + 2\right)$; 8) $6\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{4} - 4\sin^2\frac{\pi}{4}$.

127. Определить наибольшее и наименьшее значение функции:

1) $y = 5 + 2\sin x$; 2) $y = 7\sin x - 1$;

3) $y = 3 - 2\cos x$; 4) $y = 3\cos x - 8$.

13.2. Связь между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

Между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента существуют следующие соотношения, которые называются основными тригонометрическими тождествами:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1; \qquad 1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}; \qquad 1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Эти тождества позволяют по значению одной тригонометрической функции угла α найти значения всех тригонометрических функций этого угла. Используются они также при тождественных преобразованиях тригонометрических выражений и доказательстве различных тригонометрических тождеств.

128. Вычислить $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$.

Решение.

Из тождества $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ находим, что $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Так как $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$, то $\sin\alpha<0$. Таким образом, $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Подставляя $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, получаем $\sin\alpha=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}$. Зная $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, находим $\operatorname{tg}\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$.

По значению $\operatorname{tg}\alpha$ из тождества $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ находим $\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$.

129. Определить значения тригонометрических функций угла α, если:

1) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

2) $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$ и $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

3) $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ и $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$;

4) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

6) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

7) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

8) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{15}{8}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

9) $\cos\alpha = -\frac{5}{6}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

10) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

11) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;

12) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

130. Могут ли иметь место следующие равенства для одного и того же аргумента?

1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$;

2) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$;

3) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$;

4) $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$, $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$;

5) $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$;

6) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{2}$;

7) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$;

8) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$;

9) $\operatorname{ctg}\alpha = -3$, $\sin\alpha = \frac{2}{3}$;

10) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$.

131. Вычислить:

1) $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\cos\alpha - 5\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3$;

2) $\frac{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 2$;

3) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$;

4) $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$;

5) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$;

6) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 4$.

132. Упростить выражения:

1) $\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha-1$; 2) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+2\sin\alpha\cos\alpha$;

3) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; 4) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

5) $\sin^2\alpha-\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$; 6) $\dfrac{\cos^2\alpha-1}{\sin^4\alpha}+\mathrm{ctg}^2\,\alpha$;

7) $\dfrac{1+\mathrm{tg}^4\,\alpha}{\mathrm{tg}^2\,\alpha+\mathrm{ctg}^2\,\alpha}$; 8) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\cos\alpha$;

9) $\dfrac{\cos^2\alpha-\mathrm{ctg}^2\,\alpha}{\sin^2\alpha-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$; 10) $\dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}+\dfrac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\,\alpha}$;

11) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}\cdot\dfrac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$; 12) $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

13) $\dfrac{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$; 14) $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)+\cos^2\alpha(1-\mathrm{tg}\,\alpha)}$;

15) $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)+\cos^2\alpha(1+\mathrm{tg}\,\alpha)}$; 16) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

133. Доказать тождества:

1) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}=1$;

2) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\mathrm{ctg}\,\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$;

3) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$;

4) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta}=\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta$;

5) $\mathrm{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \mathrm{ctg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$;

6) $\dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{\left(1+\mathrm{ctg}^2\alpha\right)} \cdot \dfrac{\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)}{\mathrm{tg}^2\alpha} = \dfrac{1+\mathrm{ctg}^4\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha}$;

7) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha$;

8) $\dfrac{\left(\mathrm{tg}\,\alpha + \cos^{-1}\alpha\right)\left(\cos\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)}{\left(\cos\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha\right)\left(\mathrm{tg}\,\alpha - \cos^{-1}\alpha\right)} = 1$;

9) $\left(1+\cos^{-1}\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha\right)\left(1-\cos^{-1}\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha\right) = 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$;

10) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \cos^{-1}\alpha}{\cos\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha\cos^{-1}\alpha$;

11) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.

13.3. Формулы сложения аргументов. Формулы двойного аргумента

К формулам сложения относятся формулы, позволяющие по значениям тригонометрических функций углов α и β находить тригонометрические функции углов $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулы для $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ справедливы, если $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+m\pi$ (n, k, m – целые числа).

Формулы двойного аргумента получаются из формул сложения для $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если положить $\beta=\alpha$:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha; \quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha; \quad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

К формуле для $\cos 2\alpha$ присоединим тождество $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$:

$$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\\ \cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha.\end{cases}$$

Складывая эти равенства и вычитая из первого равенства второе, получим формулы:

$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha; \qquad 1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha.$$

134. Вычислить:

1) $\sin 75^\circ$; 2) $\dfrac{\sin 80^\circ\cdot\cos 20^\circ-\cos 80^\circ\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ\cos 20^\circ-\sin 10^\circ\sin 20^\circ}$;

3) $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$ и α – угол третьей четверти, а $\cos\beta=-\frac{12}{13}$ и β – угол второй четверти.

Решение:

1) представим 75° в таком виде: $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$.

Тогда $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4};$$

2) преобразуем числитель:

$$\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ = \sin(80^\circ - 20^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Преобразуем знаменатель:

$$\cos 10^\circ \cos 20^\circ - \sin 10^\circ \sin 20^\circ = \cos(10^\circ + 20^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда рассматриваемое выражение равно $\dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 30^\circ} = 1$.

3) Для нахождения $\sin(\alpha + \beta)$ необходимо знать, кроме заданных $\sin\alpha$ и $\cos\beta$, еще и $\cos\alpha$, $\sin\beta$. $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. По условию α – угол третьей четверти, поэтому $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\dfrac{4}{5}$. Находим $\sin\beta$. Так как β – угол второй четверти, то $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \dfrac{5}{13}$.

Тогда $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta =$

$$= -\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{36-20}{65} = \frac{16}{65}.$$

135. Упростить выражение: $\dfrac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta} + \dfrac{2\cos 4\beta}{\sin 2\beta - \cos 2\beta}$.

Решение: Используя формулы двойного аргумента, получаем:

$\sin 4\beta = 2\sin 2\beta \cos 2\beta$; $\cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta$.

Тогда:

$$\frac{\sin 4\beta}{\cos 2\beta} + \frac{2\cos 4\beta}{\sin 2\beta - \cos 2\beta} = \frac{2\sin 2\beta \cos 2\beta}{\cos 2\beta} + \frac{2(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta)}{\sin 2\beta - \cos 2\beta} =$$

$$= 2\sin 2\beta - \frac{2(\cos 2\beta - \sin 2\beta)(\cos 2\beta + \sin 2\beta)}{(\cos 2\beta - \sin 2\beta)} =$$

$$= 2\sin 2\beta - 2(\cos 2\beta + \sin 2\beta) = 2\sin 2\beta - 2\cos 2\beta - 2\sin 2\beta = -2\cos 2\beta.$$

136. Вычислить:

1) $\sin 15^\circ$; 2) $\sin 105^\circ$; 3) $\cos 105^\circ$;

4) $\cos 15^\circ$; 5) $\cos 75^\circ$; 6) $\operatorname{tg} 15^\circ$;

7) $\operatorname{tg} 75^\circ$; 8) $\operatorname{tg} 105^\circ$; 9) $\operatorname{ctg} 75^\circ$.

137. Вычислить:

1) $\cos 11^\circ \cos 49^\circ - \sin 371^\circ \sin 49^\circ$;

2) $\sin 32^\circ \cos 2^\circ - \cos 32^\circ \sin 2^\circ$;

3) $\cos 28^\circ \sin 422^\circ + \sin 28^\circ \cos 62^\circ$;

4) $\cos 57^\circ \cos 12^\circ + \sin 57^\circ \sin 372^\circ$;

5) $\dfrac{\cos 400^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ}{\sin 90^\circ \cos 30^\circ + \cos 90^\circ \sin 30^\circ}$;

6) $\dfrac{\sin 10^\circ \cos 5^\circ - \sin 5^\circ \cos 10^\circ}{\sin 45^\circ \cos 40^\circ - \sin 40^\circ \cos 45^\circ}$;

7) $\dfrac{\cos 0{,}3\pi \cdot \sin 0{,}2\pi - \cos 0{,}2\pi \cdot \sin 0{,}3\pi}{\sin \frac{41\pi}{10}}$;

8) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{17\pi}{16} + \operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{16}\operatorname{tg}\frac{19\pi}{16}}$; 9) $\dfrac{1 + \operatorname{tg} 53^\circ \cdot \operatorname{tg} 23^\circ}{\operatorname{tg} 53^\circ - \operatorname{tg} 23^\circ}$;

10) $\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$;

11) $2\sin\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{24}\left(\cos^2\dfrac{\pi}{24} - \sin^2\dfrac{\pi}{24}\right)$.

138. Вычислить: $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если:

1) $\sin\alpha = \dfrac{8}{17}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\cos\beta = \dfrac{3}{5}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}, \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi; \qquad \cos\beta = -\frac{5}{13}, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi;$

3) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}, \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi; \qquad \cos\beta = \frac{4}{5}, \quad \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi;$

4) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}, \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi; \qquad \operatorname{tg}\beta = -\frac{12}{5}, \quad \frac{\pi}{2} < \beta < \pi;$

5) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \qquad \operatorname{tg}\beta = -\frac{4}{3}, \quad \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi.$

139. Вычислить $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, если

1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right);$ 2) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}, \quad \alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right);$

3) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right);$ 4) $\cos\alpha = \frac{8}{17}, \quad \alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right);$

5) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}, \quad \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right);$ 6) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}, \quad \alpha \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right).$

140. Упростить выражения:

1) $\frac{\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta) + \sin\beta\cos\alpha};$ 2) $\frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)};$

3) $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\alpha;$ 4) $\sqrt{3}\cos\alpha - 2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right);$

5) $\sin\left(\alpha + 45^\circ\right)\cos\left(45^\circ - \alpha\right) + \cos\left(\alpha + 45^\circ\right)\sin\left(45^\circ - \alpha\right);$

6) $\frac{2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - 2\sin\alpha\sin\beta};$ 7) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)} + \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)};$

8) $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\beta};$ 9) $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha;$

10) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} + \frac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\alpha - 1;$

11) $\dfrac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha+\sin^2 3\alpha}$;

12) $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}+\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

13) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}$;

14) $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\operatorname{ctg}^2 2\alpha$;

15) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)\cdot\sin 2\alpha$;

16) $\dfrac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+0{,}5\sin 2\alpha}$;

17) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\cdot\dfrac{3}{\cos 2\alpha}$.

141. Доказать тождества:

1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta$;

2) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\operatorname{tg}x$;

3) $\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta}=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta$;

4) $\sqrt{2}\left(\sin^4\dfrac{\pi}{8}-\cos^4\dfrac{\pi}{8}\right)=-1$;

5) $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$;

6) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}=\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha$;

7) $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha=-1$.

142. Вычислить:

1) $\sin\alpha$, если $\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}=0{,}7;$

2) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{3};$

3) $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$, если $\sin x\cdot\cos x=0{,}4$ и $x\in\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right);$

4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$, если $\operatorname{tg}x=2;$

5) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12};$

6) $\cos 15^\circ-\sin 15^\circ.$

13.4. Формулы приведения

Формулами приведения называются соотношения, при помощи которых тригонометрические функции углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3}{2}\pi\pm\alpha$ выражаются через тригонометрические функции угла α. Для получения формул приведения используют следующие два правила:

1) если α откладывается от горизонтального диаметра $(\pi\pm\alpha)$, то наименование приводимой функции не меняется; если же α откладывается от вертикального диаметра $\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\ \frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)$, то наименование приводимой функции заменяется на сходное (синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот);
2) определяем четверть, которой принадлежит аргумент приводимой функции $\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\ \pi\pm\alpha,\ \frac{3}{2}\pi\pm\alpha\right)$, считая при этом α острым углом. Какой знак (+ или –) имеет проводимая функция в этой четверти, такой знак ставится и перед функцией аргумента α в правой части.

Рассмотрим примеры.

Пусть требуется упростить $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$. Так как угол α откладывается от вертикального диаметра, то в правой части будет $\cos\alpha$. Угол $\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$ принадлежит четвертой четверти. Синус в четвертой четверти принимает отрицательные значения. Следовательно, в правой части формулы перед $\cos\alpha$ ставим знак – . Таким образом, $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)=-\cos\alpha$.

Аналогично $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$; $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$; $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$.

143. Привести к тригонометричной функции угла α:

1) $\cos(\pi+\alpha)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$; 5) $\sin(\pi-\alpha)$; 6) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

7) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 8) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 9) $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)$;

10) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$; 11) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$; 12) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$.

144. Вычислить:

1) $\sin\frac{5}{4}\pi$; 2) $\cos\frac{11}{6}\pi$; 3) $\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi$;

4) $\sin\frac{9}{4}\pi$; 5) $\cos\frac{13}{3}\pi$; 6) $\operatorname{tg}\frac{8}{3}\pi$;

7) $\sin\frac{10}{3}\pi$; 8) $\sin\frac{5}{6}\pi$; 9) $\operatorname{ctg}\frac{4}{3}\pi$;

10) $\cos\left(-225^{\circ}\right)$; 11) $\operatorname{tg} 300^{\circ}$; 12) $\sin\left(-120^{\circ}\right)$;

13) $\cos 330^{\circ}$; 14) $\sin 315^{\circ}$; 15) $\cos 840^{\circ}$.

145. Упростить выражения:

1) $\sin^2(\pi-\alpha)+\cos^2(\pi+\alpha)$; 2) $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos^2(\pi-\alpha)}+1$;

3) $\operatorname{tg}^2(2\pi-\alpha)\cdot\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 4) $\sin(\pi-\alpha)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

5) $\operatorname{tg}(540^{\circ}+\alpha)+\operatorname{ctg}(270^{\circ}+\alpha)$; 6) $(1+\sin(\pi+\alpha))\cdot\left(1+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)$;

7) $\sin 391^{\circ}\cdot\cos 749^{\circ}+\sin 151^{\circ}\cdot\cos(-31^{\circ})$;

8) $\dfrac{\sin^2(\pi+2\alpha)+\cos(7\pi-4\alpha)+\cos^2(\pi-2\alpha)}{1-\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-4\alpha\right)}$;

9) $\dfrac{\cos 10^{\circ}+\cos 419^{\circ}\cdot\cos 31^{\circ}-\sin 31^{\circ}\cdot\sin 779^{\circ}}{\sin 80^{\circ}}$;

10) $\dfrac{\cos^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cdot\sin(\alpha-\pi)}{\sin^3\left(\alpha-\dfrac{7\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}$;

11) $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{tg}^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\mathrm{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

12) $\dfrac{\sin^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin^2(\alpha-\pi)}{\mathrm{ctg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)+1}$;

13) $\dfrac{\cos^3\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin^3\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{-\mathrm{tg}\left(-\dfrac{5}{4}\pi\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\alpha-\pi)}$;

14) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\,300°-2\sin^2(-225°)-\mathrm{tg}(-315°)}{-\cos 240°+\sin(-930°)}$;

15) $\dfrac{2\cos^2\dfrac{13\pi}{4}-2\,\mathrm{tg}\dfrac{16\pi}{3}\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}}{-4\,\mathrm{ctg}^2\dfrac{11\pi}{4}\cdot\sin^2\dfrac{29\pi}{6}}$;

16) $\dfrac{4\sin^2(\alpha-5\pi)-\sin^2(2\alpha+\pi)}{\cos^2\left(2\alpha-\dfrac{3}{2}\pi\right)-4+4\sin^2\alpha}$;

17) $\dfrac{\mathrm{ctg}(270°-\alpha)}{1-\mathrm{tg}^2\,(\alpha-180°)}\cdot\dfrac{\mathrm{ctg}^2(360°-\alpha)-1}{\mathrm{ctg}\,(180°+\alpha)}$.

13.5. Формулы половинного аргумента

Формулы половинного аргумента – это формулы, выражающие тригонометрические функции угла $\dfrac{\alpha}{2}$ через тригонометрические функции угла α:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\qquad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

В этих формулах знак выбирается в зависимости от того, в какой четверти находится угол $\dfrac{\alpha}{2}$.

146. Найти $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$ и $\dfrac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi.$

<u>Решение.</u>

Находим значение $\cos\alpha$, используя формулу $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. По условию $\dfrac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$, поэтому $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{4}{5}.$

Определяем, в какой четверти находится угол $\dfrac{\alpha}{2}$: $\qquad \dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{\alpha}{2}<\pi$.

Угол $\dfrac{\alpha}{2}$ находится во второй четверти, поэтому получаем:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}};\quad \cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\frac{3}{\sqrt{10}};\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=-\frac{1}{3}.$$

147. Найти $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если

1) $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi;$ 2) $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ и $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2};$

3) $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi;$ 4) $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{4}{3}$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3}{2}\pi;$

5) $\mathrm{tg}\alpha=-\dfrac{3}{4}$ и $\dfrac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi.$

13.6. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

Сумма и разность тригонометрических функций преобразуются в произведение по следующим формулам:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \left(\alpha,\, \beta \ne \frac{\pi}{2} + \pi n\right);$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad \left(\alpha,\, \beta \ne \frac{\pi}{2} + \pi n\right).$$

Произведение тригонометрических функций преобразуется в сумму по следующим формулам:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right);$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right);$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right).$$

148. Упростить выражения:

1) $\dfrac{\sin\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}$; 2) $2\sin 3\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha$.

Решение: 1) $\dfrac{\sin\alpha - 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha - 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \dfrac{(\sin\alpha + \sin 3\alpha) - 2\sin 2\alpha}{(\cos\alpha + \cos 3\alpha) - 2\cos 2\alpha} =$

$$= \frac{2\sin 2\alpha\cos\alpha - 2\sin 2\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha - 2\cos 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha(\cos\alpha - 1)}{2\cos 2\alpha(\cos\alpha - 1)} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha;$$

2) преобразуем произведение тригонометрических функций в сумму:

$$2\sin 3\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}\left(\sin(3\alpha-\alpha)+\sin(3\alpha+\alpha)\right) = \sin 2\alpha + \sin 4\alpha.$$

Тогда $2\sin 3\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha = \sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 2\alpha = \sin 4\alpha$.

149. Упростить выражения:

1) $\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;

2) $\sin 2\alpha + \cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$;

3) $\cos 5\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

4) $\cos\left(\frac{2}{3}\pi+\alpha\right)+\cos\alpha$;

5) $\sin 3x + \sin 10x + \sin 7x$;

6) $\sin 2x + \sin 6x + \sin 4x$;

7) $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+4\alpha\right)+\sin(3\pi-8\alpha)-\sin(4\pi-12\alpha)$;

8) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha$;

9) $\sin 4\alpha + \sin 10\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha$;

10) $2\cos 75^\circ \sin 105^\circ - \sin 30^\circ$;

11) $2\sin 50^\circ \cos 20^\circ - \sin 70^\circ$;

12) $2\sin 2\alpha\sin\alpha + \cos 3\alpha$;

13) $2\cos 5\alpha\cos\alpha - \cos 6\alpha$;

14) $2\sin 5\alpha\cos 2\alpha + 2\sin\alpha\cos 4\alpha - \sin 7\alpha$;

15) $\cos 5\alpha\cos\alpha - \sin 8\alpha\sin 2\alpha - \cos 7\alpha\cos 3\alpha$;

16) $\dfrac{2\sin 40^\circ \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ}$;

17) $\dfrac{4\cos 55^\circ \cos 35^\circ}{\cos 20^\circ}$;

18) $\cos 2\alpha + 2\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)$.

150. Доказать тождества:

1) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

2) $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}=\operatorname{ctg}4\alpha$;

3) $\dfrac{\sin\alpha-2\cos 3\alpha-\sin 5\alpha}{\cos\alpha+2\sin 3\alpha-\cos 5\alpha}=-\operatorname{ctg}3\alpha$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}=\sin 2\alpha$;

5) $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin 3\alpha+\sin 4\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 3\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha$;

6) $\cos\alpha-\cos 3\alpha-\cos 4\alpha+\cos 5\alpha=-4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha\cos\dfrac{7\alpha}{2}$;

7) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{5}{2}\pi-6\alpha\right)+\sin(\pi+4\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{5}{2}\pi+6\alpha\right)+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos(\alpha+2\pi)}=\operatorname{tg}\alpha$;

8) $\dfrac{\sin(6\pi+4\alpha)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-5\alpha\right)+\sin(\pi-6\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-4\alpha\right)+\cos 5\alpha+\cos(6\alpha+2\pi)}=\operatorname{tg}5\alpha$;

9) $\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8}-2\alpha\right)-\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}-2\alpha\right)=\dfrac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}$;

10) $\sin^2\left(\dfrac{9\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)-\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{8}+\dfrac{\alpha}{4}\right)=\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}}$.

13.7. Преобразования тригонометрических выражений

Очень часто при тождественных преобразованиях трагонометрических выражений используется не одна формула, а сразу несколько рассмотренных ранее формул. Для этого нужно знать эти формулы и уметь их читать не только слева направо, но и справа налево.

Так, например, выражение $2\cos^2\alpha$ можно заменить на $\left(1+\cos 2\alpha\right)$, а выражение $2\sin^2\alpha$ на $\left(1-\cos 2\alpha\right)$. (В п. 13.3 приведены формулы: $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$; $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$).

При доказательстве тождеств целесообразно более сложную часть (левую или правую) преобразовывать к более простой. Если же обе части сложные, преобразуем их к одному и тому же более простому виду. Естественно, при преобразовании тригонометрических выражений необходимо соблюдать все правила алгебраических действий. В ходе преобразований иногда приходится пользоваться различными алгебраическими тождествами, которые надо уметь применять к тригонометрическим выражениям.

151. Упростить выражение: $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2} 2\alpha - 1} + \dfrac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2} 2\alpha - 1}$.

Решение.

Преобразуем числители:

$$1-\cos 4\alpha = 2\sin^2\frac{4\alpha}{2} = 2\sin^2 2\alpha; \qquad 1+\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha.$$

Преобразуем знаменатели:

$$\cos^{-2} 2\alpha - 1 = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1 = \frac{1-\cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} = \frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha};$$

$$\sin^{-2} 2\alpha - 1 = \frac{1}{\sin^2 2\alpha} - 1 = \frac{1-\sin^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}.$$

Подставляя полученные выражения в исходное выражение, получаем:

$$\frac{2\sin^2 2\alpha}{\dfrac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}} + \frac{2\cos^2 2\alpha}{\dfrac{\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}} = \frac{2\sin^2 2\alpha \cdot \cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha} + \frac{2\cos^2 2\alpha \cdot \sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha} =$$

$$= 2\cos^2 2\alpha + 2\sin^2 2\alpha = 2\left(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha\right) = 2.$$

152. Доказать тождество:

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\cos^4\alpha}=-2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Решение.

Известно, что $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Возведем в квадрат обе части этой формулы: $\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2=1$.

$$\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1.$$

Отсюда получаем: $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Преобразуем левую часть, используя полученное тождество:

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\cos^4\alpha}=\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}{\cos^4\alpha}=-\frac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha}=$$

$$=-\frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=-2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

153. Упростить выражения:

1) $\dfrac{1}{\cos^{-2}2\alpha-1}-\operatorname{ctg}^2 2\alpha$;

2) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$;

3) $2\cos^2 2\beta-\cos 4\beta$;

4) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$;

5) $\dfrac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}$;

6) $\dfrac{\sin 2\alpha-2\sin\alpha}{\sin 2\alpha+2\sin\alpha}+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$;

7) $(1-\operatorname{tg}\alpha)^2+(1+\operatorname{tg}\alpha)^2-\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$;

8) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$;

9) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$;

10) $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

11) $\dfrac{\cos\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{5}{2}\pi+2\alpha\right)}{(1+\cos 2\alpha)\cdot(1+\cos 4\alpha)}$;

12) $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}$;

13) $\dfrac{1-\cos(8\alpha-3\pi)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha}$;

14) $\dfrac{\sin x+2\sin 3x+\sin 5x}{\sin 3x+2\sin 5x+\sin 7x}$;

15) $\dfrac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot\dfrac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}$;

16) $(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)^2+(\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)^2$;

17) $\dfrac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$;

18) $\sin^2\alpha\left(1+\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(1-\sin^{-1}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha\right)$;

19) $\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}+2\beta\right)-\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-2\beta\right)$;

20) $\cos^2(\alpha+2\beta)+\sin^2(\alpha-2\beta)-1$;

21) $(\cos\alpha-\cos 2\beta)^2+(\sin\alpha+\sin 2\beta)^2$;

22) $\dfrac{1+\operatorname{ctg}2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$;

23) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)}$;

24) $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)\ -1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)}$;

25) $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}$.

154. Доказать тождества:

1) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin\alpha+\cos\alpha$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$;

3) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\sin\alpha+\cos\alpha$;

4) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$;

5) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

6) $\operatorname{tg}10^\circ\cdot\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}70^\circ\cdot\operatorname{tg}80^\circ=1$;

7) $\operatorname{tg}50^\circ\cdot\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}30^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ=\operatorname{ctg}70^\circ$;

8) $\sin(114^\circ-\alpha)+\cos(\alpha+156^\circ)=0$;

9) $\cos(20^\circ-\alpha)+\sin(250^\circ+\alpha)=0$;

10) $\dfrac{\left(\cos\alpha+\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)^2+\left(\sin\alpha+\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{4}$;

11) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

12) $2\sin^2(3\pi-2\alpha)\cdot\cos^2(5\pi+2\alpha)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{5}{2}\pi-8\alpha\right)$;

13) $\dfrac{\sin4\alpha}{1+\cos4\alpha}\cdot\dfrac{\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)$;

14) $\cos^2(\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(\alpha-270^\circ)=\dfrac{1}{\sin^2(\alpha+90^\circ)}-\cos^2(\alpha+180^\circ)$;

15) $\dfrac{1-\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha)}{1+\operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)}=\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)+1}{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)-1}$;

16) $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cdot ctg 2\alpha=\cos 2\alpha-2\cos^2\alpha$;

17) $\cos 4\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha-\sin 4\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$;

18) $\sin^2 2\alpha-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\right)\cdot\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{4}$;

19) $\sin^2\alpha+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$;

20) $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{1+\cos\alpha-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha$;

21) $\dfrac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{2}\sin 4\alpha$;

22) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-6}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2}=\cos 4\alpha$;

23) $\sin^2\alpha+\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{3}{2}$;

24) $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$;

25) $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

14. Обратные тригонометрические функции

1. *Функция* $y = \arcsin x$

Функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает и принимает все значения от -1 до 1. Поэтому функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ имеет обратную функцию, которая называется арксинусом и обозначается $y = \arcsin x$.

Арксинусом числа x называется число y из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ такое, что $\sin y = x$.

Свойства функции $y = \arcsin x$.

1) область определения функции: $x \in [-1;1]$;
2) область значений функции: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
3) функция нечетная, т. е. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

2. *Функция* $y = \arccos x$

Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0;\pi]$ убывает и принимает все значения от – 1 до 1. Поэтому функция $y = \cos x$ на отрезке $[0;\pi]$ имеет обратную функцию $y = \arccos x$.

Арккосинусом числа x называется число y из отрезка $[0;\pi]$ такое, что $\cos y = x$.

Свойства функции $y = \arccos x$

1) область определения функции: $x \in [-1;1]$;
2) область значений функции: $y \in [0;\pi]$;
3) функция не является ни четной, ни нечетной;
   $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

3. *Функция* $y = \operatorname{arctg} x$

Функция $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ возрастает и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому функция $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

имеет обратную функцию, которая называется арктангенсом и обозначается $y = \mathrm{arctg}x$.

<u>*Арктангенсом*</u> числа x называется число y из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ такое, что $\mathrm{tg}\, y = x$.

Свойства функции $y = \mathrm{arctg}x$

1) область определения функции: $x \in (-\infty; \infty)$;
2) область значений функции: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
3) функция нечетная, т. е. $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}x$.

4. Функция $y = \mathbf{arcctg}x$

Функция $y = \mathrm{ctg}\, x$ на интервале $(0; \pi)$ убывает и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому функция $y = \mathrm{ctg}\, x$ на интервале $(0; \pi)$ имеет обратную функцию $y = \mathrm{arcctg}x$.

<u>*Арккотангенсом*</u> числа x называется число y из интервала $(0; \pi)$ такое, что $\mathrm{ctg}\, y = x$.

Свойства функции $y = \mathrm{arcctg}x$

1) область определения функции: $x \in [-\infty; \infty]$;
2) область значений функции: $y \in (0; \pi)$;
3) $\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}x$.

155. Найти значения обратных тригонометрических функций:

1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

4) $\mathrm{arctg}1$; 5) $\mathrm{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

<u>Решение:</u>

1) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, т. к. $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Тогда $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, т. к. $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\pi}{4} \in [0; \pi]$.

3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$.

4) $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, т. к. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$ и $\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

5) $\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{3}$, т. к. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{3}\in(0;\pi)$.

Тогда $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

156. Найти значения обратных тригонометрических функций:

1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\arcsin 0$; 3) $\arcsin(-1)$;

4) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 5) $\arccos 0$; 6) $\arccos\frac{1}{2}$;

7) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 8) $\arccos(-1)$; 9) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

10) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; 11) $\operatorname{arctg}(-1)$; 12) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$;

13) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; 14) $\operatorname{arcctg}1$; 15) $\operatorname{arcctg}(-1)$;

16) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

157. Вычислить:

1) $\arcsin 1+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 0$;

3) $\operatorname{arctg}0+\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arcctg}0$;

5) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})+\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$; 6) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

7) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 8) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

9) $\cos(\arcsin(-1))$; 10) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

15. Решение некоторых видов тригонометрических уравнений

15.1. Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную величину в аргументах тригонометрических функций.

Решение любого тригонометрического уравнения в конечном итоге сводится к решению тригонометрических уравнений, имеющих следующий вид: $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$.

1. *Уравнение* $\sin x = a$

Это уравнение имеет решение, если $|a| \le 1$.

Общий вид решения: $\underline{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n}$, $n \in Z$.

В некоторых частных случаях (при $a = 0$ и $a = \pm 1$) решение уравнения целесообразно записывать не по общей формуле, а следующим образом:

$\sin x = 0$; решение: $x = \pi n$, $n \in Z$;

$\sin x = 1$; решение: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$;

$\sin x = -1$; решение: $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

2. *Уравнение* $\cos x = a$

Это уравнение имеет решение, если $|a| \le 1$.

Общий вид решения: $\underline{x = \pm \arccos a + 2\pi n}$, $n \in Z$.

Частные случаи:

$\cos x = 0$; решение: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$;

$\cos x = 1$; решение: $x = 2\pi n$, $n \in Z$;

$\cos x = -1$; решение: $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

3. *Уравнение* $\operatorname{tg} x = a$

Это уравнение имеет решение при всех действительных значениях a.

Решение такого уравнения имеет вид: $\underline{x = \operatorname{arctg} a + \pi n}$, $n \in Z$.

4. *Уравнение* $\operatorname{ctg} x = a$

Это уравнение имеет решение при всех действительных значениях a.

Решение такого уравнения имеет вид: $\underline{x = \operatorname{arcctg} a + \pi n}$, $n \in Z$.

158. Решить уравнения:

1) $\sin x = -\frac{1}{2}$; 2) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} 3x = -1$.

Решение:

1) $\sin x = -\frac{1}{2}$. Используя общую формулу, получаем:

$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \qquad n \in Z.$$

Тогда $x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \qquad n \in Z.$

2) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Используя общую формулу, получаем:

$$2x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, \qquad n \in Z.$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

$$2x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \qquad n \in Z.$$

Тогда $x = \pm\frac{5\pi}{12} + \pi n, \qquad n \in Z.$

3) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$. Решение этого уравнения:

$$x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi n, \qquad n \in Z.$$

$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Тогда $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \qquad n \in Z.$

4) $\operatorname{ctg} 3x = -1$. Используя общую формулу, получаем:

$$3x = \operatorname{arcctg}(-1) + \pi n, \qquad n \in Z.$$

$$\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

$3x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \qquad n \in Z.$ Тогда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}, \qquad n \in Z.$

159. Решить уравнения:

1) $\sin 2x = 0$;

2) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$;

4) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$;

5) $\sin 4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

6) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

7) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

8) $\cos 3x = 0$;

9) $\cos 2x = -1$;

10) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$;

11) $\operatorname{tg} 2x = 1$;

12) $\operatorname{tg} 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

13) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$;

14) $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

15) $\operatorname{ctg} 2x = \sqrt{3}$;

16) $\operatorname{ctg} 2x = 1$;

17) $\operatorname{ctg} 3x = -\sqrt{3}$;

18) $\operatorname{ctg} 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

19) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$;

20) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$;

21) $\operatorname{tg}^2 x = 3$;

22) $\operatorname{ctg}^2 x = 1$;

23) $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0$;

24) $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x$;

25) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$;

26) $\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$;

27) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$;

28) $(\sin 2x + \cos 2x)^2 = 2\sin 4x$;

29) $\cos 6x + \sin^2 3x = 0$;

30) $\cos 4x - \cos^2 2x = 0$.

15.2. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим

Пусть заданное тригонометрическое уравнение содержит несколько тригонометрических функций, которые удается заменить одной тригонометрической функцией на основании формул, связывающих эти функции. Уравнение такого типа путем замены переменной сводится к алгебраическому уравнению.

160. Решить уравнение: $\sin^2 x - \cos^2 x - 9\sin x + 5 = 0$.

Решение:

Перейдем к одной функции. Если $\sin x$ выразить через $\cos x$, то получим иррациональное уравнение, что нежелательно. Выразим $\cos x$ через $\sin x$: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

Преобразуем исходное уравнение:

$$\sin^2 x - \left(1 - \sin^2 x\right) - 9\sin x + 5 = 0;$$

$$2\sin^2 x - 9\sin x + 4 = 0.$$

Сделаем замену $\sin x = t$. При этом заметим, что $|t| \le 1$. Получаем квадратное уравнение относительно новой переменной: $2t^2 - 9t + 4 = 0$.

Решая уравнение, получаем корни $t_1 = \dfrac{1}{2}$; $t_2 = 4$.

Второй корень не удовлетворяет условию $|t| \le 1$, поэтому рассматриваем только первый корень. Возвращаясь к переменной x, получаем простейшее уравнение $\sin x = \dfrac{1}{2}$, откуда $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in Z$.

161. Решить уравнения:

1) $\sin^2 x = 3 + 2\sin x$;
2) $\cos^2 x + \cos x = 2$;
3) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$;
4) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;
5) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$;
6) $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$;
7) $2\sin^2 2x = 3\cos 2x$;
8) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$;
9) $2\,\mathrm{tg}\, x + 3\,\mathrm{ctg}\, x = 5$;
10) $5\,\mathrm{tg}\, x - \mathrm{ctg}\, x + 4 = 0$;
11) $\cos 2x + 3\sin x = 2$;
12) $\cos 2x - 5\sin x = 3$.

15.3. Тригонометрические уравнения, решаемые методом разложения на множители

Пусть в заданном тригонометрическом уравнении удалось после перенесения всех членов уравнения в левую часть разложить ее на множители, т. е. удалось уравнение преобразовать к виду $f(x)\cdot\varphi(x)=0$. Тогда решение уравнения сводится к решению совокупности уравнений $f(x)=0$ и $\varphi(x)=0$.

162. Решить уравнения:

1) $\cos 3x+\cos 7x=0$; 2) $1-\sin 4x=(\sin x-\cos x)^2$.

Решение:

1) преобразуем сумму косинусов в произведение: $2\cos 5x\cdot\cos 2x=0$.
Отсюда $\cos 5x=0$ или $\cos 2x=0$.

$$\cos 5x=0 \Rightarrow 5x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z \Rightarrow x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\quad n\in Z.$$

$$\cos 2x=0 \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in Z \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\quad k\in Z.$$

Ответ: $x_1=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\quad n\in Z$; $x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\quad k\in Z$;

2) раскроем скобки в правой части уравнения:

$$1-\sin 4x=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x.$$

Применяя формулы $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ и $2\sin x\cos x=\sin 2x$, получаем $1-\sin 4x=1-\sin 2x$ или $\sin 4x-\sin 2x=0$.

Преобразуем разность синусов в произведение: $2\sin x\cdot\cos 3x=0$.

$$\sin x=0 \Rightarrow x=k\pi,\quad k\in Z.$$

$$\cos 3x=0 \Rightarrow 3x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\quad n\in Z.$$

Ответ: $x_1=k\pi,\quad k\in Z$; $x_2=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\quad n\in Z$.

163. Решить уравнения:

1) $\sin 5x+\sin 3x=0$; 2) $\sin 7x-\sin x=0$;

3) $\cos 4x-\cos 6x=0$; 4) $\cos 2x+\cos 4x=0$;

5) $1+\sin 2x=(\sin 3x+\cos 3x)^2$; 6) $(\sin 2x-\cos 2x)^2=1+\sin 8x$;

7) $\sin 3x+\sin 5x=\sin 4x$; 8) $\sin x+\sin 3x=\sin 2x$;

9) $(1+\cos 2x)\sin x=\cos^2 x$; 10) $(1-\cos 2x)\cos x=\sin^2 x$;

11) $\sin 2x=2\cos x$; 12) $\sin 2x=2\sin x$;

13) $1-\cos 4x=\sin 2x$; 14) $1+\cos 6x=\cos 3x$.

Список литературы

1. Будна О. С. Математика. Репетитор / О. С. Будна, С. М. Будна : навч. посіб. – Х. : Факт, 2008. – 224 с. – (серія журналу «Вісник ТІМО»).

2. Кириченко Ю. В. Репетитор по математике для поступающих в вузы : справочник / Ю. В. Кириченко, С. Ю. Кириченко, В. И. Омельченко и др. – Х. : Фолио, 1997. – 463 с.

3. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала анализа : Учебник / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. – М. : Просвещение, 1997. – 320 с.

4. Сборник конкурсных задач по математике / Под ред. М. И. Сканави. – К. : Каннон, 1997. – 528 с.

5. Симонов А. Я. Система тренировочных задач и уравнений по математике: Пособие для школьников ст. классов / А. Я. Симонов, Д. С. Бакаев и др. – М. : Просвещение, 1991. – 208 с.

Содержание

Навчальне видання

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ
ЧАСТИНА 3

Навчальний посібник
для слухачів Центру довузівської підготовки
(російською мовою)

Упорядники: Михайленко Світлана Василівна
Свіщова Євгенія Віталіївна

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка *А. Ю. Петрова, К. В. Дибіна*

Підписано до друку 27.03.2012. Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Гарнітура «Таймс».
Ум. друк. арк. 2,32. Обл.-вид. арк. 2,11.
Тираж 100 пр.

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво № 1153 від 16.12.2002.

Надруковано у видавництві
Народної української академії

Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Лермонтовська, 27.