НАРОДНАЯ УКРАИНСКАЯ АКАДЕМИЯ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ 2

Учебное пособие
для слушателей факультета довузовской подготовки

Харьков
Издательство НУА
2012

ББК 22.1я 73-4
С23

Утверждено на заседании
Кафедры информационных технологий и математики.
Протокол № 3 от 05.10.2009

Составители: *С. В. Михайленко, Е. В. Свищева*

Рецензент проф., докт. физ.-мат. наук Янцевич А.А.

Мета посібника – допомогти слухачам ФДП підготуватися до зовнішнього тестування з математики і до успішного вивчення даного предмета. Посібник охоплює наступні розділи елементарної математики: лінійні, квадратні, ірраціональні, показникові, логарифмічні рівняння та нерівності; арифметична та геометрична прогресії.

По кожній з теми наводяться розв'язки типових задач, а також задачі для розв'язання на заняттях і вдома.

С 23 **Сборник** задач по математике: пособие для слушателей фак. довуз. подгот. / Нар. укр. акад. [каф. информационных технологий и математики ; Сост.: С. В. Михайленко, Е. В. Свищева]. – 3-е изд., испр. и доп. – Х. : Изд-во НУА, 2012. – Ч. 2. – 48 с.

Цель пособия – помочь слушателям ФДП подготовиться к внешнему тестированию по математике и к успешному изучению данного предмета. Пособие охватывает следующие разделы элементарной математики: линейные, квадратные, иррациональные, показательные, логарифмические уравнения и неравенства; арифметическая и геометрическая прогрессии.

По каждой теме приводятся решения типовых задач, а также задачи для решения на занятиях и дома.

ББК 22.1я 73-4

СОДЕРЖАНИЕ

7. ФУНКЦИЯ. ГРАФИК ФУНКЦИИ

7.1. Функция. Основные понятия

Если каждому значению переменной x поставлено в соответствие одно определенное значение другой переменной y, то говорят, что y есть ***функция от x***, и символически записывают так: $y = f(x)$. Множество значений аргумента x, для которых определено значение функции y в силу правила $f(x)$, называется ***областью определения*** функции. Множество всех значений, которые может принимать сама функция $y = f(x)$, называется ее ***областью значений***.

Графиком функции $y = f(x)$ называется геометрическое место точек плоскости $x0y$, координаты которых удовлетворяют условию $y = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется ***четной***, если $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

Функция $y = f(x)$ называется ***нечетной***, если $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое отличное от нуля число T, что в области определения функции выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$. Наименьшее положительное число T, обладающее указанным свойством, называется ***основным периодом***.

Если функция $y = f(x)$ такова, что большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то такая функция называется ***возрастающей***. Если же большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то функция называется ***убывающей***.

54. Найти области определения функций:

1) $y = \dfrac{3x+5}{x^2+x-2}$; 2) $y = \log_2(3-x)$; 3) $y = x^3 + \sqrt{x}$.

РЕШЕНИЕ.

1) Функция $y = \dfrac{3x+5}{x^2+x-2}$ определена для всех значений x, при которых $x^2 + x - 2 \neq 0$. Решая квадратное уравнение $x^2 + x - 2 = 0$, находим его корни $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Следовательно, областью определения этой функции будет вся числовая ось, за исключением точек $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$, т. е. $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; \infty)$.

2) Функция $y = \log_2(3-x)$ определена для тех значений x, при которых $3 - x > 0$, т. е. $x < 3$. Следовательно, $x \in (-\infty; 3)$.

3) Первое слагаемое функции $y = x^3 + \sqrt{x}$ определено при всех x. Второе слагаемое функции определено при $x \geq 0$. Функция определена при тех значе-

ниях x, при которых определены оба слагаемые одновременно. В данном случае $x \in [0; \infty)$.

55. Есть ли среди указанных функций четные или нечетные:

1) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$; 2) $\varphi(x) = 2^x + 2^{-x}$; 3) $g(x) = 2x^2 - 3x$.

РЕШЕНИЕ.

1) Заменяя x на $-x$, получим $f(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{-x} = \dfrac{\cos x}{-x} = -f(x)$.

Следовательно, функция $f(x)$ является нечетной.

2) $\varphi(-x) = 2^{-x} + 2^x = \varphi(x)$, т. е. функция $\varphi(x)$ четная.

3) $g(-x) = 2(-x)^2 - 3(-x) = 2x^2 + 3x$. Так как $g(-x) \neq g(x)$ и $g(-x) \neq -g(x)$, то функция $g(x)$ не является ни четной, ни нечетной.

56. Найти области определения функций:

1) $y = \sqrt[3]{x+1} + \dfrac{x}{\sqrt{x-2}}$; 2) $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 5x}$; 3) $y = 5\lg x + \sqrt{4-x}$.

57. Есть ли среди указанных функций четные или нечетные?

1) $f_1(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^3}$; 2) $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

3) $f_3(x) = 2x^2 - x^4 - 5$; 4) $f_4(x) = x + x^2 + x^3$;

5) $f_5(x) = \dfrac{1+\cos x}{x}$; 6) $f_6(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$;

7) $f_7(x) = \dfrac{\sin x}{5 + \cos x}$; 8) $f_8(x) = (x^2+1)(x^3 - x)$.

7.2. Действия над графиками

Пусть задан график функции $y = f(x)$. Рассмотрим различные действия над графиками.

1. График функции $y = f(x-a)$ $(a > 0)$ можно получить при помощи параллельного переноса графика функции $y = f(x)$ вдоль оси OX на a единиц вправо; график функции $y = f(x+a)$ $(a > 0)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на a единиц влево.

2. График функции $y = f(x) + b$ $(b > 0)$ можно построить параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси OY на b единиц вверх; график функции $y = f(x) - b$ $(b > 0)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на b единиц вниз.

3. График функции $y = kf(x)$ $(k > 0)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ растяжением $(k > 1)$ или сжатием $(0 < k < 1)$ вдоль оси OY.

4. График функции $y = f(cx)$ $(c > 0)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ сжатием $(c > 1)$ или растяжением $(0 < c < 1)$ вдоль оси OX.

5. Для получения графика функции $y = -f(x)$ график функции $y = f(x)$ отображаем зеркально относительно оси OX.

6. Для получения графика функции $y = f(-x)$ график функции $y = f(x)$ отображаем зеркально относительно оси OY.

7. Для построения графика функции $y = |f(x)|$ строим график функции $y = f(x)$ и ту часть графика, которая расположена ниже оси OX, отображаем зеркально относительно оси OX. Та часть графика, которая расположена выше оси OX, остается без изменений.

8. Функция $y = f(|x|)$ является четной, поэтому ее график симметричен относительно оси OY. Рассмотрим $x \ge 0$. Заданная функция при $x \ge 0$ имеет вид $y = f(x)$, т. к. $|x| = x$ при $x \ge 0$. Строим график функции $y = f(x)$ для $x \ge 0$. Затем полученную часть графика отображаем зеркально относительно оси OY.

58. Построить графики функций:

1) $y = x^2$; 2) $y = (x-1)^2$; 3) $y = (x+2)^2$; 4) $y = x^2 + 1$;

5) $y = x^2 - 3$; 6) $y = 2x^2$; 7) $y = \frac{1}{2}x^2$; 8) $y = -x^2$.

РЕШЕНИЕ.

1) Графиком функции $y = x^2$ является парабола с вершиной в точке (0; 0). Ветви параболы направлены вверх. Дополнительные точки:

x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

2) График функции $y = (x-1)^2$ получается параллельным переносом графика функции $y = x^2$ на 1 единицу вправо.

3) График функции $y=(x+2)^2$ получается параллельным переносом графика функции $y=x^2$ на 2 единицы влево.

4) График функции $y=x^2+1$ получается параллельным переносом графика функции $y=x^2$ на 1 единицу вверх.

5) График функции $y=x^2-3$ получается параллельным переносом графика функции $y=x^2$ на 3 единицы вниз.

6) График функции $y=2x^2$ получается из графика функции $y=x^2$ растяжением вдоль оси OY. Дополнительные точки:

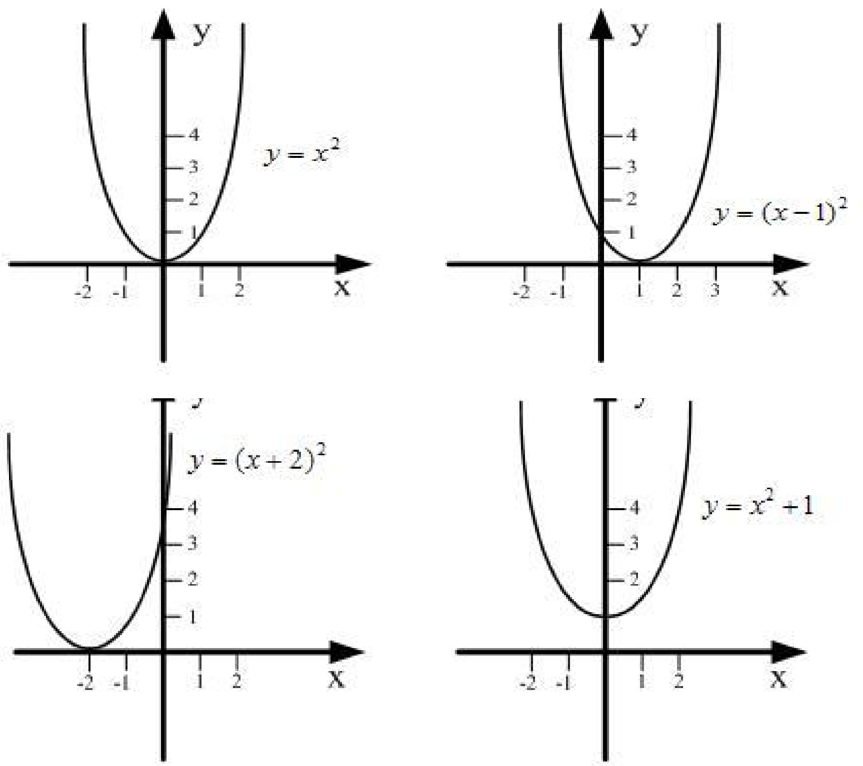
x	–2	–1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

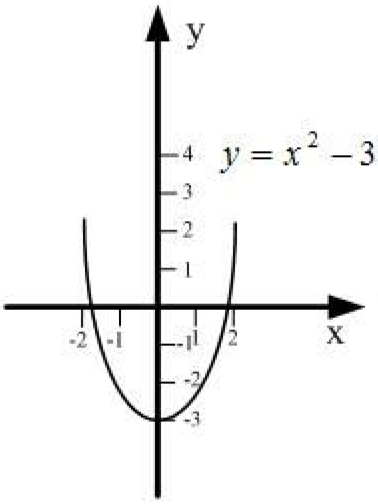
7) График функции $y=\frac{1}{2}x^2$ получается из графика функции $y=x^2$ сжатием вдоль оси OY. Дополнительные точки:

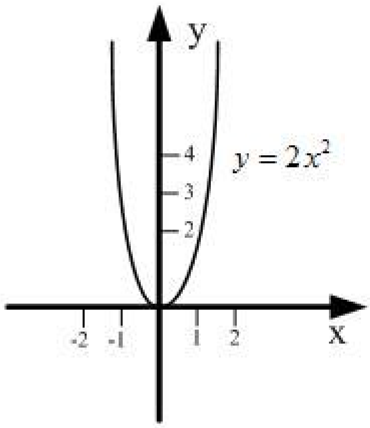
x	–2	–1	0	1	2
y	2	1/2	0	1/2	2

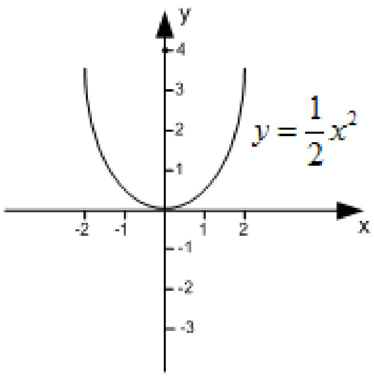
8) Для построения графика функции $y=-x^2$ график функции $y=x^2$ отображаем зеркально относительно оси OX.

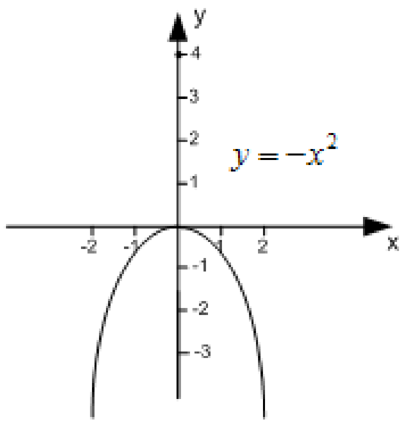
Получены следующие графики:









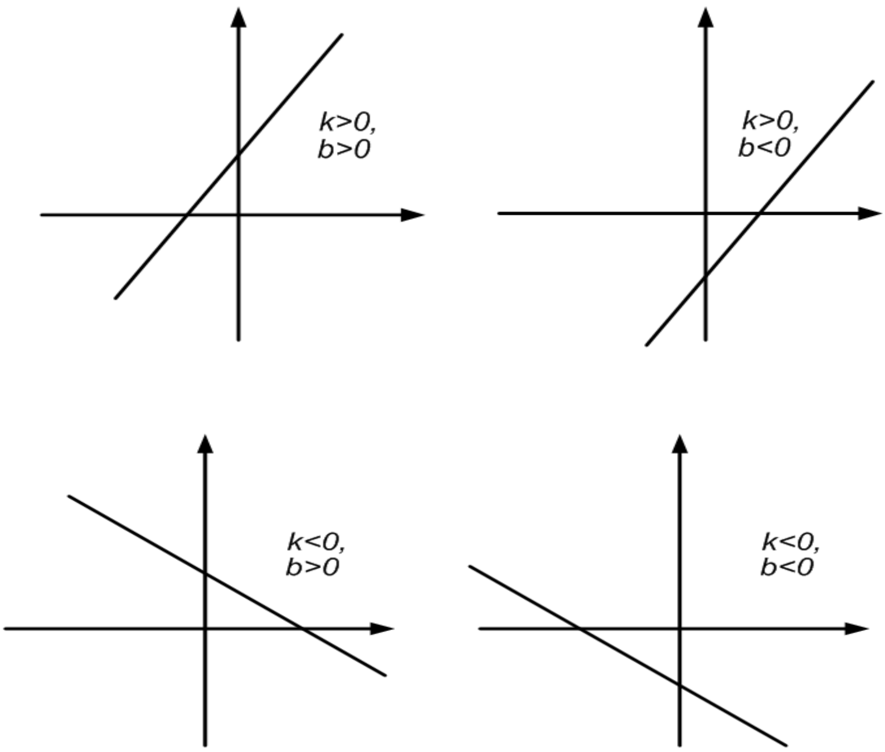


7.3. Линейная функция и ее график

Линейной функцией называется функция вида $y = kx + b$. Линейная функция определена на всей числовой оси. Графиком линейной функции является прямая, а для построения прямой достаточно знать любые две ее точки. Находим координаты двух точек прямой, отмечаем их на координатной плоскости и затем проводим через них прямую.

Отметим, что коэффициент k называется ***угловым коэффициентом*** прямой и равен тангенсу угла φ, образованного прямой $y = kx + b$ и положительным направлением оси OX, т. е. $k = tg\varphi$. При $x = 0$ получаем $y = b$, т. е. точка (0; b) – это точка пересечения прямой с осью OY.

Рассмотрим различный вид прямой в зависимости от знаков k и b.



Если $b = 0$ линейная функция имеет вид $y = kx$. В этом случае графиком является прямая, проходящая через начало координат. Графиком функции $y = b$ является прямая, параллельная оси OX и проходящая через точку (0; b) на оси ординат. Прямая, параллельная оси OY и проходящая через точку (a; 0), имеет уравнение $x = a$.

59. Задан график функции $y = f(x)$. Указать, какие действия необходимо произвести для получения графиков следующих функций:

1) $y = f(x+3)$; 2) $y = 2f(x)$; 3) $y = f(x-5)$;

4) $y = f(x)+3$; 5) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 6) $y = f(x)-5$;

7) $y = |f(x)|$; 8) $y = |f(x-1)|$; 9) $y = 3f(x+2)$;

10) $y = f(x-2)+1$.

60. Найти координаты вершин треугольника ABC, зная уравнения его сторон:

1) $AB: x+2y-5=0$, $BC: 2x+y-4=0$, $AC: 8x+7y-4=0$;

2) $AB: 3x-y-3=0$, $BC: x-y-1=0$, $AC: x+y-5=0$;

3) $AB: 3x+4y-11=0$, $BC: x+7y+2=0$, $AC: 5x+y+10=0$;

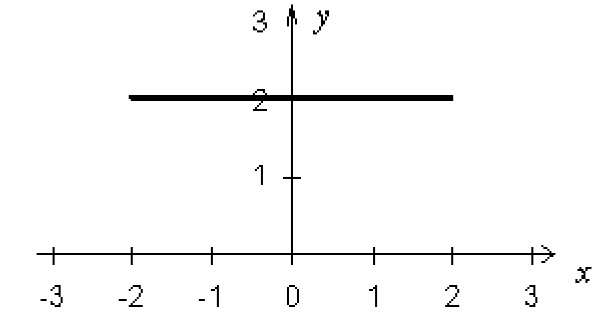
4) $AB: 2x-3y+5=0$, $BC: x+y-10=0$, $AC: 2x+7y-25=0$.

61. Построить графики функций:

1) $y = 2$; 2) $y = 2x - 1$; 3) $y = |x + 2|$.

РЕШЕНИЕ.

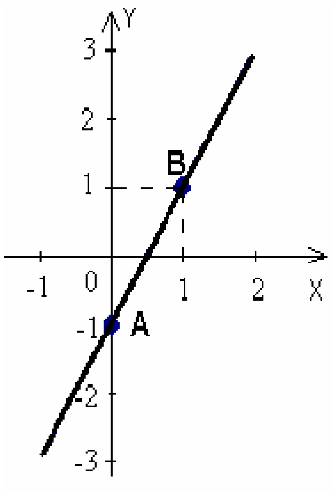
1) Прямая $y = 2$ параллельна оси $0x$ и проходит через точку $A(0;\ 2)$.



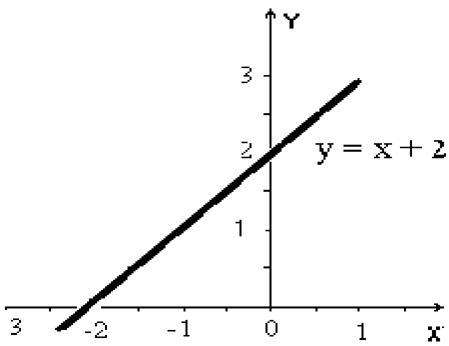
2) Находим координаты двух точек прямой:

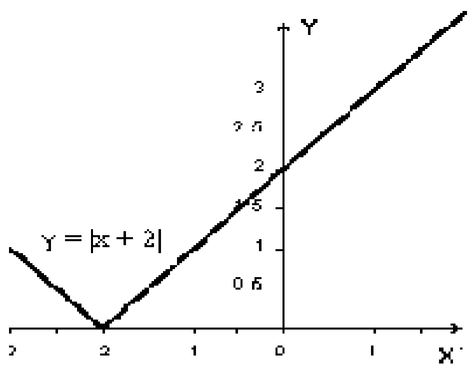
x	0	1
y	–1	1

Отмечаем на координатной плоскости точки $A(0;\ –1)$ и $B(1;\ 1)$ и проводим через них прямую.



3) Строим график функции $y = x + 2$. Для построения графика функции $y = |x + 2|$ часть графика прямой $y = x + 2$, лежащую ниже оси OX, отображаем зеркально относительно оси OX.





62. Построить прямые:

1) $y = -2x + 4$; 2) $y = 3x + 2$;

3) $y = 3x$; 4) $y = -2x$;

5) $2x + 3y - 6 = 0$; 6) $3x - 4y + 12 = 0$;

7) $y = -1$; 8) $y = 3$.

63. Построить графики функций:

1) $y = |2x + 4|$; 2) $y = |2 - x|$;

3) $y = |x|$; 4) $y = x - |x|$;

5) $y = \dfrac{|x|}{x}$; 6) $y = 2x + |x| + 1$;

7) $y = 3|x| - x + 2$; 8) $y = 2|x| - 1$.

64. Построить графики функций:

1) $y = \sqrt{x^2} - 1$; 2) $y = \dfrac{|x|}{x} + \dfrac{x}{|x|} + x$;

3) $y = \dfrac{1 - x^2}{x - 1}$; 4) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x - 2}$;

5) $y = \dfrac{(x-3)^2}{|x-3|}$; 6) $y = \dfrac{x^2 - 4}{|x| - 2}$.

7.4 Квадратичная функция и ее график

Квадратичной функцией называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

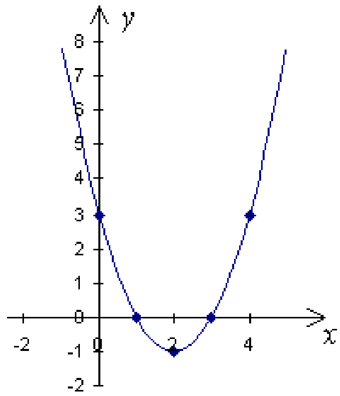
Определена она на всей числовой прямой. Преобразуя квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, квадратичную функцию можно представить в виде $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ $\left(x_0 = -\dfrac{b}{2a},\quad y_0 = -\dfrac{D}{4a}\right)$.

Графиком квадратичной функции является парабола с вершиной в точке $M(x_0, y_0)$. Ветви параболы направлены вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$. Парабола пересекает ось $0x$ в двух точках, если $D = b^2 - 4ac > 0$, и касается оси $0x$, если $D = 0$. Если $D < 0$, парабола не имеет общих точек с осью $0x$. Для построения параболы находим дополнительные точки (например, точки пересечения с осью $0x$ и осью $0y$).

65. Построить параболу $y = x^2 - 4x + 3$.

РЕШЕНИЕ: $y = x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 4x + 4) - 1 = (x-2)^2 - 1$. Вершина параболы находится в точке $M(2; -1)$. Ветви параболы направлены вверх. Парабола пересекает ось $0x$ в точках $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ (x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$).

Если $x = 0$ то $y = 3$. Осью симметрии параболы является вертикальная прямая, проходящая через вершину параболы (прямая $x = 2$).



66. Построить параболы:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = -2x^2$; 3) $y = (x-1)^2$;
4) $y = (x+2)^2$; 5) $y = 2(x+1)^2 - 1$; 6) $y = -2(x+2)^2 + 1$;
7) $y = x^2 - 4x + 6$; 8) $y = x^2 + 6x + 8$; 9) $y = x^2 + 4x + 3$;
10) $y = x^2 - 8x + 15$; 11) $y = 2x^2 + 4x - 1$; 12) $y = 2x^2 + 8x + 9$.

67. Построить графики функций:

1) $y = x|x|$; 2) $y = x|x| - 2$; 3) $y = x|x| - 2x$;
4) $y = -x|x| + 3x$; 5) $y = x^2 - 5|x| + 3$; 6) $y = x^2 - 4|x| + 3$;
7) $y = |2x^2 - 2|$; 8) $y = |x^2 - 2x|$; 9) $y = |x^2 + 3x|$;
10) $y = |(x-1)^2 - 2|$; 11) $y = |(x+2)^2 - 1|$; 12) $y = |4 - (x-2)^2|$;
13) $y = |1 - (x+1)^2|$; 14) $y = |x^2 - 5x + 4|$.

68. Построить графики функций:

1) $y = (x-1)\cdot|x-1|$; 2) $y = (x+2)\cdot|x+2|$; 3) $y = x\cdot|x-1|$;
4) $y = x\cdot|x+2|$; 5) $y = (x-1)\cdot|x-2|$; 6) $y = (x+3)\cdot|x+2|$.

8. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

8.1. Линейные неравенства

Неравенство с одной переменной – это неравенство одного из видов: $f(x) > g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, $f(x) < g(x)$, $f(x) \leq g(x)$. Всякое значение переменной, при котором данное неравенство обращается в верное числовое неравенство, называется ***решением*** неравенства. Решить неравенство – это значит найти все множество его решений или установить, что решений нет.

Два неравенства с одной переменной называются ***равносильными***, если множества решений этих неравенств совпадают.

При решении неравенств используют следующие свойства:

1. Члены неравенства можно переносить с противоположными знаками из одной части неравенства в другую.

2. При умножении или делении обеих частей неравенства на положительное число знак неравенства не меняется.

3. При умножении или делении обеих частей неравенства на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположный.

Линейным неравенством называется неравенство вида $ax + b > 0$ ($ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $a \neq 0$). Если $a > 0$, то неравенство $ax + b > 0$ имеет множество решений $x > -\dfrac{b}{a}$; если $a < 0$, то неравенство $ax + b > 0$ имеет множество решений $x < -\dfrac{b}{a}$.

69. Решить неравенства:

1) $4x\,(x - 1) - (2x + 5)(2x - 5) > 1$;   2) $4x - 8|x| + 12 > 0$.

РЕШЕНИЕ.

1) Преобразуем левую часть неравенства: $4x^2 - 4x - (4x^2 - 25) > 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow -4x + 25 > 1 \Rightarrow -4x > -24$. Делим обе части неравенства на (-4). Знак неравенства при этом меняется на противоположный. Получаем $x < 6$.

Таким образом, решением неравенства является множество всех x, удовлетворяющих условию $x < 6$, т. е. $x \in (-\infty,\ 6)$.

2) По определению $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0 \end{cases}$.

Рассмотрим два случая:

а) Пусть $x \geq 0$. Тогда $|x| = x$ и неравенство запишется в виде $4x - 8x + 12 > 0$. Отсюда $-4x > -12 \Rightarrow x < 3$. Решением неравенства являются $x \in [0;\ 3)$;

б) Пусть $x < 0$. Тогда $|x| = -x$ и неравенство запишется в виде:

$$4x + 8x + 12 > 0 \quad \Rightarrow \quad 12x > -12 \quad x > -1.$$

Решением неравенства являются $x \in (-1, 0)$. Объединяя полученные интервалы, получаем ответ: решением исходного неравенства являются все значения $x \in (-1, 3)$.

70. Решить неравенства:

1) $2(3-4x)-5(x-2)>3$;
2) $5x-(2x-19)<4x-(8+4x)$;
3) $\dfrac{6-5x}{5}+\dfrac{3x-1}{2}>5{,}2-x$;
4) $\dfrac{x-1}{4}<2\dfrac{1}{2}-\dfrac{2-2x}{3}$;
5) $x(x-3)^2-(x-1)^3+3(x+2)(x-2)\le 1$;
6) $2(x-2)^2-3(x+1)^2>x(6-x)-15$;
7) $6-\dfrac{x-1}{2}>\dfrac{3-x}{2}+\dfrac{x-2}{3}$;
8) $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt[3]{4x}}{\sqrt[6]{2}}-8^{2/3}\le 0$;
9) $\dfrac{\sqrt{3^5}\cdot(x+2)}{\sqrt[4]{9}}+27^{\frac{2}{3}}>0$;
10) $8^{5/3}\cdot(x-3)\le 4^{\frac{3}{2}}\cdot(x+2)$.

71. Решить неравенства:

1) $3x+5|x|-8>0$;
2) $3x+|x|>8$;
3) $|x|-2>5x$;
4) $4|x|>5x-1$;
5) $6|x|-2x>1$;
6) $5x-|x|<12$.

72. Решить неравенства с параметрами:

1) $a(x-1)>x-2$;
2) $ax+3>x-1$;
3) $5x-a>ax-4$;
4) $ax+8>2x-4$;
5) $ax+b^2>bx+a^2$;
6) $3ax+b>ax+2b$.

8.2. Квадратные неравенства

Квадратным неравенством называется неравенство вида $ax^2+bx+c>0$ $\left(ax^2+bx+c\ge 0,\quad ax^2+bx+c<0,\quad ax^2+bx+c\le 0,\quad a\ne 0\right)$.

Решение квадратного неравенства зависит от знака дискриминанта квадратного трехчлена ax^2+bx+c и знака a. Рассмотрим примеры.

73. Решить неравенства:

1) $(x-2)^2+(2x+1)^2<(2x-1)^2+1$;
2) $x(x+2)+2(1+2x)>-8$.

РЕШЕНИЕ.

1) $(x-2)^2+(2x+1)^2<(2x-1)^2+1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow\ x^2-4x+4+4x^2+4x+1<4x^2-4x+1+1 \ \Rightarrow\ x^2+4x+3<0.$$

Находим корни квадратного уравнения $x^2+4x+3=0$. $D=4>0$, $x_1=-3$, $x_2=-1$.

Парабола $y=x^2+4x+3$ пересекает ось $0x$ в двух точках ($x_1=-3$; $x_2=-1$); ветви параболы направлены вверх ($a=1>0$). Следовательно, отрицательные значения $y=x^2+4x+3$ принимает между корнями x_1 и x_2, т. е. решением неравенства являются все значения $x\in(-3;-1)$.

2) $x(x+2)+2(1+2x)>-8 \Rightarrow x^2+2x+2+4x>-8 \quad \Rightarrow \quad x^2+6x+10>0$. $D=-4<0, \quad a=1>0$.

Парабола $y=x^2+6x+10$ не имеет общих точек с осью $0x$ (т. к. $D<0$), ветви параболы направлены вверх, поэтому $y=x^2+4x+3>0$ при всех действительных значениях x, т. е. $x\in(-\infty,\infty)$.

74. Решить неравенства:

1) $x^2-6x+5>0$;

2) $x^2-x-6\le 0$;

3) $x^2+4x+5>0$;

4) $x^2-6x+10<0$;

5) $16x-15x(x+1)<0$;

6) $\dfrac{(2-x)}{2}\cdot x>x+\dfrac{1+3x}{4}$;

7) $(2x-1)^2-13>(3x-1)(x+2)-6x$;

8) $x(3-x)\ge 2(3-2x)$;

9) $x^2-5|x|+4<0$;

10) $x^2-|x|-6>0$;

11) $x^2+3|x|-4\le 0$;

12) $x^2-5|x|+4\ge 0$.

75. 1) При каких действительных значениях a неравенство $ax^2-7x+4a<0$ выполняется при всех действительных значениях x?

2) Найти все действительные значения m, при которых многочлен $(m^2-1)x^2+2(m-1)x+1$ положителен при всех действительных x.

8.3. Дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов

Неравенство вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0 \quad \left(\dfrac{P(x)}{Q(x)}\ge 0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)}<0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)}\le 0\right)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, называется ***дробно-рациональным***. Если $Q(x)$ – многочлен нулевой степени, т. е. $Q(x) = \text{const}$, то $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x)$ – многочлен, и неравенство $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$ запишется в виде $P_1(x) > 0$.

Решаем дробно-рациональные неравенства в такой последовательности:

1) Если обе части неравенства не равны нулю, переносим все члены неравенства в левую сторону, чтобы в правой части стоял ноль.

2) Приводим выражение в левой части неравенства к общему знаменателю.

3) К полученному неравенству применяем ***метод интервалов***. Для этого находим корни числителя и знаменателя и наносим их на числовую ось. Корни знаменателя не принадлежат ОДЗ, поэтому отметим их на оси незакрашенными кружочками. Корни числителя и знаменателя разбили числовую ось на интервалы, на каждом из которых левая часть неравенства сохраняет знак.

4) Определяем знаки левой части неравенства на каждом из полученных интервалов. Выбираем интервалы с требуемым в условии знаком левой части и записываем ответ. При решении нестрогих неравенств $(\geq, \leq)$ в ответ включаем все корни числителя левой части.

76. Решить неравенства:

1) $\dfrac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - 5x + 4} \leq \dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{(x-1)^2(x-3)}{(x-4)^3} \leq 0$.

РЕШЕНИЕ.

1) $\dfrac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - 5x + 4} \leq \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - 5x + 4} - \dfrac{1}{2} \leq 0 \Rightarrow$

$$\frac{2(x^2 - 3x - 1) - (x^2 - 5x + 4)}{2(x^2 - 5x + 4)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 6}{2(x^2 - 5x + 4)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 5x + 4} \leq 0.$$

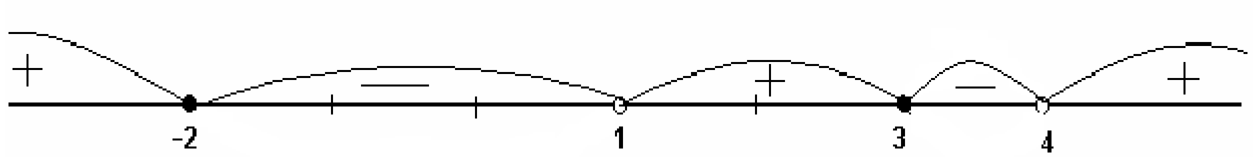
Находим корни числителя и знаменателя.

$x^2 - x - 6 = 0$ при $x_1 = -2;\ x_2 = 3$; $x^2 - 5x + 4 = 0$ при $x_3 = 1;\ x_4 = 4$.

Разложим числитель и знаменатель левой части неравенства на множители:

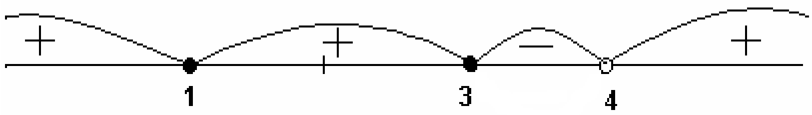
$$\frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(x-4)} \leq 0.$$

Наносим корни числителя и знаменателя на числовую ось.



На интервале $(4;\infty)$ левая часть неравенства больше нуля. Для проверки этого достаточно в левую часть неравенства подставить любую точку из интервала $(4;\infty)$. При переходе через точку $x = 4$ знак неравенства меняется на противоположный, т. к. множитель $(x - 4)$ меняет знак. Рассуждая аналогично, расставляем знаки на всех остальных интервалах. Решением неравенства являются значения $x \in [-2;1) \cup [3;4)$.

2) Наносим корни числителя $(x_1 = 1,\ x_2 = 3)$ и корень знаменателя ($x_3 = 4$) на числовую ось.



На интервале $(4;\infty)$ левая часть неравенства больше нуля. При переходе через точку $x = 4$ знак неравенства меняется, т. к. $(x - 4)^3$ меняет знак. При переходе через точку $x = 3$ знак неравенства меняется, т. к. множитель $(x - 3)$ меняет знак. При переходе через точку $x=1$ знак неравенства не меняется, т.к. множитель $(x-1)^2$ знак не меняет.

Ответ: $x \in [3;4)$.

77. Решить неравенства:

1) $\dfrac{x}{x-1} < 2$;

2) $\dfrac{3-x}{x+4} < 1$;

3) $\dfrac{x-2}{x+1} < 3$;

4) $\dfrac{x}{2x-1} \le \dfrac{1}{3}$;

5) $\dfrac{x+1}{x-2} + \dfrac{1}{2} > \dfrac{3}{x-2}$;

6) $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} > -3$;

7) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} - \dfrac{3}{x+2} < 0$;

8) $\dfrac{3x-5}{x-1} > \dfrac{2x-8}{x-1}$;

9) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \ge 1$;

10) $x > \dfrac{3x+4}{x+3}$;

11) $\dfrac{2x^2-10x+1}{x^2-6x+5} < 2$;

12) $\dfrac{x^2}{6x-8-x^2} > -1$;

13) $\dfrac{x^2-2x}{(x-3)(x-5)} \ge 0$;

14) $\dfrac{x^2-9}{x^2-x-2} \le 0$;

15) $\dfrac{(x^2-1)(x^2-3x+2)}{x^2+4x+4} > 0$;

16) $\dfrac{(x^2-4x+3)(x^2-9)}{x} < 0$;

17) $\dfrac{(x^2-6x+10)(x-3)}{(x+5)} \le 0$; 18) $\dfrac{x^2-5x}{(x^2+4x+5)} \ge 0$;

19) $x+\dfrac{1}{x-3} > \dfrac{1}{x-3}-2$;

20) Укажите наименьшее целое число, которое является решением неравенства $\dfrac{(x-3)(x+10)(x^2+8x-9)}{x^2+8x-9} < 0$.

78. Решить неравенства:

1) $x^4-5x^2+4 \le 0$; 2) $x^4-10x^2+9>0$;

3) $x^4+3x^2-4 \ge 0$; 4) $x^4+x^2-20<0$;

5) $x^3-4x^2+4x \le 0$; 6) $x^3-6x^2+9x>0$;

7) $x^4-3x^3+3x^2-x<0$; 8) $x^4+3x^3+3x^2+x \ge 0$.

8.4. Системы рациональных неравенств

Пусть надо найти числовые значения *x*, при которых превращаются в верные числовые неравенства одновременно несколько рациональных неравенств. В таких случаях говорят, что надо решить систему рациональных неравенств с одним неизвестным *x*. Чтобы решить систему рациональных неравенств, надо найти все решения каждого неравенства системы. Общая часть всех найденных решений и будет решением системы.

79. Решить системы неравенств:

1) $\begin{cases}(x-1)(x+1)<(x+2)^2\\ 3(x+2)<2x+9\end{cases}$; 2) $\begin{cases}(2x-1)(x+2)>2x^2+4\\ 5(x-1)-3(2-x)<2x+7\end{cases}$;

3) $\begin{cases}x^2-4x+3 \le 0\\ 2(x+1)<5x-4\end{cases}$; 4) $\begin{cases}x^2-4x<0\\ 5(2-x) \le 3x+2\end{cases}$;

5) $\begin{cases}x^2-x-2 \ge 0\\ x>0\end{cases}$; 6) $\begin{cases}x^2-4>0\\ 9-x^2 \ge 0\end{cases}$;

7) $\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} \ge 0\\ 2(x+1)<x+5\end{cases}$; 8) $\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-2}>0\\ x^2-3x<0\end{cases}$;

9) $\begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ |x| \le 5 \end{cases}$; 10) $\begin{cases} x^2+3 \le 4x \\ |x| \le 2 \end{cases}$;

11) $\begin{cases} 2x-x^2 \le 0 \\ |x| > 1 \end{cases}$; 12) $\begin{cases} 3x-x^2 \ge 0 \\ |x| > 2 \end{cases}$.

9. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

9.1. Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называют уравнение, содержащее выражение с неизвестным x под знаком корня или в виде дробной степени. Простейшее иррациональное уравнение – это уравнение вида $\sqrt[n]{f(x)}=\varphi(x)$.

Если n четное число, то левая часть уравнения определена при $f(x)\ge 0$.

Для решения уравнения $\sqrt[n]{f(x)}=\varphi(x)$ возводим в степень n обе части уравнения. Получаем уравнение: $f(x)=(\varphi(x))^n$.

Если n – число нечетное, то после возведения в степень n получим уравнение равносильное исходному. Если же n – число четное, то при возведении в степень n возможно появление посторонних корней. Поэтому в этом случае после нахождения корней необходимо делать проверку.

80. Решить уравнения:

1) $\sqrt[5]{2x+10}=2$; 2) $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x+2}=1$;

3) $x^2-5x+\sqrt{x^2-5x+13}+1=0$.

РЕШЕНИЕ.

1) Возводим обе части уравнения в пятую степень. Получаем: $2x+10=32$, откуда $x=11$.

Проверка найденного значения подстановкой в исходное уравнение в данном случае не нужна, т. к. степень корня, входящего в уравнение, нечетна.

Ответ: $x = 11$.

2) ОДЗ: $x\ge 5/3$.

Преобразуем уравнение к виду $\sqrt{3x-5}=\sqrt{x+2}+1$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $3x-5=x+2+2\sqrt{x+2}+1 \quad\Rightarrow\quad 2\sqrt{x+2}=2x-8$.

Делим обе части уравнения на 2 и возводим ещё раз обе части в квадрат:
$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=(x-4)^2 \quad\Rightarrow\quad x+2=x^2-8x+16 \quad\Rightarrow\quad x^2-9x+14=0$.

Находим корни квадратного уравнения: $x_1 = 2$, $x_2 = 7$.

Проверка: $x_1 = 2$: $\sqrt{3\cdot 2-5}-\sqrt{2+2}\neq 1$. Следовательно, корень $x_1 = 2$ посторонний.

$x_2 = 7$: $\sqrt{3\cdot 7-5}-\sqrt{7+2}=1$, т. е. $\sqrt{16}-\sqrt{9}=1$. Это равенство верное.

Ответ: $x = 7$.

3) Преобразуем уравнение к виду $\left(x^2-5x+13\right)+\sqrt{x^2-5x+13}-12=0$.

Обозначим $\sqrt{x^2-5x+13}=y$, причем $y\geq 0$. Тогда уравнение запишется в виде: $y^2+y-12=0$. Его корни $y_1=3$, $y_2=-4$.

Второй корень не подходит, т. к. $y\geq 0$. Возвращаемся к переменной x:
$\sqrt{x^2-5x+13}=3 \;\Rightarrow\; x^2-5x+13=9 \;\Rightarrow\; x^2-5x+4=0 \;\Rightarrow\; x_1=1,\quad x_2=4$.

Проверка: $x_1=1$. $\quad 1-5+\sqrt{9}+1=0 \Rightarrow 0=0.$

$x_2=4$. $\quad 16-20+\sqrt{9}+1=0 \Rightarrow 0=0.$

Ответ: $x_1=1,\quad x_2=4$.

81. Решить уравнения:

1) $\sqrt{2x-1}=3$;
2) $\sqrt[3]{10-2x}=2$;
3) $\sqrt[5]{x-1}=2$;
4) $\sqrt{2x-1}=x-2$;
5) $\sqrt{x-1}=x-3$;
6) $\sqrt{2x+5}=x+1$;
7) $\sqrt{3x+4}=\dfrac{1}{2}x+2$;
8) $\sqrt{4x-3}=\sqrt[4]{x}$;
9) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=2$;
10) $\sqrt{2x-4}+\sqrt{x-1}=1$;
11) $\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}=-1$;
12) $\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}=3$;
13) $\sqrt{2x+3}=1-\sqrt{x+1}$;
14) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$;
15) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$;
16) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$;
17) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x-1}=2$;
18) $\sqrt{x+8}=\sqrt{5x+20}-2$;
19) $\sqrt{4+\sqrt{24+x}}=3$;
20) $\sqrt[3]{4+\sqrt{13+x}}=2$.

82. Решить уравнения:

1) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$;
2) $(x-1)^{1/2}+6(x-1)^{1/4}=16$;
3) $\sqrt{2x+1}+2\sqrt[4]{2x+1}=3$;
4) $\sqrt[3]{x-1}-3\sqrt[6]{x-1}+2=0$;
5) $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$;
6) $2\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}=20$;

7) $\sqrt{\dfrac{2x+2}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x+2}}=\dfrac{7}{12}$;

8) $2\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}}+3\sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}}=7$;

9) $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}-12=0$;

10) $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+5}=7$;

11) $\sqrt{x^2-5x+13}+\dfrac{3}{\sqrt{x^2-5x+13}}=4$;

12) $x^2+\sqrt{x^2-9}=21$;

13) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}=\dfrac{5}{2}\sqrt[3]{x^2-1}$;

14) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=3$.

83. Решить системы иррациональных уравнений:

1) $\begin{cases}\dfrac{12}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{10}{\sqrt{y+1/4}}=7\\[2ex] \dfrac{4}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{5}{\sqrt{y+1/4}}=3\end{cases}$;

2) $\begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{4}{\sqrt{2y-2}}=3\\[2ex] \dfrac{9}{\sqrt{x+2}}-\dfrac{2}{\sqrt{2y-2}}=2\end{cases}$;

3) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4\end{cases}$;

4) $\begin{cases}\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=1\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=5\end{cases}$;

5) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}+\sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=14\\[2ex] \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}-\sqrt{\dfrac{x-y}{3}}=6\end{cases}$.

9.2. Иррациональные неравенства

Простейшими иррациональными неравенствами являются неравенства следующих видов: $\sqrt[n]{f(x)}<g(x)$, $\sqrt[n]{f(x)}\le g(x)$, $\sqrt[n]{f(x)}>g(x)$, $\sqrt[n]{f(x)}\ge g(x)$.

При нечетном показателе корня n обе части неравенства можно возвести в степень n и получить после этого равносильное рациональное неравенство. Рассмотрим решение неравенств при четном показателе корня n.

Пусть требуется решить неравенство:

$$\sqrt{f(x)}<g(x). \quad (1)$$

Левая часть неравенства определена при $f(x)\ge 0$.

Из неравенства следует, что $g(x) > \sqrt{f(x)} \geq 0$, т. е. $g(x) > 0$. Так как обе части неравенства неотрицательные, мы можем обе части неравенства возвести в квадрат.

Таким образом, заданное неравенство (1) равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Рассмотрим теперь неравенство вида: $\sqrt{f(x)} > g(x)$. (2)

Левая часть неравенства определена при $f(x) \geq 0$. В отличие от предыдущего неравенства, здесь $g(x)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Поэтому неравенство (2) равносильно совокупности двух систем неравенств:

а) $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$

Заметим, что первое неравенство второй системы ($f(x) \geq 0$) можно опустить, т. к. оно является следствием третьего неравенства этой системы $\left(f(x) > g^2(x)\right)$.

Множество решений неравенства (2) – это объединение решений рассмотренных двух систем неравенств.

84. Решить неравенства:

1) $\sqrt{2x-1} < x-2$; 2) $\sqrt{x+5} > 2x$;

РЕШЕНИЕ.

1) Неравенство $\sqrt{2x-1} < x-2$ равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ x-2 > 0, \\ 2x-1 < (x-2)^2. \end{cases}$$

Решаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x \geq 1/2 \\ x > 2 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \in (-\infty,\ 1) \cup (5, \infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (5, \infty).$$

Ответ: $x \in (5, \infty)$.

2) Неравенство $\sqrt{x+5} > 2x$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

а) $\begin{cases} x+5\ge 0, \\ 2x<0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge -5, \\ x<0. \end{cases} \Rightarrow x\in[-5,0);$

б) $\begin{cases} x+5\ge 0, \\ 2x\ge 0 \\ x+5>(2x)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 4x^2-x-5<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\in\left(-1,\,5/4\right) \end{cases} \Rightarrow x\in\left[0;\,5/4\right).$

Объединяя найденные множества решений систем, получаем ответ: $x\in[-5;5/4)$.

85. Решить неравенства:

1) $\sqrt{2x-1>x-2}$;   2) $\sqrt{x-3}<x+1$;

3) $\sqrt{4x-3}>x$;   4) $\sqrt{x+6}<x$;

5) $\sqrt{7x-3}<x+1$;   6) $\sqrt{7-x}>x-1$;

7) $\sqrt{x^2-2x}>4-x$;   8) $\sqrt{x^2-x-12}<x$.

10. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

10.1. Показательная функция. Показательные уравнения

Показательной функцией называется функция вида $y=a^x$, где $a>0$ и $a\ne 1$.

Свойства показательной функции:

1. Область определения – множество всех действительных чисел, т. е. $x\in(-\infty,\infty)$.

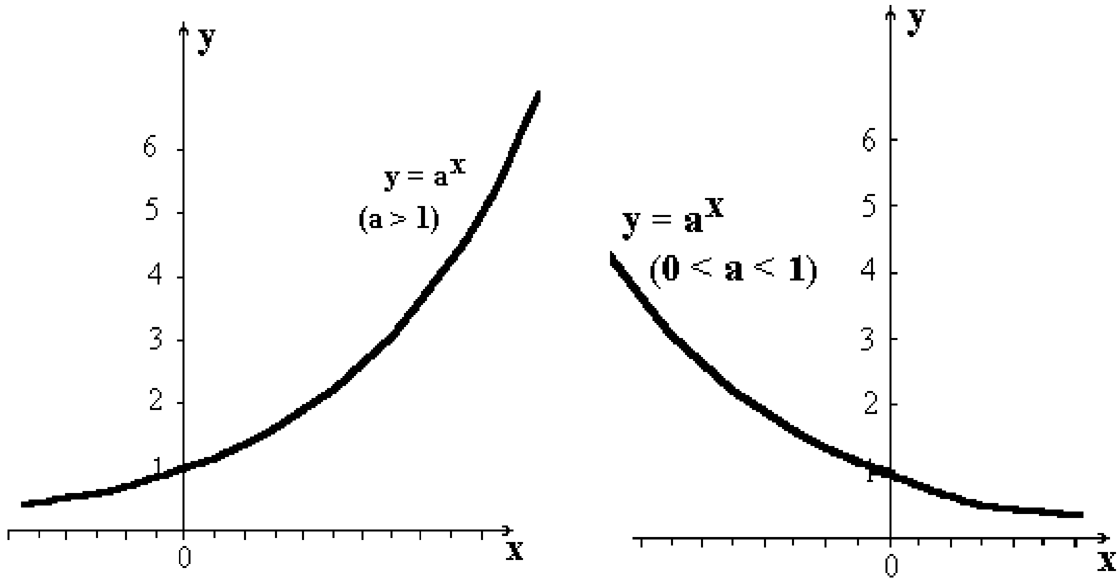
2. Область значений функции – множество всех положительных чисел, т. е. $y\in(0;\infty)$.

3. Функция не является ни четной, ни нечетной.

4. При $a>1$ функция $y=a^x$ является монотонно возрастающей, при $0<a<1$ – монотонно убывающей.

5. При любом *a* график функции $y=a^x$ проходит через точку (0; 1), т. к. $a^0=1$.

График показательной функции имеет следующий вид:



Показательным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную величину в показателе степени.

Основные виды показательных уравнений следующие:

1. $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$. Это уравнение равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$.

2. $a^{f(x)} = 1$. Так как $a^0 = 1$, исходное уравнение равносильно уравнению $f(x) = 0$.

3. $a^{f(x)} = b^{f(x)}$. Разделив обе части уравнения на $b^{f(x)} \neq 0$, получим $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1$, откуда $f(x) = 0$.

4. $Aa^{kx+\alpha} + Ba^{kx+\beta} + Ca^{kx+\gamma} = D$. Уравнение можно решать двумя способами:

а) $a^{kx+\alpha} = a^{kx} \cdot a^{\alpha}$; $a^{kx+\beta} = a^{kx} \cdot a^{\beta}$; $a^{kx+\gamma} = a^{kx} \cdot a^{\gamma}$.

Выносим за скобки a^{kx}: $a^{kx}\left(A \cdot a^{\alpha} + B \cdot a^{\beta} + C \cdot a^{\gamma}\right) = D$;

б) из чисел α, β, γ выбираем наименьшее $m = \min(\alpha, \beta, \gamma)$ и выносим за скобки a^{kx+m}.

5. $Aa^{2kx} + Ba^{kx} + C = 0$.

Вводим новую переменную $y = a^{kx}$. Исходное уравнение сводится к квадратному уравнению $Ay^2 + By + C = 0$. Решая уравнение, находим *y*. Подставляя найденное значение в равенство $a^{kx} = y$, находим *x*.

6. $Aa^{2kx} + Ba^{kx}b^{kx} + Cb^{2kx} = 0$. Делим обе части уравнения $b^{2kx} \neq 0$:

$$\frac{Aa^{2kx}}{b^{2kx}}+\frac{Ba^{kx}b^{kx}}{b^{2kx}}+\frac{Cb^{2kx}}{b^{2kx}}=0 \;\Rightarrow\; A\left(\frac{a}{b}\right)^{2kx}+B\left(\frac{a}{b}\right)^{kx}+C=0.$$

Вводим новую переменную $y=\left(\frac{a}{b}\right)^{kx}$. Исходное уравнение сводится к квадратному уравнению вида $Ay^2+By+C=0$. Подставляя найденное значение y в равенство $\left(\frac{a}{b}\right)^{x}=y$, находим x.

86. Решить уравнения:

1) $2^{x^2}=\frac{4^{3x}}{16^2}$; 2) $3^{2x-1}+5\cdot 3^{2x-2}-3^{2x}+1=0$; 3) $4^x=3\cdot 2^{x+1}-8$;

4) $2\cdot 25^x-3\cdot 10^x-5\cdot 4^x=0$.

РЕШЕНИЕ.

1) $2^{x^2}=\frac{(2^2)^{3x}}{(2^4)^2} \;\Rightarrow\; 2^{x^2}=2^{6x-8} \;\Rightarrow\; x^2=6x-8 \;\Rightarrow\; x^2-6x+8=0$.

Решая квадратное уравнение, получаем ответ: $x_1=2;\quad x_2=4$.

2) Преобразуем заданное уравнение: $3^{2x-1}+5\cdot 3^{2x-2}-3^{2x}=-1$.

а) $3^{2x-1}=3^{2x}\cdot 3^{-1};\quad 3^{2x-2}=3^{2x}\cdot 3^{-2}$. Выносим 3^{2x} за скобки:

$$3^{2x}\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{9}-1\right)=-1 \;\Rightarrow\; 3^{2x}\left(-\frac{1}{9}\right)=-1 \;\Rightarrow\; 3^{2x}=9.$$

Отсюда $2x=2,\quad x=1$.

Рассмотрим еще один способ решения этого же уравнения:

б) выносим за скобки 3^{2x-2}. Получаем:

$$3^{2x-2}\left(3^1+5-3^2\right)=-1 \;\Rightarrow\; 3^{2x-2}(-1)=-1 \;\Rightarrow\; 3^{2x-2}=1 \;\Rightarrow\; 2x-2=0 \;\Rightarrow\; x=1.$$

Ответ: $x = 1$.

3) Преобразуем заданное уравнение: $4^x-3\cdot 2^x\cdot 2+8=0$.

Обозначим $y=2^x$. Получаем уравнение $y^2-6y+8=0$.

Его корни $y_1=2,\quad y_2=4$. $\quad 2^x=2 \;\Rightarrow\; x_1=1;\quad 2^x=4 \;\Rightarrow\; x_2=2$.

Ответ: $x_1=1,\quad x_2=2$.

4) Преобразуем заданное уравнение $2\cdot 25^x-3\cdot 10^x-5\cdot 4^x=0$ в уравнение вида: $2\cdot 5^{2x}-3\cdot 2^x\cdot 5^x-5\cdot 2^{2x}=0$.

Делим обе части уравнения на 2^{2x}: $2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}-3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{x}-5=0$.

Обозначим $\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=y>0$. Получаем уравнение $2y^2-3y-5=0$. Находим корни уравнения: $y_1=\frac{5}{2}$, $y_2=-1$.

Так как $y>0$, рассматриваем только $y_1=\frac{5}{2}$. Подставляя найденное значение y в равенство $\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=y$, получаем: $\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ x=1$.

Ответ: $x=1$.

87. Решить уравнения:

1) $25^{x+1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$;

2) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$;

3) $\left(\frac{1}{0{,}125}\right)^{x}=128$;

4) $(2{,}5)^{2x-3}=15\frac{5}{8}$;

5) $(0{,}25)^{2x-5}=\left(\sqrt{2}\right)^{2x}$;

6) $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$;

7) $0{,}5^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}$;

8) $\frac{(0{,}2)^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}}=5\cdot 0{,}04^{x-1}$;

9) $9^{x}\cdot 3^{1-2x}\cdot\sqrt{27^{x}}=\sqrt{3^{x}}$;

10) $3^{\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}-3\frac{1}{3}}=1$;

11) $\frac{2^{x^2}\cdot 32}{(2^{x})^{6}}=1$;

12) $\frac{3^{x^2}}{9^{2x}}=\frac{1}{27}$;

13) $5^{3x+3}=8^{x+1}$;

14) $5^{2x-4}=3^{2x-4}$;

15) $11\cdot 5^{x+1}-2\cdot 5^{x+2}+25\cdot 5^{x-1}=2$;

16) $3\cdot 2^{x-1}+4\cdot 2^{x+1}-8\cdot 2^{x}=3$;

17) $4\cdot 3^{x-1}+5\cdot 3^{x-2}=3^{x+1}-10$;

18) $3\cdot 2^{x+2}+6\cdot 2^{x+1}+8\cdot 2^{x-1}=7$;

19) $3^{2x+2}+3^{2x}=30$;

20) $2^{2x-1}+2^{2x-2}=3\cdot 2^{2x-3}+12$;

21) $10^x + 10^{x-1} = 0{,}11$; 22) $3^{x+2} + 4\cdot 3^x = 13$;

23) $25^x - 4\cdot 5^x = 5$; 24) $9^x - 10\cdot 3^x + 9 = 0$;

25) $4^{2x} = 3\cdot 4^x + 4$; 26) $4^{x-2} - 17\cdot 2^{x-4} + 1 = 0$;

27) $7^x - 7^{x+1} + 7^{x+2} = 7\cdot 3^x + 3^{x+2} + 3^{x+3}$;

28) $2^{x+4} + 2^{x+2} + 5\cdot 2^x = 5^{x+1} - 5^x$;

29) $2\cdot 3^{2x} + 2^x\cdot 3^x - 6\cdot 2^{2x} = 0$; 30) $3\cdot 9^x + 4\cdot 6^x - 4\cdot 4^x = 0$.

10.2. Показательные неравенства

Простейшими показательными неравенствами являются неравенства вида: $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, $a^{f(x)} \ge a^{\varphi(x)}$, $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$, $a^{f(x)} \le a^{\varphi(x)}$, где $a > 0$ и $a \ne 1$.

При переходе от показательного неравенства к неравенству, связывающему показатели $f(x)$ и $\varphi(x)$, нужно учитывать, что показательная функция $y = a^x$ возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$. Поэтому, если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > \varphi(x)$; если же $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < \varphi(x)$.

88. Решить неравенства:

1) $5^{2x+4} > 25$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-2} > \frac{1}{9}$;

3) $2\cdot 5^{x+1} + 5\cdot 5^{x-1} - 6\cdot 5^x - 125 < 0$; 4) $4^x - 2^{x+1} \le 8$.

РЕШЕНИЕ.

1) Перепишем данное неравенство, представив 25 в виде 5^2: $5^{2x+4} > 5^2$. Так как $a = 5 > 1$, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $2x + 4 > 2$, откуда: $x > -1$.

Ответ: $x \in (-1, \infty)$.

2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-2} > \left(\frac{1}{3}\right)^2$. Так как $a = \frac{1}{3} < 1$, рассматриваемое неравенство равносильно неравенству $4x - 2 < 2$, откуда $x < 1$.

Ответ: $x \in (-\infty, 1)$.

3) Воспользовавшись свойствами степеней, преобразуем неравенство:

$$5^x\left(2\cdot 5+5\cdot\frac{1}{5}-6\right)<125 \;\Rightarrow\; 5^x\cdot 5<125 \;\Rightarrow\; 5^x<25 \;\Rightarrow\; x<2.$$

Ответ: $x\in(-\infty,\, 2)$.

4) Так как $2^{x+1}=2^x\cdot 2$, исходное неравенство можно записать в виде: $4^x-2\cdot 2^x-8\le 0$.

Обозначим $y=2^x$. Получаем неравенство $y^2-2y-8\le 0$. Запишем его решение в виде двойного неравенства $-2\le y\le 4$.

Так как $y>0$ при всех значениях x, левая часть неравенства $y\ge -2$ выполняется при всех значениях аргумента, поэтому решаем неравенство $y\le 4$.

Переходим к исходной переменной x: $2^x\le 4 \;\Rightarrow\; 2^x\le 2^2 \;\Rightarrow\; x\le 2$.

Ответ: $x\in(-\infty,\, 2]$.

89. Решить неравенства:

1) $4^{5-2x}<64$;
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}>4$;

3) $0{,}4^x\le 0{,}16^{x^2}$;
4) $3^{\frac{x-1}{x+1}}<1$;

5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-2}{x+3}}\ge 1$;
6) $27^x\cdot 3^{1-x}<\frac{1}{3}$;

7) $5^{x^2}<25^{3x-2{,}5}$;
8) $2^{x^2}>2^{6-x}$;

9) $8^x\cdot 4^{2x-5}\ge\sqrt{16^x}$;
10) $0{,}5^{2x}\cdot 0{,}25^{x-1}\le 0{,}125^x$;

11) $3^{x-1}>5^{x-1}$;
12) $4^{x+1}\le 7^{x+1}$;

13) $3\cdot 2^{x-1}+2^{x+2}>2^{x+3}-5$;
14) $4^{x-1}+4^x+4^{x+1}\ge 84$;

15) $3^{x+2}-7\cdot 3^x+6\cdot 3^{x-1}\le 12$;
16) $5^{x-1}+5^{x+1}-4\cdot 5^x<1{,}2$;

17) $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$;
18) $3^{x+1}+3^{x+2}-7\cdot 3^x<5^{x+1}-10\cdot 5^{x-1}$;

19) $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84$;

20) $4^{x} < 7 \cdot 2^{x} + 8$;

21) $4^{x} + 3 \cdot 2^{x} - 4 < 0$;

22) $9^{x+1} + 3^{x+2} > 18$;

23) $5^{2x+1} > 5^{x} + 4$;

24) $4^{\sqrt{x+1}} + 2^{\sqrt{x+1}+2} < 12$;

25) $9^{\sqrt{x}} + 6 \cdot 3^{\sqrt{x}-1} > 15$.

11. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

11.1. Логарифмическая функция

Функция, обратная к показательной функции $y = a^{x}$, называется ***логарифмической*** и обозначается $y = \log_{a} x \quad (a > 0, \quad a \neq 1)$.

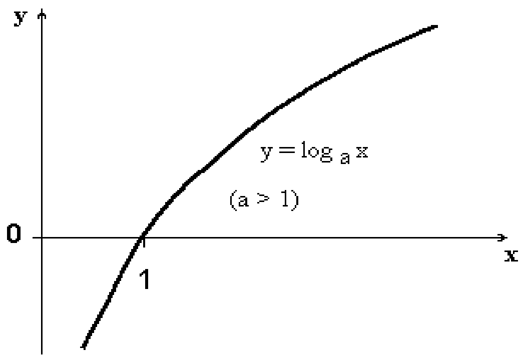
Равенство $y = \log_{a} x$ равносильно равенству $x = a^{y}$.

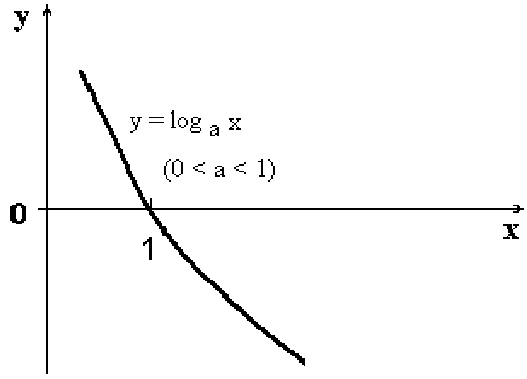
Логарифмом числа x по основанию a называется показатель степени, в которую надо возвести основание a, чтобы получить число x.

Свойства логарифмической функции

1. Область определения логарифмической функции – множество всех положительных чисел, т. е. $x \in (0, \infty)$.
2. Область значений логарифмической функции – множество всех действительных чисел, т. е. $y \in (-\infty, \infty)$.
3. При $a > 1$ функция $y = \log_{a} x$ является монотонно возрастающей, при $0 < a < 1$ – монотонно убывающей.
4. При любом допустимом значении a график функции $y = \log_{a} x$ проходит через точку (1; 0); $\log_{a} 1 = 0$, т. к. $a^{0} = 1$. Графики показательной функции $y = a^{x}$ и логарифмической функции $y = \log_{a} x$ симметричны относительно прямой $y = x$.

График логарифмической функции имеет следующий вид:





Свойства логарифмов

При любом $a > 0$ $(a \neq 1)$ и любых положительных U и V справедливы равенства:

1) $\log_a(U \cdot V) = \log_a U + \log_a V$;

2) $\log_a\left(\dfrac{U}{V}\right) = \log_a U - \log_a V$;

3) $\log_a U^n = n\log_a U$;

4) $\log_{a^n} U = \dfrac{1}{n}\log_a U$;

5) $\log_{a^n} U^n = \log_a U$;

6) $\log_a 1 = 0;$ $\log_a a = 1$;

7) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(b > 0,\quad c > 0,\quad c \neq 1)$;

8) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ $(b > 0,\quad b \neq 1)$;

9) $a^{\log_a b} = b$ $(b > 0)$ – основное логарифмическое тождество.

Примечание. Логарифмы по основанию 10 называются ***десятичными***. Они имеют специальное обозначение:

$$\log_{10} x = \lg x.$$

В различных разделах математики используются также логарифмы по основанию $e = 2{,}7182\ldots$ Число e – иррациональное число. Логарифмы по основанию e называют ***натуральными*** логарифмами и обозначают $\ln x$, т. е.

$$\log_e x = \ln x.$$

90. Вычислить:

1) $\log_3 81$; 2) $\log_2 \dfrac{1}{4}$; 3) $\log_{\sqrt{5}} 25$;

4) $\log_4 8$; 5) $\log_3 36 - \log_3 4$; 6) $\log_6 2 + \log_6 3$;

7) $9^{\log_3 7}$; 8) $5^{1-2\cdot\log_{25} 2}$; 9) $4^{\log_2 3} \cdot 27^{\log_3 \sqrt[3]{2}} : 5^{2\cdot\log_{25} 3}$.

РЕШЕНИЕ.

1) $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \cdot \log_3 3 = 4 \cdot 1 = 4$;

2) $\log_2 \dfrac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2 \cdot \log_2 2 = -2$;

3) $\log_{\sqrt{5}} 25 = 4$, т. к. $\left(\sqrt{5}\right)^4 = 25$; также $\log_{\sqrt{5}} 25$ можно вычислить, используя свойства логарифмов: $\log_{\sqrt{5}} 25 = \log_{5^{1/2}} 5^2 = \dfrac{2}{1/2} \log_5 5 = 4$;

4) $\log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \dfrac{3}{2} \log_2 2 = \dfrac{3}{2}$;

5) $\log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 \dfrac{36}{4} = \log_3 9 = 2$;

6) $\log_6 2 + \log_6 3 = \log_6 (2 \cdot 3) = \log_6 6 = 1$;

7) преобразуя заданное выражение и используя основное логарифмическое тождество, получаем: $9^{\log_3 7} = 3^{2\log_3 7} = 3^{\log_3 7^2} = 49$;

8) $5^{1-2\log_{25} 2} = 5^1 \cdot 5^{-2\log_{5^2} 2} = 5 \cdot 5^{-\frac{2}{2}\log_5 2} = 5 \cdot 5^{\log_5 2^{-1}} = 5 \cdot 2^{-1} = \dfrac{5}{2}$;

9) $4^{\log_2 3} \cdot 27^{\log_3 \sqrt[3]{2}} : 5^{2\log_{25} 3} = 2^{2\log_2 3} \cdot 3^{3\log_3 \sqrt[3]{2}} : 5^{2\log_{5^2} 3} =$

$= 2^{\log_2 3^2} \cdot 3^{\log_3 \left(\sqrt[3]{2}\right)^3} : 5^{\log_5 3} = 3^2 \cdot (\sqrt[3]{2})^3 : 3 = 9 \cdot 2 : 3 = 6$.

91. Используя свойства логарифмов, прологарифмировать по основанию a следующие выражения:

1) $x = a^3 b c^2$; 2) $x = \dfrac{(a+b)^3}{a^5}$;

3) $x = \sqrt{a(b+c)b^3}$; 4) $x = 3a^7 \sqrt[3]{(a+b)^2}$;

5) $x = \dfrac{\sqrt{a} \cdot b^3}{c^4 \cdot (a+b)}$; 6) $x = \dfrac{(b+c)^{10}}{a^5 \cdot b}$.

92. Найти x по данному логарифму:

1) $\log_a x = \log_a b + \log_a c$; 2) $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a b + 3\log_a c$;

3) $\log_a x = \frac{1}{2}\left(\log_a(a+b) + \log_a(a-b)\right)$;

4) $\log_a x = 5\log_a b - 3\log_a c + 2\log_a d$;

5) $\log_a x = \frac{1}{3}\log_a b - \frac{1}{2}\log_a c - 2\log_a d$.

93. Вычислить:

1) $\log_2 32$; 2) $\log_3 \frac{1}{9}$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} 8$; 4) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$;

5) $\log_{\frac{1}{3}} 27$; 6) $\log_{16} 64$; 7) $\log_{125} 0{,}2$; 8) $\log_9 27$;

9) $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$; 10) $\log_2 5 + \log_2 0{,}8$; 11) $\log_5 100 - \log_5 4$;

12) $\lg 40 + \lg 25$; 13) $\log_2 1000 - \log_2 125$; 14) $\log_5 75 - \log_5 3$;

15) $\log_3 11 - \log_3 33$; 16) $2\log_6 2 + 4\log_6 \sqrt{3}$; 17) $\frac{2}{3}\lg 8 + 2\lg 5$.

94. Вычислить:

1) $4^{\log_2 5}$; 2) $7^{-\log_7 8}$; 3) $3^{2+\log_3 6}$; 4) $4^{2-\log_4 7}$;

5) $16^{-\log_4 0{,}2}$; 6) $5^{-\log_{25} 36}$; 7) $5^{\frac{1}{\log_2 5}}$; 8) $7^{1+\log_{49} 36}$;

9) $4^{\frac{4}{\log_3 16}}$; 10) $3^{\frac{1}{\log_5 3}} \cdot 8^{\log_4 9} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\log_5 9}$; 11) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$;

12) $49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}$; 13) $10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 2}$; 14) $100^{\frac{1}{2} - \lg\sqrt[4]{4}}$;

15) $3^{\log_3 5} \cdot 8^{\log_2 \sqrt[3]{0{,}2}} \cdot 7^{\log_{49} 4}$; 16) $2^{\frac{1}{\log_5 2}} \cdot 3^{2-\log_{\sqrt{3}} 2} \cdot 100^{\lg\left(\frac{1}{3}\right)}$;

17) $5^{1-\log_{25} 36} + 49^{-\log_7 \sqrt{6}}$; 18) $3^{\log_9 64} + 3^{\frac{1}{2}+\log_{0{,}01} 10}$;

19) $\lg(\sqrt[5]{2{,}5}) \cdot \log_{2{,}5} 10$; 20) $\lg(\sqrt[4]{3{,}8}) \cdot \log_{3{,}8} 10$;

21) $\log_9 5 \cdot \log_{25} 27$; 22) $\log_8 \sqrt{5} \cdot \log_{125} 4$;

23) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 8$; 24) $\log_3 25 \cdot \log_5 \sqrt{7} \cdot \log_{49} 3$.

11.2. Логарифмические уравнения

Логарифмическими уравнениями называются уравнения, содержащие неизвестную величину под знаком логарифма.

Рассмотрим основные виды логарифмических уравнений:

1) $\log_a x = b \qquad (a > 0, \quad a \neq 1)$.

Такое уравнение имеет единственный корень $x = a^b$;

2) $\log_a f(x) = b \qquad (a > 0, \quad a \neq 1)$.

Заданное уравнение равносильно уравнению $f(x) = a^b$;

3) $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x) \qquad (a > 0, \quad a \neq 1)$.

ОДЗ для такого уравнения определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$$

От заданного уравнения переходим к уравнению $f(x) = \varphi(x)$ и решаем его, затем проверяем принадлежность полученных решений ОДЗ;

4) $\log_{g(x)} f(x) = b$.

ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1. \end{cases}$

От заданного уравнения переходим к уравнению $f(x) = (g(x))^b$, решаем его и проверяем принадлежность решения ОДЗ.

Используя свойства логарифмов, к рассмотренным типам уравнений можно привести некоторые более сложные логарифмические уравнения;

5) логарифмические уравнения, решаемые с помощью введения новой переменной.

Рассмотрим, например, уравнение $A\log^2{}_a x + B\log_a x + C = 0$.

Введем новую переменную $y = \log_a x$. Исходное уравнение сводится к квадратному уравнению $Ay^2 + By + C = 0$.

95. Решить уравнения:

1) $\log_2(3x-2) = 3$; 2) $\log_x 16 = 2$; 3) $\log_5(x^2-17) = \log_5(x+3)$;

4) $\log_4(x+14) + \log_4(x+2) = 3$;

5) $\log_{25}(x-1) + \log_5(x-1) + \log_{\sqrt{5}}(x-1) = 7$;

6) $\log_2^2 x - 4\log_4 x - 4\log_2 4 = 0$.

РЕШЕНИЕ.

1) $3x-2=2^3 \quad\Rightarrow\quad 3x=10 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{10}{3}$;

2) ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases} \quad x^2=16 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 4$.

Учитывая ОДЗ, получаем ответ: $x = 4$;

3) ОДЗ: $\begin{cases} x^2-17>0 \\ x+3>0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x^2>17 \\ x>-3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} |x|>\sqrt{17} \\ x>-3 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x>\sqrt{17}$.

Решаем уравнение: $x^2-17=x+3 \quad\Rightarrow\quad x^2-x-20=0$.

Корни квадратного уравнения $x_1=-4$; $x_2=5$.

Учитывая ОДЗ, получаем ответ: $x = 5$;

4) ОДЗ: $\begin{cases} x+14>0 \\ x+2>0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x>-14 \\ x>-2 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x>-2$.

$\log_4((x+14)\cdot(x+2))=3; \quad\Leftrightarrow\quad \log_4((x+14)\cdot(x+2))=\log_4 4^3 \quad\Rightarrow$

$(x+14)\cdot(x+2)=64 \quad\Rightarrow\quad x^2+16x-36=0. \quad\Rightarrow$ Корни: $x_1=-18$; $x_2=2$.

С учетом ОДЗ получаем ответ $x = 2$;

5) ОДЗ: $x-1>0 \quad\Rightarrow\quad x>1$.

Приводим все логарифмы, входящие в уравнение, к одному основанию.

$\log_{25}(x-1)=\frac{1}{2}\log_5(x-1); \qquad \log_{\sqrt{5}}(x-1)=2\log_5(x-1)$.

Исходное уравнение запишется в виде:

$\frac{1}{2}\log_5(x-1)+\log_5(x-1)+2\log_5(x-1)=7$,

откуда: $\frac{7}{2}\log_5(x-1)=7 \quad\Rightarrow\quad \log_5(x-1)=2 \quad\Rightarrow\quad (x-1)=5^2 \quad\Rightarrow\quad x=26$;

6) ОДЗ: $x > 0$.

Обозначим $y=\log_2 x$. Так как $\log_2 4=2$, а $\log_4 x=\frac{1}{2}\cdot\log_2 x$ исходное уравнение после введения новой переменной запишется в виде: $y^2-2y-8=0$.

Его корни $y_1=4$, $y_2=-2$. Находим переменную x:

$\log_2 x=4 \quad\Rightarrow\quad x_1=2^4=16. \qquad \log_2 x=-2 \quad\Rightarrow\quad x_2=2^{-2}=\frac{1}{4}$.

Ответ: $x_1=16$; $x_2=\frac{1}{4}$.

96. Решить уравнения:

1) $\lg(x-3)=1$;

2) $\log_{1/4}(2-3x)=-\frac{1}{2}$;

3) $\log_2(x^2+4)=3$;

4) $\log_2(9-x^2)=3$;

5) $\log_5(x^2-4x+4)=0$;

6) $\log_4(x^2+4x+11)=2$;

7) $\log_9(4x+1)=\frac{1}{2}$;

8) $\log_{\sqrt{3}}\left(2x+\frac{4}{3}\right)=-2$;

9) $\log_x 9=2$;

10) $\log_x 5=-1$;

11) $\log_{(x-1)} 25=2$;

12) $\log_x(2x-4)=1$;

13) $\log_x(6-2x)=1$;

14) $\log_x(7x-10)=2$;

15) $\log_2(\log_3 x)=0$;

16) $\lg(\lg x)=0$;

17) $\log_x(x^2-3x+6)=2$

18) $\log_{(x-1)}(x^2-5x+7)=1$;

19) $\log_2 x+\log_2(x+5)+\log_2 0{,}02=0$;

20) $\log_3(x-2)+\log_3(x-3)=\log_3(2x-4)$;

21) $\log_{1-x} 3-\log_{1-x} 2=0{,}5$;

22) $\lg x-\lg(x+2)=\lg 3-\lg(x^2-4)$;

23) $2\cdot\lg\sqrt{x}=\lg(15-2x)$.

97. Решить уравнения:

1) $\log_{16} x+\log_4 x+\log_2 x=7$;

2) $\log_3 x-\log_9 x+\log_{81} x=\frac{3}{4}$;

3) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$;

4) $\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=5{,}5$;

5) $\log_{\frac{1}{2}}(4x)+\log_2\frac{x^2}{8}=2$;

6) $\log_2\frac{4}{x}+4\cdot\log_4(2x^2)+3\cdot\log_8\frac{x}{4}=6$;

7) $\log_3{}^2 x+\log_3 x=6$;

8) $\log_3{}^2 x-3\cdot\log_3 x+\log_3 9=0$;

9) $\lg^2 x+\lg x+1=\dfrac{7}{\lg\frac{x}{10}}$;

10) $2\lg^2(x+1)-5\lg(x+1)+2=0$;

11) $2\log_2{}^2(x+1)=2-3\log_2(x+1)$;

12) $\dfrac{1}{5-\lg x}+\dfrac{2}{1+\lg x}=1$;

13) $4\log_9{}^2 x+6\log_{27} x=3$;

14) $4\log_4{}^2 x+3\log_8 x-2=0$;

15) $x^{\lg x-1}=100$;

16) $x^{\lg x+2}=1000$;

17) $x^{\log_2 x}=16$;

18) $\lg\left(10x^2\right)\cdot\lg x=1$.

98. Решить уравнения:

1) $2^{\log_6(-4x)}=\log_3 81$;

2) $3^{\log_4(-5x)}=\log_5 125$;

3) $\log_2(9-2^x)=3-x$;

4) $\log_3(3^x-8)=2-x$;

5) $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}=3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$;

6) $\log_2(8\cdot 2^{-x}-1)=x-2$.

99. Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 8^x=32\cdot 2^{x+y}, \\ 5^{x-y}=625\cdot 5^y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \log_2 x+\log_2 y=2, \\ \log_3 x-\log_3 y=4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_2 x+\log_2 y=0, \\ x+y=3\frac{1}{3}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_3 x+2\log_3 y=2, \\ \log_3 x-\log_3 y=0{,}5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3^{\log_2(2x-y)}=27, \\ 2^{x-y}=8; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \log_2 x-\log_2 y=2, \\ 5^{x-3y}=25. \end{cases}$

11.3. Логарифмические неравенства

Рассмотрим логарифмическое неравенство вида $\log_a f(x)>\log_a \varphi(x)$, где $a>0$ и $a\neq 1$. При переходе от логарифмического неравенства к неравенству, связывающему $f(x)$ и $\varphi(x)$, нужно учитывать, что логарифмическая функция возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$.

Следовательно, при $a>1$ от исходного неравенства переходим к неравенству $f(x)>\varphi(x)$; при $0<a<1$ от исходного неравенства переходим к неравенству $f(x)<\varphi(x)$. Кроме того, в обоих случаях следует учитывать, что логарифмическая функция определена только при положительных значениях аргумента, т. е. должны выполняться неравенства $f(x)>0$ и $\varphi(x)>0$.

Таким образом, неравенство $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ равносильно системе неравенств:

$$1)\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) > \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi(x) > 0, \\ f(x) > \varphi(x) \end{cases} \quad \text{при} \quad a > 1;$$

$$2)\ \begin{cases} f(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0, \\ f(x) < \varphi(x) \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) < \varphi(x) \end{cases} \quad \text{при} \quad 0 < a < 1.$$

100. Решить неравенства:

1) $\log_{1/2}(6x-1) > 1;$ 2) $\log_3{}^2(x-2) - \log_3(x-2) < 2$.

РЕШЕНИЕ.

1) Так как $\log_{1/2}\frac{1}{2} = 1$, заданное неравенство можно записать в виде: $\log_{1/2}(6x-1) > \log_{1/2}\frac{1}{2};$ ОДЗ: $6x-1>0$.

Так как основание логарифма меньше 1, от исходного неравенства переходим к неравенству $6x-1 < 1/2$.

Таким образом, исходное неравенство равносильно системе неравенств: $\begin{cases} 6x-1>0 \\ 6x-1 < 1/2 \end{cases}$, откуда $\begin{cases} x > 1/6 \\ x < 1/4 \end{cases}$, $\Rightarrow \frac{1}{6} < x < \frac{1}{4}$.

Ответ: $x \in \left(\frac{2}{6}; \frac{1}{4}\right)$.

2) $\log_3{}^2(x-2) - \log_3(x-2) - 2 < 0$. ОДЗ: $x-2>0 \Rightarrow x > 2$.

Обозначим $y = \log_3(x-2)$. Тогда исходное неравенство запишется в виде $y^2 - y - 2 < 0$. $y^2 - y - 2 = 0$ при $y_1 = -1$ и $y_2 = 2$.

Неравенство выполняется при $-1 < y < 2$.

Возвращаясь к исходной переменной, получаем $-1 < \log_3(x-2) < 2$, откуда $\log_3 3^{-1} < \log_3(x-2) < \log_3 3^2 \Rightarrow \frac{1}{3} < x-2 < 9 \Rightarrow 2\frac{1}{3} < x < 11$.

Ответ: $x \in \left(2\frac{1}{3},\ 11\right)$.

101. Решить неравенства:

1) $\log_4(3x+1)>\log_4(x-3)$; 2) $\log_4(3x+1)>\log_4(x+3)$;

3) $\log_2(4-x)>\log_2 x$; 4) $\lg(x+1)>\lg(5-x)$;

5) $\log_{\frac{1}{7}}(2x-6)<\log_{\frac{1}{7}} x$; 6) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-9)>\log_{\frac{1}{3}}(7-x)$;

7) $\log_{0,2}(2x-2)>\log_{0,2}(10-x)$; 8) $\log_{0,5}(8-2x)<\log_{0,5}(x+1)$;

9) $\log_2(2x-4)>2$; 10) $\log_3(3x+6)>1$;

11) $\log_{0,4}(x-3)>1$; 12) $\log_{0,3}(2x+1)<1$;

13) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-4)>0$; 14) $\log_3\left(x^2-4\right)>0$;

15) $\log_2 x^2<1$; 16) $\log_2\left(x^2-3x+3\right)>0$;

17) $\log_3\left(x^2-5x+7\right)<0$; 18) $\log_8\left(x^2-4x+3\right)>1$;

19) $\log_{1/2}\dfrac{2x-1}{x+1}\le 1$; 20) $\log_{1/2}\left(2x^2-4x-14\right)\le -1$;

21) $\log_2\dfrac{3x-1}{x-2}>2$; 22) $\log_3\dfrac{3x}{x-1}<1$;

23) $\log_2\dfrac{2x-5}{x+1}\le 1$; 24) $\log_2 x+\log_2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)<0$;

25) $\log_3(x-2)+\log_3 x>1$; 26) $\log_2 x+\log_2(x+1)<\log_2(6+2x)$;

27) $\log_2(\log_3 x)<0$; 28) $\log_3(\log_{1/2} x)>1$.

102. Решить неравенства:

1) $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{1/3} x<6$;

2) $\log_2(x-1)+4\cdot\log_4(x-1)-6\cdot\log_8(x-1)+\log_{\sqrt{2}}(x-1)^2>5$;

3) $8\cdot\log_5(x+2)-6\cdot\log_{25}(x+2)+\log_{\frac{1}{5}}(x+2)<4$;

4) $\log_2^2 x-5\log_2 x+4>0$; 5) $\log_3^2 x-3\log_3 x+2<0$;

6) $\lg^2 x+\lg(0{,}01x)>0$; 7) $\log_2^2 x-2\log_2(8x)+3<0$;

8) $\log_{0,5}^2 y-\log_{0,5}(2y)-3\le 0$; 9) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\log_3(x-1)}\ge 2{,}5$;

10) $3^{\log_4(x-2)}\le\sqrt{3}$; 11) $\left(\sqrt{5}\right)^{\log_2 x}\le 25$; 12) $(1/3)^{\log_5 x}>3$.

103. Найти область определения функций:

1) $y=\log_2 x+\sqrt{5-x}$;
2) $y=\sqrt{x^2-5x+4}+2^x$;
3) $y=\sqrt{4x-x^2}+\sqrt[3]{x}$;
4) $y=\log_3\left(x^2-1\right)+\sqrt{x}$;
5) $y=\log_5(x-2)+\dfrac{x}{x^2-9}$;
6) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-16}}+5^{x-1}$;
7) $y=\dfrac{1}{\lg x}+\sqrt{7-x}$;
8) $y=\dfrac{x}{\log_3(x-1)}+\sqrt[3]{x}$;
9) $y=2\log_2(x-1)+\log_4(5-x)$;
10) $y=\log_7\dfrac{x^2-4}{x-1}+3^x$;
11) $y=x^2+\log_2\dfrac{x}{9-x^2}$;
12) $y=\sqrt{3^x-9}+x$;
13) $y=\sqrt{4-2^x}+\dfrac{1}{x-1}$;
14) $y=\lg x-\sqrt{25-5^x}$;
15) $y=\sqrt{\lg x}-x^3$;
16) $y=\sqrt{\log_{0,3} x}+x^4$;
17) $y=\log_3(4-x)+\dfrac{1}{\log_2 x}$;
18) $y=\log_5(6-2x)+\dfrac{1}{\log_3(x-1)}$.

12. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

Арифметической прогрессией называется такая последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, в которой каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего добавлением некоторого числа d (***разности*** прогрессии), т. е. $a_{n+1}=a_n+d$, где n – любое натуральное число.

Например, числа 2, 6, 10, 14, … образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 4$.

Если $d > 0$, прогрессия называется возрастающей; если $d < 0$ – убывающей.

Наиболее важными для арифметической прогрессии являются следующие формулы:

1) формула n-го члена арифметической прогрессии: $a_n=a_1+d(n-1)$;
2) формула суммы первых n членов арифметической прогрессии: $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n$ или $S_n=\dfrac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n$;
3) свойство членов арифметической прогрессии: $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, $n=2, 3, 4, \ldots$

Геометрической прогрессией называется такая последовательность чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$ в которой каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего умножением на некоторое число q $(q \neq 0)$, которое называется ***знаменателем*** прогрессии, т. е. $b_{n+1} = b_n \cdot q$, где n – любое натуральное число.

Например, числа 2, 6, 18, 54, … образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 3$.

Наиболее важными для геометрической прогрессии являются следующие формулы:

1) формула n-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$;
2) формула суммы первых n членов геометрической прогрессии: $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$ $(q \neq 1)$. При $q = 1$, очевидно, $S_n = nb_1$;
3) свойство членов геометрической прогрессии: $b_n^{\,2} = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $n = 2, 3, \ldots$

Геометрическая прогрессия называется ***бесконечно убывающей***, если $|q| < 1$.

Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется предел сумм S_n при n, стремящемся к бесконечности.

$$S = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots = \frac{b_1}{1 - q}.$$

104. Найти арифметическую прогрессию, у которой сумма второго и седьмого членов равна 24, а сумма первого и шестого членов равна 16.

РЕШЕНИЕ. По условию задачи $\begin{cases} a_2 + a_7 = 24, \\ a_1 + a_6 = 16. \end{cases}$

Используя равенства $a_2 = a_1 + d$, $a_7 = a_1 + 6d$, $a_6 = a_1 + 5d$, перепишем систему как систему относительно переменных a_1 и d:

$$\begin{cases} 2a_1 + 7d = 24, \\ 2a_1 + 5d = 16. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $2d = 8$, откуда $d = 4$.

Подставляя $d = 4$ в любое из уравнений системы, получаем $a_1 = -2$.

Таким образом, $a_1 = -2$; $a_2 = a_1 + d = 2$; $a_3 = a_2 + d = 6$; $a_4 = a_3 + d = 10$ и т. д.

Ответ: –2; 2; 6; 10; 14; 18; …

105. Произведение первого и шестого членов геометрической прогрессии равно 18, а третий член равен 6. Найти сумму первых четырех членов этой прогрессии.

РЕШЕНИЕ. По условию задачи $\begin{cases} b_1 \cdot b_6 = 18, \\ b_3 = 6. \end{cases}$

Подставляя в систему уравнений $b_6 = b_1 \cdot q^5$, $b_3 = b_1 \cdot q^2$, получаем:

$$\begin{cases} b_1{}^2 q^5 = 18, \\ b_1 q^2 = 6. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим $b_1 = \dfrac{6}{q^2}$ и подставляем в первое уравнение. Получаем: $\dfrac{36}{q^4} \cdot q^5 = 18 \quad \Rightarrow \quad q = \dfrac{1}{2}$. Тогда $b_1 = \dfrac{6}{q^2} = 24$.

$$S_4 = \frac{b_1\left(q^4 - 1\right)}{q - 1} = \frac{24\left(\frac{1}{16} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 45.$$

Ответ: $S_4 = 45$.

106. Вычислить сумму $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{81} + \ldots$.

РЕШЕНИЕ. Это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с $b_1 = 1$ и $q = \dfrac{1}{3}$. Для нахождения суммы воспользуемся формулой $S = \dfrac{b_1}{1 - q}$.

В данном случае $S = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

Ответ: $S = \dfrac{3}{2}$.

107. Найти сумму двенадцати членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен 2, а девятый член равен 26.

108. Найти сумму десяти членов арифметической прогрессии, если ее первый член равен 1, а седьмой член равен 13.

109. Найти десятый член и сумму двенадцати членов прогрессии 1, 4, 7, 10, …

110. Найти четырнадцатый член и сумму четырнадцати членов прогрессии 6, 4, 2, 0, …

111. Пятый член арифметической прогрессии равен 10, а разность 2. Определить сумму первых десяти членов прогрессии.

112. Третий член арифметической прогрессии равен 25, а десятый равен – 3. Найти восьмой член прогрессии и сумму первых одиннадцати членов.

113. Найти арифметическую прогрессию, у которой второй член равен 6, а шестой 22.

114. Сумма третьего и седьмого членов арифметической прогрессии равна 4, а сумма второго и четырнадцатого членов равна – 8. Найти прогрессию.

115. Вычислить сумму всех нечетных двузначных чисел.

116. Сколько надо взять членов арифметической прогрессии – 1; 3; 7; 11; …, чтобы получить сумму равную 54?

117. Найти арифметическую прогрессию, зная, что сумма первых трех ее членов равна 0, а сумма их квадратов равна 50.

118. Сумма второго и восьмого членов арифметической прогрессии равна 6. Найти сумму первых девяти членов этой прогрессии.

119. Решить уравнение $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\ldots+\frac{1}{x}=3$.

120. Решить уравнение $5^{2+4+6+\ldots+2x}=(0{,}04)^{-28}$.

121. Найти десятый член арифметической прогрессии, если:

$$a_2+a_4+\ldots+a_{2n}=126,\quad a_2+a_{2n}=42,\qquad a_1=3.$$

122. Знаменатель геометрической прогрессии равен –2, а сумма первых пяти членов равна 5,5. Найти пятый член этой прогрессии.

123. Найти сумму первых пяти членов положительной геометрической прогрессии, если седьмой член этой прогрессии равен 48, а первый равен 0,75.

124. Найти сумму первых трех членов геометрической прогрессии, если известно, что ее третий член равен 3, а произведение первого и четвертого членов равно 27.

125. Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если ее третий член равен 4, а шестой равен 32.

126. Знаменатель геометрической прогрессии равен 2, а сумма первых семи членов равна 635. Найти седьмой член этой прогрессии.

127. Составить геометрическую прогрессию, у которой $b_2 - b_1 = 18$, $b_4 - b_3 = 162$.

128. Первый член положительной геометрической прогрессии равен 2, а сумма третьего и пятого членов равна 40. Найти четвертый член и сумму первых пяти членов.

129. Найти четыре числа, составляющих геометрическую прогрессию, зная, что сумма крайних чисел равна 27, а сумма средних равна 18.

130. Вычислить сумму $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + \ldots$

131. Первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен 3, а четвертый член равен $\frac{1}{9}$. Найти сумму этой прогрессии.

132. Найти пятый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 4, а знаменатель равен 0,5.

133. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма ее первого и третьего членов равна 25, а второй член равен 10.

134. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 6, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна 12. Найти второй член этой прогрессии.

135. Упростить выражение $\dfrac{1 + y + y^2 + y^3 + \ldots}{1 + y^3 + y^6 + y^9 + \ldots}$, где $0 < y < 1$.

136. Первые члены положительной арифметической и геометрической прогрессий совпадают и равны 3. Вторые члены прогрессий также равны между собой. Третий член геометрической прогрессии относится к третьему члену арифметической прогрессии, как 9:5. Найти обе прогрессии.

137. Записать в виде обыкновенной дроби числа:

1) 0,(2); 2) 0, (45); 3) 0,0(7); 4) 0,7(8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алгебра* и начала анализа: Учебник /А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др. – М.: Просвещение, 1997. – 320 с.

2. *Репетитор* по математике для поступающих в вузы: Справочник / Ю. В. Кириченко, С. Ю. Кириченко, В. И. Омельченко и др. – Х.: Фолио, 1997. – 463 с.

3. *Сборник* задач по математике : пособие для слушателей фак. довуз. подгот. / Нар. укр. акад., [каф. информ. технологий и математики ; сост.: С. В. Михайленко, Е. В. Свищева]. – 3-е изд., испр. и доп. – Х. : Изд-во НУА, 2011. – Ч. 1. – 32 с.

4. *Сборник* конкурсных задач по математике / Под ред. М. И. Сканави. – М.: Высш. шк., 2003. – 541 с.

5. *Система* тренировочных задач и уравнений по математике: Пособие для школьников старших классов / А. Я. Симонов, Д. С. Бакаев и др. – М.: Просвещение, 1991. – 208 с.

6. *Сборник* заданий для экзамена по математике на аттестат о среднем образовании. Алгебра и начала анализа / Г. Н. Литвиненко, Л. Я. Федченко, В. А. Швец. – Донецк, 2000. – 93 с.

7. *Сборник* тестовых заданий «Математика» Ю. А. Захарченко, А. В. Школьный. – К.: «Генеус», 2009. – 102с.

ОТВЕТЫ

56. 1) $(2;\infty)$; 2) $(-\infty;0)\cup(0;5)\cup(5;\infty)$; 3) $(0;4]$.

61. 1) $A(-3;4)$, $B(1;2)$, $C(4;-4)$; 2) $A(2;3)$, $B(1;0)$, $C(3;2)$;
3) $A(-3;5)$, $B(5;-1)$, $C(-2;0)$; 4) $A(2;3)$, $B(5;5)$, $C(9;1)$.

70. 1) $x \in (-\infty;\ 1)$; 2) $x \in (-\infty;\ -9)$; 3) $x \in (3;\ \infty)$; 4) $x \in (-5;\ \infty)$; 5) $x \in (-\infty;\ 2]$; 6) $x \in (-\infty;\ 1)$; 7) $x \in (-\infty;\ 17)$; 8) $x \in (-\infty;\ 1]$; 9) $x \in (-3;\ \infty)$; 10) $x \in (-\infty;\ \frac{14}{3}]$.

71. 1) $x \in (-\infty;\ -4)\cup(1;\ \infty)$; 2) $x \in (2;\ \infty)$; 3) $x \in (-\infty;\ -\frac{1}{3})$;
4) $x \in (-\infty;\ 1)$; 5) $x \in (-\infty;\ -\frac{1}{8})\cup(\frac{1}{4};\ \infty)$; 6) $x \in (-\infty;\ 3)$.

74. 1) $x \in (-\infty;\ 1)\cup(5;\ \infty)$; 2) $x \in [-2;\ 3]$; 3) $x \in (-\infty;\ \infty)$;
4) $x \in \varnothing$; 5) $x \in (-\infty;\ 0)\cup(\frac{1}{15};\ \infty)$; 6) $x \in (-1;\ -\frac{1}{2})$;
7) $x \in (-\infty;\ -2)\cup(5;\ \infty)$; 8) $x \in [1;\ 6]$; 9) $x \in (-4;\ -1)\cup(1;\ 4)$;
10) $x \in (-\infty;\ -3)\cup(3;\ \infty)$; 11) $x \in [-1;\ 1]$; 12) $x \in (-\infty;\ -4]\cup[-1;\ 1]\cup[4;\ \infty)$.

75. 1) $a < -\frac{7}{4}$; 2) $m > 1$

77. 1) $x \in (-\infty;\ 1)\cup(2;\ \infty)$; 2) $x \in (-\infty;\ -4)\cup(-\frac{1}{2};\ \infty)$; 3) $x \in (-\infty;\ -\frac{5}{2})\cup(-1;\ \infty)$;
4) $x \in [-1;\ \frac{1}{2}]$; 5) $x \in (-\infty;\ 2)\cup(2;\ \infty)$; 6) $x \in (-\infty;\ -1)\cup(-\frac{1}{3};\ 0)\cup(1;\ \infty)$;
7) $x \in (-\infty;\ -3)\cup(-2;\ -1)\cup(1;\ \infty)$; 8) $x \in (-\infty;\ -3)\cup(1;\ \infty)$;
9) $x \in [\frac{5}{2};\ 3)\cup(4;\ \infty)$; 10) $x \in (-3;\ -2)\cup(2;\ \infty)$; 11) $x \in (-\infty;\ 1)\cup(4\frac{1}{2};\ 5)$;
12) $x \in (-\infty;\ \frac{4}{3})\cup(2;\ 4)$; 13) $x \in (-\infty;\ 0]\cup[2;\ 3)\cup(5;\ \infty)$; 14) $x \in [-3;\ -1)\cup(2;\ 3]$;
15) $x \in (-\infty;\ -2)\cup(-2;\ -1)\cup(2;\ \infty)$; 16) $x \in (-\infty;\ -3)\cup(0;\ 1)$; 17) $x \in (-5;\ 3]$;
18) $x \in (-\infty;\ 0]\cup[5;\ \infty)$; 19) $(-2;3)\cup(3;\infty)$; 20) -8.

78. 1) $x \in [-2;\ -1]\cup[1;\ 2]$; 2) $x \in (-\infty;\ -3)\cup(-1;\ 1)\cup(3;\ \infty)$;
3) $x \in (-\infty;\ -1]\cup[1;\ \infty)$; 4) $x \in (-2;\ 2)$; 5) $x \in (-\infty;\ 0]$;
6) $x \in (0;\ 3)\cup(3;\ \infty)$; 7) $x \in (0;\ 1)$; 8) $x \in (-\infty;\ -1]\cup[0;\ \infty)$.

79. 1) $x \in (-\frac{5}{4};\ 3)$; 2) $x \in (2;\ 3)$; 3) $x \in (2;\ 3)$; 4) $x \in [1;\ 4)$; 5) $x \in [2;\ \infty)$;
6) $x \in [-3;\ -2)\cup(2;\ 3)$; 7) $x \in (-\infty;\ 0]\cup(1;\ 3)$; 8) $x \in (2;\ 3)$;
9) $x \in [-5;\ 2)\cup(4;\ 5)$; 10) $x \in [1;\ 2]$; 11) $x \in (-\infty;\ -1)\cup[2;\ \infty)$; 12) $x \in (2;\ 3]$.

81. 1) 33; 2) 1; 3) 5; 4) 5; 5) 5; 6) 2; 7) 0; 4;
8) 1; 9) 1; 10) 2; 11) 1; 12) –2; 1; 13) –1; 14) 7;
15) 1; 5; 16) –1; 17) 2; 10; 18) 1; 19) 1; 20) 3.

82. 1) 81; 2) 17; 3) 0; 4) 2; 65; 5) $-\frac{27}{8}$; 1; 6) $-\frac{125}{8}$; 64; 7) 7;

8) $-\frac{19}{8}$; 2; 9) –4; 2; 10) –1; 4; 11) 1; 4; 12) $\pm 3\sqrt{2}$; 13) $\pm\frac{9}{7}$; 14) 64.

83. 1) (17; 6); 2) (7; 3); 3) (1; 81); (81; 1); 4) (16; 1); 5) (124; 76).

85. 1) $x \in [\frac{1}{2}; 5)$; 2) $x \in [3; \infty)$; 3) $x \in (1; 3)$; 4) $x \in (3; \infty)$;

5) $x \in (\frac{3}{7}; 1)\cup(4; \infty)$; 6) $x \in (-\infty; 3)$; 7) $x \in (\frac{8}{3}; \infty)$; 8) $x \in (4; \infty)$.

87. 1) $-2/3$; 2) 1; 3) 7/3; 4) 3; 5) 2; 6) 6; 7) –2; 4; 8) 3;
9) –1; 10) ±2; 11) 1; 5; 12) 1;3; 13) –1; 14) 2; 15) –1; 16) 1;
17) 2; 18) –2; 19) 1/2; 20) 5/2; 21) –1; 22) 0; 23) 1; 24) 0; 2;
25) 1; 26) 0; 4; 27) 0; 28) 2; 29) 1; 30) –1.

89. 1) $x \in (1; \infty)$; 2) $x \in (-\infty; -3/2)$; 3) $x \in [0; 1/2]$; 4) $x \in (-1; 1)$;
5) $x \in (-3; 2]$; 6) $x \in (-\infty; -1)$; 7) $x \in (1; 5)$; 8) $x \in (-\infty; -3)\cup(2; \infty)$;
9) $x \in [2; \infty)$; 10) $x \in [2; \infty)$; 11) $x \in (-\infty; 1)$; 12) $x \in [-1; \infty)$;
13) $x \in (-\infty; 1)$; 14) $x \in [2; \infty)$; 15) $x \in (-\infty; 1]$; 16) $x \in (-\infty; 0)$;
17) $x \in (0; \infty)$; 18) $x \in (1; \infty)$; 19) $x \in (0; 1)$; 20) $x \in (-\infty; 3)$;
21) $x \in (-\infty; 0)$; 22) $x \in (0; \infty)$; 23) $x \in (0; \infty)$; 24) $x \in [-1; 0)$;
25) $x \in (1; \infty)$.

93. 1) 5; 2) –2; 3) –3; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) –3; 6) $\frac{3}{2}$; 7) $-\frac{1}{3}$; 8) $\frac{3}{2}$;
9) 2; 10) 2; 11) 2; 12) 3; 13) 3; 14) 2; 15) –1; 16) 2; 17) 2.

94. 1) 25; 2) 1/8; 3) 54; 4) 16/7; 5) 25; 6) 1/6; 7) 2; 8) 42;
9) 9; 10) 15; 11) 20; 12) 25/2; 13) 45/2; 14) 5; 15) 2; 16) 5/4;
17) 1; 18) 9; 19) 1/5; 20) 1/4; 21) 3/4; 22) 1/9; 23) 3; 24) 1/2.

96. 1) 13; 2) 0; 3) ±2; 4) ±1; 5) 1; 3; 6) –5; 1; 7) 1/2; 8) $-1/2$; 9) 3;
10) 1/5; 11) 6; 12) 4; 13) 2; 14) 2; 5; 15) 3; 16) 10; 17) 2; 18) 4;
19) 5; 20)5; 21) –5/4; 22) 3; 23) 5.

97. 1) 16; 2) 3; 3) 64; 4) 27; 5) 128; 6) 2; 7) 9; $\frac{1}{27}$; 8) 3; 9;

9) 100; 10) 99; $\sqrt{10}-1$; 11) $\sqrt{2}-1$; $-\frac{3}{4}$; 12) 100; 1000; 13) $\frac{1}{27}$; 3;

14) 1/4; 2; 15) 1/10;100; 16) 1/1000; 10; 17) 1/4; 4; 18) 1/10; $\sqrt{10}$.

98. 1) –9; 2) $-\frac{4}{5}$; 3) 0; 3; 4) 2; 5) 100; 6) 2.

99. 1) (2; –1); 2) (18; $\frac{2}{9}$); 3) (3; $\frac{1}{3}$); ($\frac{1}{3}$; 3); 4) (3; $\sqrt{3}$); 5) (5; 2); 6) (8; 2).

101. 1) $x \in (3; \infty)$; 2) $x \in (1; \infty)$; 3) $x \in (0; 2)$; 4) $x \in (2; 5)$; 5) $x \in (6; \infty)$; 6) $x \in (3; 4)$; 7) $x \in (1; 4)$; 8) $x \in (-1; 7/3)$; 9) $x \in (4; \infty)$; 10) $x \in (-1; \infty)$; 11) $x \in (3; 3{,}4)$; 12) $x \in (-0{,}35; \infty)$; 13) $2 < |x| < \sqrt{5}$; 14) $|x| > \sqrt{5}$; 15) $x \in (-\sqrt{2}; 0)\cup(0; \sqrt{2})$; 16) $x \in (-\infty; 1)\cup(2; \infty)$; 17) $x \in (2; 3)$; 18) $x \in (-\infty; -1)\cup(5; \infty)$; 19) $x \in (-\infty; -1)\cup[1; \infty)$; 20) $x \in (-\infty; -2)\cup(4; \infty)$; 21) $x \in (2; 7)$; 22) $x \in (-\infty; 0)$; 23) $(5/2; \infty)$; 24) $x \in (3/2; 2)$; 25) $x \in (3; \infty)$; 26) $x \in (0; 3)$; 27) $x \in (1; 3)$; 28) $x \in (0; 1/8)$.

102. 1) $x \in (0; 27)$; 2) $x \in (3; \infty)$; 3) $x \in (-2; 3)$; 4) $x \in (0; 2)\cup(16; \infty)$; 5) $x \in (3; 9)$; 6) $x \in (0; \frac{1}{100})\cup(10; \infty)$; 7) $x \in (\frac{1}{2}; 8)$; 8) $x \in [\frac{1}{4}; 2]$; 9) $x \in (1; \frac{4}{3}]$; 10) $x \in (2; 4]$; 11) $x \in (0; 16]$; 12) $x \in (0; 1/5)$.

103. 1) $x \in (0; 5]$; 2) $x \in (-\infty; 1)\cup(4; \infty)$; 3) $x \in [0; 4]$; 4) $x \in (1; \infty)$; 5) $x \in (2; 3)\cup(3; \infty)$; 6) $x \in (-4; 1]\cup(4; \infty)$; 7) $x \in (0; 1)\cup(1; 7]$; 8) $x \in (1; 2)\cup(2; \infty)$; 9) $x \in (1; 5)$; 10) $x \in (-2; 1)\cup(2; \infty)$; 11) $x \in (-\infty; -3)\cup(0; 3)$; 12) $x \in [2; \infty)$; 13) $x \in (-\infty; 1)\cup(1; 2]$; 14) $x \in (0; 2]$; 15) $x \in [1; \infty)$; 16) $x \in (0; 1]$; 17) $x \in (0; 1)\cup(1; 4)$; 18) $x \in (1; 2)\cup(2; 3)$.

107. 222. **108.** 100. **109.** $a_{10} = 28$; $S_{12} = 210$. **110.** $a_{14} = -20$; $S_{14} = -98$.

111. 110. **112.** $a_8 = 5$; $S_{11} = 143$. **113.** 2; 6; 10; … **114.** 10; 8; 6; 4; …

115. 2475. **116.** 6. **117.** (5; 0; –5; …); (–5; 0; 5; …). **118.** 27. **119.** 7.

120. 7. **121.** 30. **122.** 8. **123.** $23\frac{1}{4}$. **124.** 39. **125.** 31. **126.** 320.

127. (9; 27; 81; …); $(-\frac{9}{2}; \frac{27}{2}; -\frac{81}{2}; \ldots)$. **128.** $b_4 = 16$; $S_5 = 62$. **129.** 3; 6; 12; 24.

130. 10/9. **131.** 9/2. **132.** 1/8. **133.** 40. **134.** 3/2. **135.** $1 + y + y^2$.

136. (3; 9; 15; …); (3; 9; 27; …). **137.** 1) $2/9$; 2) $\frac{45}{99}$; 3) $\frac{7}{90}$; 4) $\frac{71}{90}$.

Навчальне видання

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ
ЧАСТИНА 2

Навчальний посібник
для слухачів факультету довузівської підготовки
(російською мовою)

Упорядники: Михайленко Світлана Василівна
Свіщова Євгенія Віталіївна

В авторській редакції
Комп'ютерна верстка *А. Ю. Петрова, К. В. Дибіна*

Підписано до друку 02.10.2012. Формат 60×84/16.
Папір офсетний. Гарнітура «Таймс».
Ум. друк. арк. 2,79. Обл.-вид. арк. 3,11.
Тираж 100 пр

Видавництво
Народної української академії
Свідоцтво № 1153 від 16.12.2002.

Надруковано у видавництві
Народної української академії

Україна, 61000, Харків, МСП, вул. Лермонтовська, 27.